Vídeo : `https://youtu.be/rj1ih0BVUsg`

1. Resumen

En este curso vamos a hacer una definición de espacio vectorial basado en matrices columna. Existen definiciones más generales, pero en realidad todas acaban siendo equivalentes a la que vamos a presentar aquí.

Definición 1. *Denotaremos por K^m al conjunto de las matrices columna de m componentes sobre el cuerpo K, es decir, $K^m = \mathbf{M}_{m\times 1}(K)$. A los elementos de K^m los llamaremos* **vectores***.*

Definición 2. *Un subconjunto no vacío V de K^m se llamará* **espacio vectorial** *si cumple las siguientes propiedades:*

1. *Si $u, v \in V$ entonces $u + v \in V$.*
2. *Si $c \in K$ y $v \in V$, entonces $cv \in V$.*

Para indicar que V no solo es un subconjunto de K^m sino que también es un espacio vectorial, utilizaremos la notación $V \leq K^m$. Cuando queramos indicar el número de componentes que tienen los vectores de V como columnas, diremos que V es subespacio de K^m.

Aunque K^m pueda ser muy grande, un subespacio puede ser pequeño, por ejemplo, el espacio $\{0\}$ que únicamente tiene al vector $0 \in K^m$ es un espacio vectorial, ya que cumple todas las condiciones:

0. $\{0\}$ es no vacío porque contiene al vector 0.
1. Si u y v están en $\{0\}$, entonces $u = v = 0$ y su suma, $u + v = 0 + 0 = 0$ está en $\{0\}$.
2. Si $c \in K$ y $v \in \{0\}$, entonces $v = 0$ y $cv = c0 = 0$, que es un vector del espacio $\{0\}$.

El espacio $\{0\}$ lo representaremos muchas veces simplemente como 0 y lo llamaremos espacio cero.
Este es el espacio más pequeño posible, porque cualquier otro tiene que contener al vector 0.

Proposición 3. *Sea V un espacio vectorial, entonces el vector 0 está en V.*

Demostración. Como V es no vacío, tiene que contener al menos un vector, llamémoslo v. Pero como 0 es un elemento de K, el elemento $0 = 0v$ tiene que estar en el espacio vectorial por la condición (2). Por lo tanto V tiene que contener a 0. □

Esta condición tan simple nos demuestra que muchos subconjuntos de vectores no son espacios vectoriales. *Cualquier conjunto que no contenga el 0 no puede ser espacio vectorial.*

Definición 4. *Sean $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vectores de K^m y sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ elementos de K. Llamaremos combinación lineal de los v_i con coeficientes x_i a la expresión*

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n.$$

Si los vectores v_i están dentro de un espacio vectorial V, por la condición (2) sabemos que los vectores x_iv_i también están en V y por la condición (1), la suma de todos ellos, $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ también estará en V. Es decir, cualquier combinación lineal de vectores de un espacio vectorial V, está dentro de V.
Para escribir combinaciones lineales, podemos hacerlo de dos formas, de forma vectorial o de forma matricial:

- Forma vectorial: Supongamos que tenemos dos vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y coeficientes $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. La combinación lineal en forma vectorial de v_1 y v_2 con coeficientes x_1 y x_2 es

$$x_1v_1 + x_2v_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{bmatrix}.$$

- Forma matricial: Cuando tengamos los vectores v_i como columnas de una matriz, entonces escribiremos las combinaciones lineales multiplicando dicha matriz por la columna de los coeficientes. Tomando por ejemplo los mismos vectores y coeficientes que en el ejemplo anterior, entonces podemos escribir la combinación poniendo los vectores v_1 y v_2 como columnas en una matriz y multiplicando por los coeficientes $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, es decir,

$$x_1v_1 + x_2v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix}.$$

Las combinaciones lineales de vectores serán algo muy habitual, y las escribiremos de forma vectorial o de forma matricial dependiendo de lo que más nos interese en cada momento. Es importante que reconozcamos los dos modos de escribirlas y pasemos de uno a otro de forma inmediata,

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \vdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 5. *Vamos a ver una serie de conjuntos que son espacios vectoriales y otros que no.*

1. *El conjunto K^m y el conjunto $\{0\}$ son siempre espacios vectoriales.*
2. *Una circunferencia o una recta que no pasa por el origen no pueden ser espacios vectoriales porque no contienen al* 0.
3. *Un círculo no puede ser un espacio vectorial porque si tomamos cualquier vector dentro del círculo, multiplicando por una constante adecuada nos daría un vector fuera del círculo, lo cual es imposible.*
4. *Un semiplano tampoco es un espacio vectorial porque si v es un vector del semiplano $-v$ está fuera del semiplano y eso no puede pasar en los espacios vectoriales.*
5. *La unión de dos rectas distintas no es un espacio vectorial, porque si sumamos un vector de una recta con otro de otra recta, obtenemos un vector fuera de la unión de ambas.*
6. *Si U y V son espacios vectoriales contenidos en K^m, entonces la intersección de ambos conjuntos, $U \cap V$ definida como los vectores que están en ambos conjuntos al mismo tiempo, es un espacio vectorial.*
7. *Si U y V son espacios vectoriales contenidos en K^m, llamaremos suma de los espacios, $U + V$ al conjunto de todos los vectores de K^m que se pueden poner como suma de un vector de U y un vector de V cualesquiera. Esta suma $U + V$ también es un espacio vectorial.*

1.1. Representación del espacio en forma paramétrica.

Una forma de representar los vectores de un espacio es como combinación lineal de unos vectores generadores.

Definición 6. *Sea $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y sean $v_1, v_2, \cdots, v_n$ las columnas de A que serán vectores de K^m. Llamaremos* **espacio generado por los vectores** *v_i, y lo denotaremos por $\langle v_1, v_2, \cdots, v_n\rangle$ al conjunto de todos los vectores que se pueden poner como combinación lineal de los vectores v_i. Cuando hablemos de la matriz A, también nos referiremos a este conjunto como* **espacio generado por las columnas de** *A y lo denotaremos $C(A)$.*

Proposición 7. *El espacio generado por las columnas de una matriz A es un espacio vectorial.*

Demostración. Sean $v_1, v_2, \cdots, v_n$ las columnas de A. Vamos a ver que se cumplen las dos propiedades de espacio vectorial:

1. $(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) + (y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n) = (x_1 + y_1)v_1 + (x_2 + y_2)v_2 + \cdots + (x_n + y_n)v_n$.
2. $c(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = cx_1v_1 + cx_2v_2 + \cdots + cx_nv_n$.

Ambas propiedades se deducen inmediatamente de las propiedades de las matrices. □

Ejemplo 8. *Sea $V = C(A)$ siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,3}(\mathbb{Z}_5)$, los vectores de V quedan totalmente determinados por las columnas de A de todas estas formas equivalentes:*

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \ \textit{tal que} \ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \ \textit{para algunos } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \ \textit{tal que} \ \begin{array}{c} y_1 = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ y_3 = 4x_1 + x_2 \\ y_4 = x_1 + x_2 \\ y_5 = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{array} \ \textit{para algunos } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \ \textit{tal que} \ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ \textit{para algún} \ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^3 \right\}$$

Una representación de este tipo usando parámetros libres para describir todos los vectores del espacio se llamará **representación paramétrica del espacio** V.

1.2. Representación del espacio en forma implícita.

Otra forma de representar un espacio vectorial es como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo. Por ejemplo

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema de ecuaciones tiene que ser homogéneo porque el vector 0 siempre tiene que estar en el espacio vectorial. Este espacio también se puede escribir como

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Cuando esté dado de esta forma matricial, lo llamaremos espacio anulador por la derecha de la matriz.

Definición 9. *Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ sobre K. Llamaremos* **espacio anulador por la derecha de** *A al conjunto $N(A)$ formado por los vectores x tales que $Ax = 0$ (es decir, las soluciones del sistema homogéneo que tiene a A como matriz de los coeficientes).*

Proposición 10. *El espacio anulador por la derecha de una matriz A es un espacio vectorial.*

Demostración. Vamos a comprobar que se cumplen las condiciones de espacio vectorial:

0. Es no vacío porque el sistema no puede ser incompatible, ya que tomando todos los $x_i = 0$, tenemos $0 = 0$ y por lo tanto el vector 0 pertenece al espacio.

1. Si $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ son elementos de $N(A)$, entonces $A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto

$$A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es un elemento de $N(A)$ y $c \in K$, entonces $A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Por lo tanto

$$Ac\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = cA\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

□

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

En este tema es importante tener claros qué conjuntos son espacios vectoriales y qué conjuntos no lo son. Todos los espacios vectoriales de una forma o de otra se pueden poner como espacios generados por las columnas de una matriz o como espacio anulador por la derecha de una matriz, así que cualquier problema que se ponga de este tipo requerirá un primer análisis en el que veamos si parece que se cumplen las propiedades y en caso de que aparentemente se cumplan, una segunda parte en la que deberíamos poner el conjunto como espacio anulador o como espacio generado por vectores.