Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
Facultad Informática Universidad Murcia	**Álgebra y Matemática Discreta**	Previo: 60 min.
	Teorema Chino de los Restos	Clase: 30 min.

Vídeo : `https://youtu.be/sqmLdTnIetU`

1. Resumen

Un problema de Teorema Chino de los Restos es un conjunto de dos o más ecuaciones en congruencias del tipo $n \equiv a \pmod{m}$ ó $bn \equiv a \pmod{m}$. Estudiaremos cuatro casos:

1. Tenemos dos ecuaciones

$$\begin{aligned} n &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ n &\equiv a_2 \pmod{m_2} \end{aligned}$$

con módulos m_1 y m_2 tales que $\mathsf{mcd}(m_1, m_2) = 1$. En ese caso pondremos que

$$\begin{aligned} n &= a_1 + m_1 x \\ n &= a_2 + m_2 y \end{aligned}$$

para valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones para eliminar la n, obtendremos la ecuación diofántica

$$m_1 x - m_2 y = a_2 - a_1$$

que resolveremos para obtener los valores de x e y. Con esos valores, sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} n &= a_1 + m_1 x \\ n &= a_2 + m_2 y \end{aligned}$$

obtendremos el resultado buscado, que quedará definido salvo múltiplos de $m_1 m_2$ y por lo tanto será de nuevo una relación de congruencia del tipo $n \equiv c \pmod{m_1 m_2}$. Como el máximo común divisor de m_1 y m_2 es 1, siempre tendremos soluciones a esta ecuación diofántica.

2. El segundo caso es similar, pero los módulos m_1 y m_2 pueden no ser coprimos. En este caso procedemos igual, pero la ecuación diofántica que obtenemos

$$m_1 x - m_2 y = a_2 - a_1$$

podría no tener solución. En ese caso el problema no tendría solución. En caso de tenerla, seguimos como en el caso (1) y obtendríamos una solución del tipo

$$n \equiv c \pmod{\mathsf{mcm}(m_1, m_2)}$$

es decir, definida salvo múltiplos del mínimo común múltiplo de los módulos.

3. El tercer caso es cuando tenemos tres o más ecuaciones. En este caso combiaríamos dos de ellas para obtener una nueva ecuación en congruencias que luego combinaríamos con la siguiente y seguiríamos este procedimiento hasta agrupar todas las ecuaciones en una sola. Esto es posible porque el resultado de combinar dos ecuaciones en congruencias es de nuevo una congruencia con un módulo mayor.

4. El último caso es cuando nos aparecen coeficientes en el n, es decir, ecuaciones del tipo

$$bn \equiv a \pmod{m}$$

En ese caso podemos proceder de varias formas. Multiplicando por el inverso de b módulo m para despejar n o procediendo como en los casos anteriores y cuando tengamos las ecuaciones

$$\begin{aligned} b_1 n &= a_1 + m_1 x \\ b_2 n &= a_2 + m_2 y \end{aligned}$$

multiplicar la primera por b_2, la segunda por b_1 y restar para eliminar la parte de n y seguir como en los casos anteriores. Al despejar finalmente n tendremos que dividir por $b_1 b_2$, lo cual se podrá hacer.

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

En esta sección hay 50 ejercicios de los tipos (1) y (2), algunos con solución y otros que no la tienen. Se deberían hacer por lo menos tres o cuatro de ellos elegidos aleatoriamente para comprender correctamente el proceso.

Ejercicio 1. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 3 \pmod{287}$ y $n \equiv 25 \pmod{42}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 3 + 287x$ y que $n = 25 + 42y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$287x - 42y = 22$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 287 & 1 & 0 \\ -42 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 287 & 1 & 0 \\ -42 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+7(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -7 & 1 & 7 \\ -42 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-6(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -7 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & -41 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & -41 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 7. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 2. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 14 \pmod{325}$ y $n \equiv 35 \pmod{145}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 14 + 325x$ y que $n = 35 + 145y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$325x - 145y = 21$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 325 & 1 & 0 \\ -145 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 325 & 1 & 0 \\ -145 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 35 & 1 & 2 \\ -145 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 35 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+7(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 29 & 65 \\ -5 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -5 & 4 & 9 \\ 0 & 29 & 65 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & -4 & -9 \\ 0 & 29 & 65 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 3. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 81 \pmod{153}$ y $n \equiv 1 \pmod{87}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 81 + 153x$ y que $n = 1 + 87y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$153x - 87y = 7$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 153 & 1 & 0 \\ -87 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 153 & 1 & 0 \\ -87 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -21 & 1 & 2 \\ -87 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -21 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-7(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 29 & 51 \\ -3 & -4 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -3 & -4 & -7 \\ 0 & 29 & 51 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 29 & 51 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 4. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 9 \pmod{135}$ y $n \equiv 15 \pmod{145}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 9 + 135x$ y que $n = 15 + 145y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$135x - 145y = 6$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 135 & 1 & 0 \\ -145 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 135 & 1 & 0 \\ -145 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 135 & 1 & 0 \\ -10 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+13(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & 14 & 13 \\ -10 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 29 & 27 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 5. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 37 \pmod{60}$ y $n \equiv 52 \pmod{485}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 37 + 60x$ y que $n = 52 + 485y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$60x - 485y = 15$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 60 & 1 & 0 \\ -485 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 60 & 1 & 0 \\ -485 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+8(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 60 & 1 & 0 \\ -5 & 8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+12(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 97 & 12 \\ -5 & 8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -5 & 8 & 1 \\ 0 & 97 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & -8 & -1 \\ 0 & 97 & 12 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 97 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ -485 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 60(-8) - 485(-1) &= 5 \\ 60(97) - 485(12) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 60(-24) - 485(-3) &= 15 \\ 60(97t) - 485(12t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$60\underbrace{(97t-24)}_{x} - 485\underbrace{(12t-3)}_{y} = 15$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 97t - 24 \\ y &= 12t - 3 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 37 + 60x$ o el de y en $n = 52 - 485y$ obtenemos la solución

$$n = 5820t - 1403 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -1403 \equiv 4417 \pmod{5820}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 6. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 68 \pmod{430}$ y $n \equiv 89 \pmod{335}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 68 + 430x$ y que $n = 89 + 335y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$430x - 335y = 21$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 430 & 1 & 0 \\ -335 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 430 & 1 & 0 \\ -335 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 95 & 1 & 1 \\ -335 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 95 & 1 & 1 \\ 45 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & -7 & -9 \\ 45 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-9(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 67 & 86 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. ♢

Ejercicio 7. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 15 \pmod{36}$ y $n \equiv 20 \pmod{31}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 15 + 36x$ y que $n = 20 + 31y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$36x - 31y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{c|cc} 36 & 1 & 0 \\ -31 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{c|cc} 36 & 1 & 0 \\ -31 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 1 & 1 \\ -31 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+6(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 31 & 36 \\ -1 & 6 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 6 & 7 \\ 0 & 31 & 36 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -6 & -7 \\ 0 & 31 & 36 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 31 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$36(-6) - 31(-7) = 1$$
$$36(31) - 31(36) = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$36(-30) - 31(-35) = 5$$
$$36(31t) - 31(36t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$36\underbrace{(31t-30)}_{x} - 31\underbrace{(36t-35)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 31t - 30$$
$$y = 36t - 35$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 15 + 36x$ o el de y en $n = 20 - 31y$ obtenemos la solución

$$n = 1116t - 1065 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -1065 \equiv 51 \pmod{1116}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 8. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 13 \pmod{178}$ y $n \equiv 15 \pmod{182}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 13 + 178x$ y que $n = 15 + 182y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$178x - 182y = 2$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 178 & 1 & 0 \\ -182 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 178 & 1 & 0 \\ -182 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 178 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+44(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 2 & 45 & 44 \\ -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 2 & 45 & 44 \\ 0 & 91 & 89 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 2. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 45 & 44 \\ 91 & 89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 178 \\ -182 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$178(45) - 182(44) = 2$$
$$178(91) - 182(89) = 0$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$178(45) - 182(44) = 2$$
$$178(91t) - 182(89t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$178\underbrace{(91t + 45)}_{x} - 182\underbrace{(89t + 44)}_{y} = 2$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 91t + 45$$
$$y = 89t + 44$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 13 + 178x$ o el de y en $n = 15 - 182y$ obtenemos la solución

$$n = 16198t + 8023 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 8023 \pmod{16198}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 9. *Encuentra, si existen, todos los valores* n *enteros tales que* $n \equiv 42 \pmod{89}$ *y* $n \equiv 20 \pmod{27}$.

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 42 + 89x$ y que $n = 20 + 27y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$89x - 27y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 89 & 1 & 0 \\ -27 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 89 & 1 & 0 \\ -27 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 8 & 1 & 3 \\ -27 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 8 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 10 & 33 \\ -3 & 3 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 10 & 33 \\ 0 & -27 & -89 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -10 & -33 \\ 0 & -27 & -89 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -10 & -33 \\ -27 & -89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 89 \\ -27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$89(-10) - 27(-33) = 1$$
$$89(-27) - 27(-89) = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$89(-50) - 27(-165) = 5$$
$$89(-27t) - 27(-89t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$89\underbrace{(-27t - 50)}_{x} - 27\underbrace{(-89t - 165)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = -27t - 50$$
$$y = -89t - 165$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 42 + 89x$ o el de y en $n = 20 - 27y$ obtenemos la solución

$$n = -2403t - 4408 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -4408 \equiv 398 \pmod{2403}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 10. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 14 \pmod{58}$ y $n \equiv 19 \pmod{99}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 14 + 58x$ y que $n = 19 + 99y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$58x - 99y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 58 & 1 & 0 \\ -99 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 58 & 1 & 0 \\ -99 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 58 & 1 & 0 \\ 17 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & -5 & -3 \\ 17 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & -5 & -3 \\ 3 & 12 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -29 & -17 \\ 3 & 12 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -29 & -17 \\ 0 & 99 & 58 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -29 & -17 \\ 99 & 58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58 \\ -99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$58(-29) - 99(-17) = 1$$
$$58(99) - 99(58) = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$58(-145) - 99(-85) = 5$$
$$58(99t) - 99(58t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$58\underbrace{(99t - 145)}_{x} - 99\underbrace{(58t - 85)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 99t - 145$$
$$y = 58t - 85$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 14 + 58x$ o el de y en $n = 19 - 99y$ obtenemos la solución

$$n = 5742t - 8396 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -8396 \equiv 3088 \pmod{5742}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 11. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 0 \pmod{9}$ y $n \equiv 3 \pmod{19}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 0+9x$ y que $n = 3+19y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$9x - 19y = 3$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 9 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 9 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 9 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+9(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 19 & 9 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 19 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 19 & 9 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 19 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 9(-2) - 19(-1) &= 1 \\ 9(19) - 19(9) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 9(-6) - 19(-3) &= 3 \\ 9(19t) - 19(9t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$9\underbrace{(19t - 6)}_{x} - 19\underbrace{(9t - 3)}_{y} = 3$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 19t - 6 \\ y &= 9t - 3 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 0 + 9x$ o el de y en $n = 3 - 19y$ obtenemos la solución

$$n = 171t - 54 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -54 \equiv 117 \pmod{171}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 12. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 15 \pmod{67}$ y $n \equiv 16 \pmod{78}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 15 + 67x$ y que $n = 16 + 78y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$67x - 78y = 1$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 67 & 1 & 0 \\ -78 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 67 & 1 & 0 \\ -78 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 67 & 1 & 0 \\ -11 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+6(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 7 & 6 \\ -11 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+11(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 78 & 67 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 78 & 67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 67 \\ -78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 67(7) - 78(6) &= 1 \\ 67(78) - 78(67) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 67(7) - 78(6) &= 1 \\ 67(78t) - 78(67t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$67\underbrace{(78t + 7)}_{x} - 78\underbrace{(67t + 6)}_{y} = 1$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 78t + 7 \\ y &= 67t + 6 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 15 + 67x$ o el de y en $n = 16 - 78y$ obtenemos la solución

$$n = 5226t + 484 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 484 \pmod{5226}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 13. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 9 \pmod{27}$ y $n \equiv 1 \pmod{13}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 9 + 27x$ y que $n = 1 + 13y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$27x - 13y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 27 & 1 & 0 \\ -13 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 27 & 1 & 0 \\ -13 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 2 \\ -13 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+13(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 27 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 27(1) - 13(2) &= 1 \\ 27(13) - 13(27) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 27(5) - 13(10) &= 5 \\ 27(13t) - 13(27t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$27\underbrace{(13t + 5)}_{x} - 13\underbrace{(27t + 10)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 13t + 5 \\ y &= 27t + 10 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 9 + 27x$ o el de y en $n = 1 - 13y$ obtenemos la solución

$$n = 351t + 144 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 144 \pmod{351}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 14. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 5 \pmod{22}$ y $n \equiv 61 \pmod{99}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 5 + 22x$ y que $n = 61 + 99y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$22x - 99y = 56$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 22 & 1 & 0 \\ -99 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 22 & 1 & 0 \\ -99 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 22 & 1 & 0 \\ 11 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -9 & -2 \\ 11 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 11 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 11. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\diamondsuit$

Ejercicio 15. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 10 \pmod{27}$ y $n \equiv 26 \pmod{51}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 10 + 27x$ y que $n = 26 + 51y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$27x - 51y = 16$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 27 & 1 & 0 \\ -51 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 27 & 1 & 0 \\ -51 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 27 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-9(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -17 & -9 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -17 & -9 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\diamondsuit$

Ejercicio 16. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 30 \pmod{70}$ y $n \equiv 35 \pmod{75}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 30 + 70x$ y que $n = 35 + 75y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$70x - 75y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 70 & 1 & 0 \\ -75 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 70 & 1 & 0 \\ -75 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 70 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+14(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 15 & 14 \\ -5 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -5 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 15 & 14 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ -75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 70(-1) - 75(-1) &= 5 \\ 70(15) - 75(14) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 70(-1) - 75(-1) &= 5 \\ 70(15t) - 75(14t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$70\underbrace{(15t-1)}_{x} - 75\underbrace{(14t-1)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 15t - 1 \\ y &= 14t - 1 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 30 + 70x$ o el de y en $n = 35 - 75y$ obtenemos la solución

$$n = 1050t - 40 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -40 \equiv 1010 \pmod{1050}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 17. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 0 \pmod{13}$ y $n \equiv 5 \pmod{17}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 0 + 13x$ y que $n = 5 + 17y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$13x - 17y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 13 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 13 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 13 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 17 & 13 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 17 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 13(4) - 17(3) &= 1 \\ 13(17) - 17(13) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 13(20) - 17(15) &= 5 \\ 13(17t) - 17(13t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$13\underbrace{(17t + 20)}_{x} - 17\underbrace{(13t + 15)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 17t + 20 \\ y &= 13t + 15 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 0 + 13x$ o el de y en $n = 5 - 17y$ obtenemos la solución

$$n = 221t + 260 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 260 \equiv 39 \pmod{221}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 18. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 53 \pmod{117}$ y $n \equiv 65 \pmod{102}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 53 + 117x$ y que $n = 65 + 102y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$117x - 102y = 12$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 117 & 1 & 0 \\ -102 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 117 & 1 & 0 \\ -102 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 15 & 1 & 1 \\ -102 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+7(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 15 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -34 & -39 \\ 3 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 3 & 7 & 8 \\ 0 & -34 & -39 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -34 & -39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 117 \\ -102 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 117(7) - 102(8) &= 3 \\ 117(-34) - 102(-39) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 117(28) - 102(32) &= 12 \\ 117(-34t) - 102(-39t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$117\underbrace{(-34t + 28)}_{x} - 102\underbrace{(-39t + 32)}_{y} = 12$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -34t + 28 \\ y &= -39t + 32 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 53 + 117x$ o el de y en $n = 65 - 102y$ obtenemos la solución

$$n = -3978t + 3329 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 3329 \pmod{3978}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 19. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 2 \pmod 9$ y $n \equiv 7 \pmod{83}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 2+9x$ y que $n = 7+83y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$9x - 83y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 9 & 1 & 0 \\ -83 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 9 & 1 & 0 \\ -83 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+9(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 9 & 1 & 0 \\ -2 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 37 & 4 \\ -2 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 37 & 4 \\ 0 & 83 & 9 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 37 & 4 \\ 83 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$9(37) - 83(4) = 1$$
$$9(83) - 83(9) = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$9(185) - 83(20) = 5$$
$$9(83t) - 83(9t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$9\underbrace{(83t+185)}_{x} - 83\underbrace{(9t+20)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 83t + 185$$
$$y = 9t + 20$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 2 + 9x$ o el de y en $n = 7 - 83y$ obtenemos la solución

$$n = 747t + 1667 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 1667 \equiv 173 \pmod{747}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 20. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 46 \pmod{89}$ y $n \equiv 48 \pmod{51}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 46 + 89x$ y que $n = 48 + 51y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$89x - 51y = 2$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 89 & 1 & 0 \\ -51 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 89 & 1 & 0 \\ -51 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -13 & 1 & 2 \\ -51 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -13 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+13(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -51 & -89 \\ 1 & -4 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -4 & -7 \\ 0 & -51 & -89 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -51 & -89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 89 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$89(-4) - 51(-7) = 1$$
$$89(-51) - 51(-89) = 0$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$89(-8) - 51(-14) = 2$$
$$89(-51t) - 51(-89t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$89\underbrace{(-51t - 8)}_{x} - 51\underbrace{(-89t - 14)}_{y} = 2$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = -51t - 8$$
$$y = -89t - 14$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 46 + 89x$ o el de y en $n = 48 - 51y$ obtenemos la solución

$$n = -4539t - 666 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -666 \equiv 3873 \pmod{4539}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 21. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 29 \pmod{31}$ y $n \equiv 1 \pmod{16}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 29 + 31x$ y que $n = 1 + 16y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$31x - 16y = 4$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 31 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 31 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 1 & 2 \\ -16 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-16(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -16 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -16 & -31 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -16 & -31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 31(-1) - 16(-2) &= 1 \\ 31(-16) - 16(-31) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 31(-4) - 16(-8) &= 4 \\ 31(-16t) - 16(-31t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$31\underbrace{(-16t-4)}_{x} - 16\underbrace{(-31t-8)}_{y} = 4$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -16t - 4 \\ y &= -31t - 8 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 29 + 31x$ o el de y en $n = 1 - 16y$ obtenemos la solución

$$n = -496t - 95 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -95 \equiv 401 \pmod{496}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 22. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 91 \pmod{460}$ y $n \equiv 97 \pmod{445}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 91 + 460x$ y que $n = 97 + 445y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$460x - 445y = 6$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 460 & 1 & 0 \\ -445 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 460 & 1 & 0 \\ -445 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 15 & 1 & 1 \\ -445 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+30(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 15 & 1 & 1 \\ 5 & 30 & 31 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -89 & -92 \\ 5 & 30 & 31 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & 30 & 31 \\ 0 & -89 & -92 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. ◊

Ejercicio 23. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 18 \pmod{279}$ y $n \equiv 10 \pmod{18}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 18 + 279x$ y que $n = 10 + 18y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$279x - 18y = 28$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 279 & 1 & 0 \\ -18 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 279 & 1 & 0 \\ -18 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+15(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 9 & 1 & 15 \\ -18 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 9 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 31 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 9. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. ◊

Ejercicio 24. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 6 \pmod{465}$ y $n \equiv 22 \pmod{70}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 6 + 465x$ y que $n = 22 + 70y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$465x - 70y = 16$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 465 & 1 & 0 \\ -70 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 465 & 1 & 0 \\ -70 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+7(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -25 & 1 & 7 \\ -70 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -25 & 1 & 7 \\ 5 & -3 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -14 & -93 \\ 5 & -3 & -20 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & -3 & -20 \\ 0 & -14 & -93 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. ◊

Ejercicio 25. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 36 \pmod{51}$ y $n \equiv 18 \pmod{23}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 36 + 51x$ y que $n = 18 + 23y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$51x - 23y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{c|cc} 51 & 1 & 0 \\ -23 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{c|cc} 51 & 1 & 0 \\ -23 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 1 & 2 \\ -23 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -9 & -20 \\ 2 & 5 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -9 & -20 \\ 0 & 23 & 51 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 23 & 51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 51 \\ -23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$51(-9) - 23(-20) = 1$$
$$51(23) - 23(51) = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$51(-45) - 23(-100) = 5$$
$$51(23t) - 23(51t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$51\underbrace{(23t - 45)}_{x} - 23\underbrace{(51t - 100)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 23t - 45$$
$$y = 51t - 100$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 36 + 51x$ o el de y en $n = 18 - 23y$ obtenemos la solución

$$n = 1173t - 2259 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -2259 \equiv 87 \pmod{1173}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 26. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 87 \pmod{126}$ y $n \equiv 97 \pmod{285}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 87 + 126x$ y que $n = 97 + 285y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$126x - 285y = 10$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 126 & 1 & 0 \\ -285 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 126 & 1 & 0 \\ -285 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 126 & 1 & 0 \\ -33 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -6 & 9 & 4 \\ -33 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-6(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -6 & 9 & 4 \\ 3 & -52 & -23 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -95 & -42 \\ 3 & -52 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 3 & -52 & -23 \\ 0 & -95 & -42 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 27. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 27 \pmod{185}$ y $n \equiv 33 \pmod{35}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 27 + 185x$ y que $n = 33 + 35y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$185x - 35y = 6$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 185 & 1 & 0 \\ -35 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 185 & 1 & 0 \\ -35 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 10 & 1 & 5 \\ -35 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 10 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -7 & -37 \\ 5 & 4 & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & 4 & 21 \\ 0 & -7 & -37 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 5. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 28. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 3 \pmod{70}$ y $n \equiv 31 \pmod{77}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 3 + 70x$ y que $n = 31 + 77y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$70x - 77y = 28$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 70 & 1 & 0 \\ -77 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 70 & 1 & 0 \\ -77 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 70 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+10(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 11 & 10 \\ -7 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -7 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & -1 & -1 \\ 0 & 11 & 10 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 7. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 11 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ -77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 70(-1) - 77(-1) &= 7 \\ 70(11) - 77(10) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 4 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 70(-4) - 77(-4) &= 28 \\ 70(11t) - 77(10t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$70\underbrace{(11t-4)}_{x} - 77\underbrace{(10t-4)}_{y} = 28$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 11t - 4 \\ y &= 10t - 4 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 3 + 70x$ o el de y en $n = 31 - 77y$ obtenemos la solución

$$n = 770t - 277 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -277 \equiv 493 \pmod{770}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 29. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 67 \pmod{513}$ y $n \equiv 104 \pmod{549}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 67 + 513x$ y que $n = 104 + 549y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$513x - 549y = 37$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 513 & 1 & 0 \\ -549 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 513 & 1 & 0 \\ -549 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 513 & 1 & 0 \\ -36 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+14(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 9 & 15 & 14 \\ -36 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 9 & 15 & 14 \\ 0 & 61 & 57 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 9. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 30. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 43 \pmod{45}$ y $n \equiv 45 \pmod{52}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 43 + 45x$ y que $n = 45 + 52y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$45x - 52y = 2$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 45 & 1 & 0 \\ -52 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 45 & 1 & 0 \\ -52 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 45 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+6(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 3 & 7 & 6 \\ -7 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 3 & 7 & 6 \\ -1 & 15 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 52 & 45 \\ -1 & 15 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 15 & 13 \\ 0 & 52 & 45 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -15 & -13 \\ 0 & 52 & 45 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -15 & -13 \\ 52 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 \\ -52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 45(-15) - 52(-13) &= 1 \\ 45(52) - 52(45) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 45(-30) - 52(-26) &= 2 \\ 45(52t) - 52(45t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$45\underbrace{(52t-30)}_{x} - 52\underbrace{(45t-26)}_{y} = 2$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 52t - 30 \\ y &= 45t - 26 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 43 + 45x$ o el de y en $n = 45 - 52y$ obtenemos la solución

$$n = 2340t - 1307 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -1307 \equiv 1033 \pmod{2340}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 31. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 10 \pmod{1235}$ y $n \equiv 63 \pmod{936}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 10 + 1235x$ y que $n = 63 + 936y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$1235x - 936y = 53$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{c|cc} 1235 & 1 & 0 \\ -936 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1235 & 1 & 0 \\ -936 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 299 & 1 & 1 \\ -936 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 299 & 1 & 1 \\ -39 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+8(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} -13 & 25 & 33 \\ -39 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} -13 & 25 & 33 \\ 0 & -72 & -95 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 13 & -25 & -33 \\ 0 & -72 & -95 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 13. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 32. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 71 \pmod{89}$ y $n \equiv 73 \pmod{96}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 71 + 89x$ y que $n = 73 + 96y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$89x - 96y = 2$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{c|cc} 89 & 1 & 0 \\ -96 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{c|cc} 89 & 1 & 0 \\ -96 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 89 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+13(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 14 & 13 \\ -7 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 14 & 13 \\ 1 & -55 & -51 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -96 & -89 \\ 1 & -55 & -51 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -55 & -51 \\ 0 & -96 & -89 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -55 & -51 \\ -96 & -89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 89 \\ -96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$89(-55) - 96(-51) = 1$$
$$89(-96) - 96(-89) = 0$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$89(-110) - 96(-102) = 2$$
$$89(-96t) - 96(-89t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$89\underbrace{(-96t-110)}_{x}-96\underbrace{(-89t-102)}_{y}=2$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= -96t-110 \\ y &= -89t-102 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n=71+89x$ o el de y en $n=73-96y$ obtenemos la solución

$$n=-8544t-9719 \quad t\in\mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n\equiv -9719\equiv 7369 \pmod{8544}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 33. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n\equiv 16 \pmod{17}$ y $n\equiv 5 \pmod{16}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n=16+17x$ y que $n=5+16y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$17x-16y=5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 17 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 17 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 1 \\ -16 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+16(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 17 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 \\ -16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 17(1)-16(1) &= 1 \\ 17(16)-16(17) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 17(5)-16(5) &= 5 \\ 17(16t)-16(17t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$17\underbrace{(16t+5)}_{x} - 16\underbrace{(17t+5)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 16t + 5$$
$$y = 17t + 5$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 16 + 17x$ o el de y en $n = 5 - 16y$ obtenemos la solución

$$n = 272t + 101 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 101 \pmod{272}.$$

$\lozenge$

Ejercicio 34. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 9 \pmod{10}$ y $n \equiv 11 \pmod{41}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 9 + 10x$ y que $n = 11 + 41y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$10x - 41y = 2$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 10 & 1 & 0 \\ -41 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 10 & 1 & 0 \\ -41 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 10 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+10(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 41 & 10 \\ -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 41 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 41 & 10 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 41 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$10(-4) - 41(-1) = 1$$
$$10(41) - 41(10) = 0$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$10(-8) - 41(-2) = 2$$
$$10(41t) - 41(10t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$10\underbrace{(41t-8)}_{x}-41\underbrace{(10t-2)}_{y}=2$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 41t - 8$$
$$y = 10t - 2$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 9 + 10x$ o el de y en $n = 11 - 41y$ obtenemos la solución

$$n = 410t - 71 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -71 \equiv 339 \pmod{410}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 35. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 7 \pmod{19}$ y $n \equiv 12 \pmod{14}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 7 + 19x$ y que $n = 12 + 14y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$19x - 14y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 19 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 19 & 1 & 0 \\ -14 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & 1 & 1 \\ -14 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -14 & -19 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -14 & -19 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -14 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$19(3) - 14(4) = 1$$
$$19(-14) - 14(-19) = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$19(15) - 14(20) = 5$$
$$19(-14t) - 14(-19t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$19\underbrace{(-14t+15)}_{x} - 14\underbrace{(-19t+20)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = -14t + 15$$
$$y = -19t + 20$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 7 + 19x$ o el de y en $n = 12 - 14y$ obtenemos la solución

$$n = -266t + 292 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 292 \equiv 26 \pmod{266}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 36. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 70 \pmod{123}$ y $n \equiv 77 \pmod{120}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 70 + 123x$ y que $n = 77 + 120y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$123x - 120y = 7$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 123 & 1 & 0 \\ -120 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 123 & 1 & 0 \\ -120 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 3 & 1 & 1 \\ -120 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+40(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 40 & 41 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 3. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$

Ejercicio 37. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 29 \pmod{649}$ y $n \equiv 85 \pmod{143}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 29 + 649x$ y que $n = 85 + 143y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$649x - 143y = 56$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 649 & 1 & 0 \\ -143 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 649 & 1 & 0 \\ -143 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -66 & 1 & 5 \\ -143 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -66 & 1 & 5 \\ -11 & -2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-6(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & 13 & 59 \\ -11 & -2 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -11 & -2 & -9 \\ 0 & 13 & 59 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 11 & 2 & 9 \\ 0 & 13 & 59 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 11. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. ♢

Ejercicio 38. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 13 \pmod{30}$ y $n \equiv 17 \pmod{34}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 13 + 30x$ y que $n = 17 + 34y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$30x - 34y = 4$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 30 & 1 & 0 \\ -34 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 30 & 1 & 0 \\ -34 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 30 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+7(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 2 & 8 & 7 \\ -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 2 & 8 & 7 \\ 0 & 17 & 15 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 2. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[\begin{array}{rr} 8 & 7 \\ 17 & 15 \end{array}\right] \left[\begin{array}{r} 30 \\ -34 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 2 \\ 0 \end{array}\right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 30(8) - 34(7) &= 2 \\ 30(17) - 34(15) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 30(16) - 34(14) &= 4 \\ 30(17t) - 34(15t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$30\underbrace{(17t+16)}_{x} - 34\underbrace{(15t+14)}_{y} = 4$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 17t + 16 \\ y &= 15t + 14 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 13 + 30x$ o el de y en $n = 17 - 34y$ obtenemos la solución

$$n = 510t + 493 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 493 \pmod{510}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 39. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 61 \pmod{595}$ y $n \equiv 75 \pmod{84}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 61 + 595x$ y que $n = 75 + 84y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$595x - 84y = 14$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{c|cc} 595 & 1 & 0 \\ -84 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{c|cc} 595 & 1 & 0 \\ -84 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+7(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 7 & 1 & 7 \\ -84 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+12(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 7 & 1 & 7 \\ 0 & 12 & 85 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 7. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 12 & 85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 595 \\ -84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$595(1) - 84(7) = 7$$
$$595(12) - 84(85) = 0$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$595(2) - 84(14) = 14$$
$$595(12t) - 84(85t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$595\underbrace{(12t + 2)}_{x} - 84\underbrace{(85t + 14)}_{y} = 14$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 12t + 2$$
$$y = 85t + 14$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 61 + 595x$ o el de y en $n = 75 - 84y$ obtenemos la solución

$$n = 7140t + 1251 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 1251 \pmod{7140}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 40. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 5 \pmod{47}$ y $n \equiv 7 \pmod{20}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 5 + 47x$ y que $n = 7 + 20y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$47x - 20y = 2$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 47 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 47 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & 1 & 2 \\ -20 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-7(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -20 & -47 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -20 & -47 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\left[\begin{array}{rr} 3 & 7 \\ -20 & -47 \end{array}\right] \left[\begin{array}{r} 47 \\ -20 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \end{array}\right],$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$47(3) - 20(7) = 1$$
$$47(-20) - 20(-47) = 0$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$47(6) - 20(14) = 2$$
$$47(-20t) - 20(-47t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$47\underbrace{(-20t + 6)}_{x} - 20\underbrace{(-47t + 14)}_{y} = 2$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = -20t + 6$$
$$y = -47t + 14$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 5 + 47x$ o el de y en $n = 7 - 20y$ obtenemos la solución

$$n = -940t + 287 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 287 \pmod{940}.$$

◊

Ejercicio 41. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 11 \pmod{63}$ y $n \equiv 16 \pmod{53}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 11 + 63x$ y que $n = 16 + 53y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$63x - 53y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 63 & 1 & 0 \\ -53 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 63 & 1 & 0 \\ -53 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 10 & 1 & 1 \\ -53 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 10 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 16 & 19 \\ -3 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 16 & 19 \\ 0 & 53 & 63 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 16 & 19 \\ 53 & 63 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 63 \\ -53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$63(16) - 53(19) = 1$$
$$63(53) - 53(63) = 0$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$63(80) - 53(95) = 5$$
$$63(53t) - 53(63t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$63\underbrace{(53t + 80)}_{x} - 53\underbrace{(63t + 95)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = 53t + 80$$
$$y = 63t + 95$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 11 + 63x$ o el de y en $n = 16 - 53y$ obtenemos la solución

$$n = 3339t + 5051 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 5051 \equiv 1712 \pmod{3339}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 42. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 37 \pmod{38}$ y $n \equiv 40 \pmod{41}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 37 + 38x$ y que $n = 40 + 41y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$38x - 41y = 3$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 38 & 1 & 0 \\ -41 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 38 & 1 & 0 \\ -41 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 38 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+13(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 14 & 13 \\ -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 14 & 13 \\ 0 & -41 & -38 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -14 & -13 \\ 0 & -41 & -38 \end{array}\right]$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -14 & -13 \\ -41 & -38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ -41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$38(-14) - 41(-13) = 1$$
$$38(-41) - 41(-38) = 0$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$38(-42) - 41(-39) = 3$$
$$38(-41t) - 41(-38t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$38\underbrace{(-41t - 42)}_{x} - 41\underbrace{(-38t - 39)}_{y} = 3$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = -41t - 42$$
$$y = -38t - 39$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 37 + 38x$ o el de y en $n = 40 - 41y$ obtenemos la solución

$$n = -1558t - 1559 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -1559 \equiv 1557 \pmod{1558}.$$

◊

Ejercicio 43. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 36 \pmod{73}$ y $n \equiv 41 \pmod{85}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 36 + 73x$ y que $n = 41 + 85y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$73x - 85y = 5$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 73 & 1 & 0 \\ -85 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 73 & 1 & 0 \\ -85 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 73 & 1 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+6(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 7 & 6 \\ -12 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+12(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & 7 & 6 \\ 0 & 85 & 73 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 85 & 73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 73 \\ -85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 73(7) - 85(6) &= 1 \\ 73(85) - 85(73) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 5 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 73(35) - 85(30) &= 5 \\ 73(85t) - 85(73t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$73\underbrace{(85t + 35)}_{x} - 85\underbrace{(73t + 30)}_{y} = 5$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 85t + 35 \\ y &= 73t + 30 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 36 + 73x$ o el de y en $n = 41 - 85y$ obtenemos la solución

$$n = 6205t + 2591 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv 2591 \pmod{6205}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 44. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 51 \pmod{87}$ y $n \equiv 5 \pmod{47}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 51 + 87x$ y que $n = 5 + 47y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$87x - 47y = 1$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 87 & 1 & 0 \\ -47 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 87 & 1 & 0 \\ -47 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -7 & 1 & 2 \\ -47 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-7(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -7 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -27 & -50 \\ 2 & -7 & -13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -27 & -50 \\ 0 & 47 & 87 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -27 & -50 \\ 47 & 87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 87 \\ -47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$\begin{aligned} 87(-27) - 47(-50) &= 1 \\ 87(47) - 47(87) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la primera por 1 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$\begin{aligned} 87(-27) - 47(-50) &= 1 \\ 87(47t) - 47(87t) &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$87\underbrace{(47t - 27)}_{x} - 47\underbrace{(87t - 50)}_{y} = 1$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$\begin{aligned} x &= 47t - 27 \\ y &= 87t - 50 \end{aligned}$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 51 + 87x$ o el de y en $n = 5 - 47y$ obtenemos la solución

$$n = 4089t - 2298 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -2298 \equiv 1791 \pmod{4089}.$$

◊

Ejercicio 45. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 97 \pmod{623}$ y $n \equiv 126 \pmod{539}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 97 + 623x$ y que $n = 126 + 539y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$623x - 539y = 29$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 623 & 1 & 0 \\ -539 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 623 & 1 & 0 \\ -539 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 84 & 1 & 1 \\ -539 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+6(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 84 & 1 & 1 \\ -35 & 6 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 14 & 13 & 15 \\ -35 & 6 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 14 & 13 & 15 \\ 7 & 45 & 52 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -77 & -89 \\ 7 & 45 & 52 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & 45 & 52 \\ 0 & -77 & -89 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 7. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. ◊

Ejercicio 46. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 64 \pmod{441}$ y $n \equiv 93 \pmod{532}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 64 + 441x$ y que $n = 93 + 532y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$441x - 532y = 29$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 441 & 1 & 0 \\ -532 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 441 & 1 & 0 \\ -532 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 441 & 1 & 0 \\ -91 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -14 & 6 & 5 \\ -91 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-7(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -14 & 6 & 5 \\ 7 & -41 & -34 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -76 & -63 \\ 7 & -41 & -34 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & -41 & -34 \\ 0 & -76 & -63 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 7. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. ◊

Ejercicio 47. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 30 \pmod{209}$ y $n \equiv 53 \pmod{154}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 30 + 209x$ y que $n = 53 + 154y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$209x - 154y = 23$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 209 & 1 & 0 \\ -154 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 209 & 1 & 0 \\ -154 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 55 & 1 & 1 \\ -154 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 55 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -14 & -19 \\ 11 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 11 & 3 & 4 \\ 0 & -14 & -19 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 11. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. ◊

Ejercicio 48. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 28 \pmod{33}$ y $n \equiv 31 \pmod{61}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 28 + 33x$ y que $n = 31 + 61y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$33x - 61y = 3$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 33 & 1 & 0 \\ -61 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 33 & 1 & 0 \\ -61 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 33 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-7(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -2 & -13 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -2 & -13 & -7 \\ 1 & -24 & -13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -61 & -33 \\ 1 & -24 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -24 & -13 \\ 0 & -61 & -33 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -24 & -13 \\ -61 & -33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ -61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$33(-24) - 61(-13) = 1$$
$$33(-61) - 61(-33) = 0$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$33(-72) - 61(-39) = 3$$
$$33(-61t) - 61(-33t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$33\underbrace{(-61t - 72)}_{x} - 61\underbrace{(-33t - 39)}_{y} = 3$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = -61t - 72$$
$$y = -33t - 39$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 28 + 33x$ o el de y en $n = 31 - 61y$ obtenemos la solución

$$n = -2013t - 2348 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -2348 \equiv 1678 \pmod{2013}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 49. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 37 \pmod{61}$ y $n \equiv 39 \pmod{70}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 37 + 61x$ y que $n = 39 + 70y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$61x - 70y = 2$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 61 & 1 & 0 \\ -70 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 61 & 1 & 0 \\ -70 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 61 & 1 & 0 \\ -9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+7(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -2 & 8 & 7 \\ -9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-5(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} -2 & 8 & 7 \\ 1 & -39 & -34 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 0 & -70 & -61 \\ 1 & -39 & -34 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 1 & -39 & -34 \\ 0 & -70 & -61 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 1. La relación fundamental del proceso de reducción por filas nos dice que

$$\begin{bmatrix} -39 & -34 \\ -70 & -61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 \\ -70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

De ahí obtenemos las dos relaciones:

$$61(-39) - 70(-34) = 1$$
$$61(-70) - 70(-61) = 0$$

Multiplicando la primera por 2 y la segunda por un t entero cualquiera obtenemos:

$$61(-78) - 70(-68) = 2$$
$$61(-70t) - 70(-61t) = 0$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que

$$61\underbrace{(-70t - 78)}_{x} - 70\underbrace{(-61t - 68)}_{y} = 2$$

Y las soluciones de la ecuación diofántica son las siguientes, donde t es un número entero cualquiera

$$x = -70t - 78$$
$$y = -61t - 68$$

Si sustituimos el valor de x en la relación $n = 37 + 61x$ o el de y en $n = 39 - 70y$ obtenemos la solución

$$n = -4270t - 4721 \quad t \in \mathbb{Z}$$

o lo que es lo mismo

$$n \equiv -4721 \equiv 3819 \pmod{4270}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 50. *Encuentra, si existen, todos los valores n enteros tales que $n \equiv 89 \pmod{91}$ y $n \equiv 97 \pmod{476}$.*

Solución: Las relaciones de congruencia planteadas nos dicen que $n = 89 + 91x$ y que $n = 97 + 476y$ para algunos valores enteros x e y. Igualando ambas ecuaciones y agrupando los términos, llegamos a la siguiente ecuación diofántica que relaciona x e y

$$91x - 476y = 8$$

Para resolverla, vamos a reducir la matriz $\left[\begin{array}{r|rr} 91 & 1 & 0 \\ -476 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para calcular el máximo común divisor extendido de los coeficientes.

$$\left[\begin{array}{r|rr} 91 & 1 & 0 \\ -476 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 91 & 1 & 0 \\ -21 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & 21 & 4 \\ -21 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rr} 7 & 21 & 4 \\ 0 & 68 & 13 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción vemos que el máximo común divisor es 7. Como el máximo común divisor de los coeficientes no divide al término independiente, la ecuación no puede tener soluciones enteras y por lo tanto, no existe ningún valor n que satisfaga estas relaciones. $\Diamond$