Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Inversas e Inversas Parciales	Clase: 40 min.

Vídeo : `https://youtu.be/PlD7TlrsJJ8`

1. Resumen

En el caso de las matrices cuadradas, la existencia de inversa por un lado implica la existencia de inversa por el otro lado. El teorema es el siguiente:

Teorema 1. *Sea B una matriz cuadrada para la cual existe A tal que $AB = I$, entonces también se cumple que $BA = I$ y A es la inversa de B, es decir, $A = B^{-1}$.*

Para calcular la inversa de una matriz cuadrada B, procederemos de la siguiente forma, reduciremos la matriz ampliada $[B|I]$ hasta obtener la matriz reducida por filas R y la matriz de paso P, $[B|I] \to [R|P]$. El teorema fundamental de la reducción por filas nos dice que $PB = R$. Pueden suceder dos cosas:

1. Que la matriz reducida por filas R sea la matriz identidad. En tal caso $PB = I$ y P es la matriz inversa de B.
2. Que la matriz reducida por filas R no sea la matriz identidad. En tal caso B no sería una matriz invertible, no tendría inversa.

En el caso de matrices no cuadradas, el problema no es tan sencillo. Dada una matriz B no cuadrada, se pueden dar las siguientes posibilidades:

1. Que la matriz no tenga inversa por ninguno de los dos lados, por ejemplo la matriz 0 de cualquier tamaño nunca podrá tener inversa por ningún lado.
2. Que la matriz tenga inversa por la izquierda. En ese caso la matriz tendrá un número de filas mayor que el de columnas y tendrá múltiples inversas por la izquierda. Para calcularlas ampliaremos la matriz B con la matriz identidad y reduciremos por filas, si al reducir obtenemos

$$\left[\begin{array}{c|c} B & I \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & H \end{array}\right]$$

   En ese caso las inversas laterales por la izquierda serán de la forma $A + CH$ donde C es una matriz de parámetros. Si la reducción no nos da $\left[\begin{array}{c} I \\ \hline 0 \end{array}\right]$ como reducida de B (es decir, el número de pivotes no coincide con el número de columnas) y B tiene más filas que columnas, entonces estaremos en el caso (1), B no tendrá inversas laterales.
3. Que la matriz tenga inversa por la derecha. En ese caso podremos calcular sus inversas por la derecha utilizando la matriz traspuesta y aplicando el caso (2).

Lo que nunca podrá ocurrir es que tenga inversas por los dos lados siendo una matriz no cuadrada.
En la sección de ejercicios se plantearán múltiples ejemplos para ilustrar el método de cálculo de las matrices inversas laterales.

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

En la siguiente lista de problemas, se plantean 50 ejercicios de cálculo de inversas e inversas laterales por ambos lados. Los primeros 20 serán sobre $\mathbb{R}$, los 20 siguientes sobre $\mathbb{Z}_5$ y los 10 últimos sobre $\mathbb{Z}_3$. Como en ocasiones anteriores, se plantean más ejercicios de los necearios para que elijamos aleatoriamente algunos de ellos hasta que se entienda el proceso.

Ejercicio 2. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \\ -4 & -4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, esta matriz no tiene inversas laterales. $\Diamond$

Ejercicio 3. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-7(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} -4 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{R}$. ♢

Ejercicio 4. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -9 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{9}{2}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

♢

Ejercicio 5. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 6. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 8 & 9 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 13 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 13 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-6(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} -7 & 25 & -4 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -6 & 1 \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 7. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{rrr} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\left[\begin{array}{ccc} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}\right]$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{R}$. ◊

Ejercicio 8. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -7 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & -7 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

◊

Ejercicio 9. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$
.

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{R}$. ◊

Ejercicio 10. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-5(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{23}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{23}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{23}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{4}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -9 & -13 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -9 & -13 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 23 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -13 & 3 \\ 16 & 23 & -5 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Diamond$

Ejercicio 11. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -4 & -7 & -5 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -4 & -7 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -\frac{31}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{31}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{6(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{31}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{31}{6}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -10 & 31 \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{11}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -10 & 31 \\ 0 & 1 & 0 & 19 & 7 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 6 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -27 & -10 & 31 \\ 19 & 7 & -22 \\ -5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Diamond$

Ejercicio 12. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-9(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{1}{3}(3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ \hline -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{R}$. $\lozenge$

Ejercicio 13. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{R}$. $\Diamond$

Ejercicio 14. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -2 \\ 5 & -5 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -9 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 35 & -18 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 35 & -18 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -5 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 35 & -18 & 4 \\ 17 & -9 & 2 \\ 10 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Diamond$

Ejercicio 15. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, esta matriz no tiene inversas laterales. $\Diamond$

Ejercicio 16. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 0 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 0 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{cccc} 5 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\left[\begin{array}{cccc} 5 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\left[\begin{array}{cccc} 5 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\left[\begin{array}{cccc} 5 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{R}$. $\Diamond$

Ejercicio 17. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 18. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -3 & -3 \\ 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, esta matriz no tiene inversas laterales. $\Diamond$

Ejercicio 19. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{rr} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{4}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 20. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right].$$

La matriz no es invertible. $\Diamond$

Ejercicio 21. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{R})$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-9(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la matriz traspuesta no tiene inversas laterales y por lo tanto la matriz original tampoco las tiene. ♢

Ejercicio 22. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. ◊

Ejercicio 23. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. ◊

Ejercicio 24. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

◊

Ejercicio 25. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. ◊

Ejercicio 26. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}\right]$$

◊

Ejercicio 27. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la matriz traspuesta no tiene inversas laterales y por lo tanto la matriz original tampoco las tiene. $\Diamond$

Ejercicio 28. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Diamond$

Ejercicio 29. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la matriz traspuesta no tiene inversas laterales y por lo tanto la matriz original tampoco las tiene. ♢

Ejercicio 30. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. ♢

Ejercicio 31. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

♢

Ejercicio 32. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{array}\right]$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. $\Diamond$

Ejercicio 33. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hline 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. $\Diamond$

Ejercicio 34. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la matriz traspuesta no tiene inversas laterales y por lo tanto la matriz original tampoco las tiene. $\Diamond$

Ejercicio 35. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. ◊

Ejercicio 36. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
.

La matriz no es invertible. ◊

Ejercicio 37. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$
.

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. ◊

Ejercicio 38. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la matriz traspuesta no tiene inversas laterales y por lo tanto la matriz original tampoco las tiene. ◊

Ejercicio 39. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz no es invertible. ◊

Ejercicio 40. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$. ◊

Ejercicio 41. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

◊

Ejercicio 42. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. ◊

Ejercicio 43. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de columnas es mayor al de filas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la derecha. Para calcularlas, reducimos la matriz traspuesta ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right]$$

que, tomando traspuestas para escribirlo en términos de la matriz original nos da

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la derecha, $\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}\right]$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. $\Diamond$

Ejercicio 44. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\Diamond$

Ejercicio 45. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. ◊

Ejercicio 46. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. $\Diamond$

Ejercicio 47. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. ♢

Ejercicio 48. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz no es invertible. ♢

Ejercicio 49. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. ♢

Ejercicio 50. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es mayor al de columnas, la matriz solo podría tener inversas laterales por la izquierda. Para calcularlas, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La reducción nos da la relación

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eso nos da una posible inversa lateral por la izquierda, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, pero para sacarlas todas añadimos las combinaciones que nos dan 0, con lo que todas las soluciones son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los c_i son parámetros libres en el cuerpo $\mathbb{Z}_3$. ♢

Ejercicio 51. *Determina si la siguiente matriz tiene inversas laterales y calcúlalas en caso de existir,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Como el número de filas es igual al de columnas, si la matriz tiene una inversa por un lado, esa inversa lo es por los dos lados. Para calcularla, reducimos la matriz ampliada con la identidad:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz no es invertible. ◊