Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
Facultad Informática Universidad Murcia	**Álgebra y Matemática Discreta**	Previo: 60 min.
	Conjuntos Linealmente Independientes y Generadores	Clase: 60 min.

Vídeo : `https://youtu.be/0FYNnfe-YTI`

1. Resumen

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ sobre un cuerpo K. Las columnas de la matriz A serán los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Hemos definido dos espacios:

1. El especio generado por las columnas de A, $C(A)$, que estará formado por vectores de m componentes. Dicho de otro modo, $0 \leq C(A) \leq K^m$.
2. El anulador por la derecha de A, $N(A)$, que estará formado por los $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ tales que $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Para poder multiplicar A por el vector x, el número de columnas de A (que es n) tiene que ser igual al número de filas de x. Por eso, $0 \leq N(A) \leq K^n$.

Vamos a considerar los casos extremos:

Proposición 1. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $N(A) = K^n$ *(todos los vectores anulan a la matriz A)*
2. $A = 0$
3. $C(A) = 0$ *(el único vector que se puede poner como combinación de las columnas de A es el vector 0)*

El otro caso extremo nos lleva a las siguientes definiciones:

Definición 2. *Diremos que las columnas de A son un conjunto de* **vectores linealmente independientes** *si $N(A) = 0$.*

Si lo ponemos en términos de vectores, teniendo en cuenta que

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \vdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

podemos deducir que $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in N(A)$ si y solo si $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$ y por lo tanto, las siguietnes condiciones son equivalentes:

1. Los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son linealmente independientes.
2. El anulador de la matriz que tiene estos vectores como columnas es 0.
3. Una combinación lineal de estos vectores es igual a 0, $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$, si y solo si todos los coeficientes son 0, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

El otro caso extremo es el siguiente:

Definición 3. *Diremos que las columnas de A son* **generadoras de** K^m *si $C(A) = K^m$, es decir, todos los vectores de K^m se pueden poner como combinación lineal de las columnas de A.*

Si ponemos eso en términos de los vectores, diremos que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son generadores de K^m si para cualquier vector $v \in K^m$ podemos encontrar valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tales que $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$.

Para estudiar si las columnas de una matriz son linealmente independientes o generadoras vamos a empezar estudiando el caso de las matrices reducidas por filas:

Teorema 4. *Sea R una matriz reducida por filas, entonces:*

1. *Las columnas de R son generadoras si y sólo si el número de pivotes coincide con el número de filas.*
2. *Las columnas de R son linealmente independientes si y sólo si el número de pivotes coincide con el número de columnas.*

Para estudiar cualquier otra matriz lo que haremos es reducirla por filas porque las operaciones elementales no alteran estas propiedades:

Teorema 5. *Sea A una matriz y E una operación elemental por filas. Entonces*

1. *Las columnas de A son generadoras si y solo si las columnas de EA son generadoras.*
2. *Las columnas de A son linealmente independientes si y solo si las columnas de EA son linealmente independientes.*

Uniendo estos dos teoremas, llegamos al resultado fundamental, para el cual daremos antes una definición:

Definición 6. *Sea A una matriz. Llamaremos* **rango de** *A al número de pivotes que tiene su reducida por filas.*

Teorema 7. *Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ sobre K y sea r el rango de A, entonces tenemos que:*

1. *Las columnas de A son generadoras de K^m si y solo si $r = m$.*
2. *Las columnas de A son linealmente independientes si y solo si $r = n$.*
3. *Las columnas de A son linealmente independientes y generadoras si y solo si $m = n = r$. En este caso diremos que las columnas forman una base, pero esto lo estudiaremos más adelante.*

El hecho de que las columnas de una matriz sean linealmente independientes o generadoras está ligado a la existencia de inversas laterales. Las columnas de A son linealmente independientes si y solo si la reducida por filas es $\left[\frac{I}{0}\right]$, pero esa es precisamente la condición necesaria y suficiente para que A tenga una inversa lateral por la izquierda. Entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 8. *Sea A una matriz. Entonces:*

1. *Las columnas de A son generadoras si y solo si A tiene una inversa lateral por la derecha.*
2. *Las columnas de A son linealmente independientes si y solo si A tiene una inversa lateral por la izquierda.*
3. *Las columnas de A son una base si y solo si la matriz A es invertible.*

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

A continuación se presentan 50 ejercicios para deducir si unos vectores son linealmente independientes, generadores, base o ninguna de esas cosas sobre diferentes cuerpos. Los 20 primeros ejercicios serán sobre $\mathbb{R}$, los 20 siguientes sobre $\mathbb{Z}_5$ y los 10 últimos sobre $\mathbb{Z}_3$. Estos problemas se pueden hacer realizando la reducida completa de la matriz, pero como únicamente necesitaremos saber dónde están los pivotes, podemos simplificar los cálculos buscando una matriz triangular en lugar de la reducida completa.

Las diferencias fundamentales entre el proceso de triangularización y el de reducción completa por filas son (1) que intercambiaremos filas para seleccionar los pivotes más adecuados, (2) que no normalizaremos el pivote convirtiéndolo en 1 y (3) que no haremos ceros encima de los pivotes.

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ sobre K. Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$

1. Miramos el primer elemento no nulo de todas las filas $i, i+1, i+2, \cdots, m$. Aquella de estas filas que tenga el primer elemento no nulo más a la izquierda, la intercambiaremos con la fila i. En caso de tener varias posibles filas en las mismas condiciones, tomaremos la que tenga el pivote más simple (por ejemplo un 1 o un -1).

2. Hacemos ceros debajo del pivote con operaciones elementales del segundo tipo. Así por ejemplo si el pivote vale λ en la fila p y tenemos que eliminar un valor μ en la fila q, haremos la operación $E_{(q)-\mu\lambda^{-1}(p)}$.

3. Si $i = n$ o todas las filas debajo de la fila i son nulas, hemos terminado. Si no, volvemos al paso (1) incrementando el valor de i.

Por ejemplo, vamos a triangularizar la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ sobre los números reales y vamos a compararlo con el proceso de reducción completa que hacíamos hasta ahora:

La reducción completa requeriría 8 pasos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \frac{7}{4} \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \frac{7}{4} \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & -4 & -4 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{-\frac{1}{4}(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

La triangularización la obtendríamos en 3 pasos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

El algoritmo de triangularización se conoce también en algunos textos como algoritmo de reducción por filas y la matriz triangular obtenida es la reducida por filas. En esos casos, se distingue una de otra porque una es la reducida y otra la reducida completa.

Este algoritmo nos permite identificar los pivotes, porque aunque no valgan 1, sabemos en qué posición quedarían si se terminara el proceso de reducción, en este caso estarían en las posiciones $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,4)$ tal y como habíamos visto en la matriz reducida completa.

Ejercicio 9. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^4$. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. Como el conjunto es linealmente y generador de $\mathbb{R}^4$ son base de $\mathbb{R}^4$. ♢

Ejercicio 10. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 & -9 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 & -9 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. ♢

Ejercicio 11. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -4 & -2 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ -4 & -2 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & -27 \\ 2 & 2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & -27 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & -41 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+\frac{2}{9}(3)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & -41 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^4$. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. Como el conjunto es linealmente y generador de $\mathbb{R}^4$ son base de $\mathbb{R}^4$. $\Diamond$

Ejercicio 12. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. $\Diamond$

Ejercicio 13. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 14. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & -9 & -5 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & -9 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -9 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. $\Diamond$

Ejercicio 15. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -8 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -8 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -8 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -23 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -23 \\ 0 & 9 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+6(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -31 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+9(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-5(3)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 16. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. $\Diamond$

Ejercicio 17. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 18. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 19. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & -7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & -7 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^4$. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. Como el conjunto es linealmente y generador de $\mathbb{R}^4$ son base de $\mathbb{R}^4$. ♢

Ejercicio 20. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 21. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -9 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{11}(3)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 22. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & -7 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & -7 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. $\Diamond$

Ejercicio 23. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -3 \\ -4 & -9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -3 \\ -4 & -9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 3 \\ -4 & -9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{2}(1)}} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{6}(2)}} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 24. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -7 & -9 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -7 & -9 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,4)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & -7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^4$. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. Como el conjunto es linealmente y generador de $\mathbb{R}^4$ son base de $\mathbb{R}^4$. ♢

Ejercicio 25. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 5 \\ -3 & 1 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -5 & -19 & -10 \\ -4 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -5 & -19 & -10 \\ 0 & -6 & -23 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{6}{5}(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -5 & -19 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. ♢

Ejercicio 26. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & 5 \\ -5 & 7 & 5 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & 5 & 5 \\ -5 & 7 & 5 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -5 & 7 & 5 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 27. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 2 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 2 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 28. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{R}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{R}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 29. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{Z}_5{}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de $\mathbb{Z}_5{}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. ♢

Ejercicio 30. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* $\mathbb{Z}_5{}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador $\mathbb{Z}_5{}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente. Ya sabíamos que no era base por no ser generador, pero no ser linealmente independiente es una razón adicional para impedir que sean base. ♢

Ejercicio 31. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ◊

Ejercicio 32. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ◊

Ejercicio 33. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 34. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 35. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de ${\mathbb{Z}_5}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. $\Diamond$

Ejercicio 36. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ◊

Ejercicio 37. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ◊

Ejercicio 38. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente. Ya sabíamos que no era base por no ser generador, pero no ser linealmente independiente es una razón adicional para impedir que sean base. ◊

Ejercicio 39. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de ${\mathbb{Z}_5}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. $\Diamond$

Ejercicio 40. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 41. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 42. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de ${\mathbb{Z}_5}^4$. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. Como el conjunto es linealmente y generador de ${\mathbb{Z}_5}^4$ son base de ${\mathbb{Z}_5}^4$. ♢

Ejercicio 43. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente. Ya sabíamos que no era base por no ser generador, pero no ser linealmente independiente es una razón adicional para impedir que sean base. ♢

Ejercicio 44. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente. Ya sabíamos que no era base por no ser generador, pero no ser linealmente independiente es una razón adicional para impedir que sean base. ♢

Ejercicio 45. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_5}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 46. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de ${\mathbb{Z}_5}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. ♢

Ejercicio 47. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de ${\mathbb{Z}_5}^4$. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. Como el conjunto es linealmente y generador de ${\mathbb{Z}_5}^4$ son base de ${\mathbb{Z}_5}^4$. ◊

Ejercicio 48. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_5}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de ${\mathbb{Z}_5}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. ◊

Ejercicio 49. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^3$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, las columnas de A son un conjunto generador de ${\mathbb{Z}_3}^3$. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente ni tampoco pueden ser base. ◊

Ejercicio 50. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ◊

Ejercicio 51. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ◊

Ejercicio 52. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. $\Diamond$

Ejercicio 53. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, las columnas de A no son un conjunto linealmente independiente. Ya sabíamos que no era base por no ser generador, pero no ser linealmente independiente es una razón adicional para impedir que sean base. $\Diamond$

Ejercicio 54. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 55. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^4$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 56. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^3$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^3$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 57. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢

Ejercicio 58. *Determina si las columnas de esta matriz son vectores linealmente independientes, generadores y/o base de* ${\mathbb{Z}_3}^4$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, las columnas de A no son un conjunto generador ${\mathbb{Z}_3}^4$ ni tampoco pueden ser base. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, las columnas de A son un conjunto linealmente independiente. ♢