Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
Facultad Informática Universidad Murcia	**Aplicaciones Lineales**	Clase: 30 min.

Vídeo : `https://youtu.be/BU0lR6c2vaU`

1. Resumen

Definición 1. *Una aplicación lineal $f : K^n \to K^m$ es una fórmula que dado un elemento u de K^n nos da un elemento $f(u)$ de K^m satisfaciendo las siguientes propiedades:*

1. *$f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in K^n$.*
2. *$f(cu) = cf(u)$ para todo $c \in K$ y todo $u \in K^n$*

Ejemplo 2. *El ejemplo más sencillo de aplicación lineal es la* **aplicación identidad** *que deja fijos todos los vectores. La representaremos por $\mathsf{id} : K^n \to K^n$ y tendremos que $\mathsf{id}(u) = u$ para todo u.*

Demostración. Se cumplen las condiciones porque $\mathsf{id}(u + v) = u + v = \mathsf{id}(u) + \mathsf{id}(v)$ y $\mathsf{id}(cu) = cu = c\,\mathsf{id}(u)$ para cualesquiera $u, v \in K^n$ y $c \in K$. □

Ejemplo 3. *Otro ejemplo de aplicación lineal es la* **aplicación nula** *que lleva todos los vectores al vector 0. La denotaremos por 0.*

Demostración. Se cumplen las condiciones porque $0(u + v) = 0 = 0(u) + 0(v)$ y $0(cu) = 0 = c\,0 = c\,0(u)$ para cualesquiera $u, v \in K^n$ y $c \in K$. □

Ejemplo 4. *Sea E una operación elemental por filas. Si la aplicamos a matrices columna (es decir, a vectores) E es una aplicación lineal.*

Este es un caso particular de algo que demostraremos de forma más general inmediatamente. Por eso vamos a ver únicamente un ejemplo. Supongamos que tenemos la operación elemental $E_{(1)+2(3)}$ y la aplicamos a la suma de dos vectores:

$$E_{(1)+3(2)}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = E_{(1)+3(2)}\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1+v_1)+3(u_2+v_2) \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1+3u_2+v_1+3v_2 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+3u_2 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1+3v_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = E_{(1)+3(2)}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + E_{(1)+3(2)}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Todos estos ejemplos en realidad se pueden generalizar al ejemplo fundamental, que es el producto por una matriz.

Proposición 5. *Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo K y $f : K^n \to K^m$ dada por $f(u) = Au$. Entonces f es una aplicación lineal.*

Demostración. Si $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $u \in K^n = \mathbf{M}_{n\times 1}(K)$, el producto de matrices Au será una matriz de $\mathbf{M}_{m\times 1}(K)$, o lo que es lo mismo, un vector de K^m. Esto prueba que f realmente lleva vectores de K^n a K^m. Para ver la linealidad, usamos las propiedades del producto de matrices:

1. $f(u + v) = A(u + v) = Au + Av = f(u) + f(v)$.
2. $f(cu) = A(cu) = (Ac)u = c(Au) = cf(u)$.

□

Todos los ejemplos que hemos visto antes son casos particulares de esta proposición. La aplicación identidad viene representada por la matriz identidad, la aplicación nula por la matriz 0 y las operaciones elementales por las matrices elementales.
En realidad, todas las aplicaciones lineales se pueden representar mediante matrices. El método para obtener dicha matriz será el mismo que utilizamos para las operaciones elementales: aplicarlas a la matriz identidad.

Proposición 6. *Sea $f : K^n \to K^m$ una aplicación lineal, entonces:*

- *Existe una única matriz $M(f)$ que representa la aplicación lineal, es decir, tal que $f(u) = M(f)u$ para cualquier vector $u \in K^n$.*
- *Si aplicamos f a múltiples columnas de una matriz B, tendremos que $f(B) = M(f)B$.*
- *$M(f)$ se puede calcular aplicando f a las columnas de la matriz identidad, es decir, $M(f) = f(I)$.*
- *La matriz $M(f)$ se llamará* **matriz asociada a la aplicación lineal** *f.*
- *En el caso en que la aplicación lineal f venga dada por una matriz A, tendremos que $M(f) = A$ ya que $f(I) = AI = A$.*

Esta relación nos identifica aplicaciones lineales y matrices, con lo que realmente podemos considerar que son la misma cosa. Además, la multiplicación de matrices se puede identificar con la composición de aplicaciones lineales.

Proposición 7. *Sean $f : K^m \to K^p$ y $g : K^n \to K^m$ aplicaciones lineales, entonces podemos componer*

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & K^m \arrow[r, "f"] & K^p \end{tikzcd}$$

Siendo $(f \circ g)(u) = f(g(u))$ para cualquier u de K^n. La matriz de la composición es el producto de las matrices de cada una de las aplicaciones lineales, es decir

$$M(f \circ g) = M(f)M(g).$$

Demostración. Tomemos un vector u cualquiera de K^n, entonces

$$M(f \circ g)u = (f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(M(g)u) = M(f)(M(g)u) = (M(f)M(g))u$$

Como esto es cierto para cualquier vector u, podemos aplicarlo a las columnas de la matriz identidad y deducir que

$$M(f \circ g) = M(f \circ g)I = (M(f)M(g))I = M(f)M(g).$$

□

Nota 8. *Un ejemplo interesante de matrices son los vectores fila. Un vector fila del tipo $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ se corresponde con la aplicación lineal $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Este tipo de expresiones nos aparecen muy habitualmente y reciben el nombre de* **covectores** *y el espacio de todos los covectores recibe el nombre de* **espacio dual**. *En realidad el comportamiento de los vectores columna y los vectores fila es totalmente análogo, pero nosotros evitaremos el uso de los vectores fila tomando matrices traspuestas cuando sea necesario.*

Aunque los conceptos sean los mismos, a veces la terminología que se utiliza en el contexto de las aplicaciones lineales y en el de las matrices no es exactamente la misma, por ejemplo:

Definición 9. *Sea $f : K^n \to K^m$ una aplicación lineal. Definiremos:*

1. **Núcleo de** f, *y lo denotaremos* $\mathsf{Ker}(f)$, *al conjunto de vectores* $u \in K^n$ *tales que* $f(u) = 0$ *(o lo que es lo mismo* $M(f)u = 0$*).*
2. **Imagen de** f, *y la denotaremos* $\mathsf{Im}(f)$, *al conjunto de vectores* $v \in K^m$ *para los cuales existe* $u \in K^n$ *tal que* $f(u) = v$ *(o lo que es lo mismo,* $M(f)u = v$*).*

Como podemos ver, si consideramos la aplicación lineal en términos de su matriz asociada, el núcleo de f no es mas que el anulador por la derecha de $M(f)$ y la imagen de f es el espacio generado por las columnas de $M(f)$. Es decir:

$$\mathsf{Ker}(f) = N(M(f))$$

$$\mathsf{Im}(f) = C(M(f))$$

En el campo de las aplicaciones (no únicamente las lineales) existen también conceptos que se relacionan con los que hemos visto. Concretamente son las aplicaciones inyectivas y sobreyectivas.

Definición 10. *Sea* $f : X \to Y$ *una aplicación entre dos conjuntos* X *e* Y *cualesquiera.*

1. *Si* $f(x) = y$ *diremos que* y **es la imagen de** x *o también que* x **es una antiimagen de** y.
2. *La antiimagen de un elemento cualquiera* y *de* Y *puede no existir. Las aplicaciones* $f : X \to Y$ *para las cuales todo elemento de* Y *tiene al menos una antiimagen se dicen* **sobreyectivas**. *Es decir,* $f : X \to Y$ *es sobreyectiva si para todo* $y \in Y$ *existe algún* $x \in X$ *tal que* $f(x) = y$.
3. *Dado un elemento* y *de* Y*, en general es posible que* y *tenga más de una antiimagen. Si esto no sucede y los elementos tienen a lo sumo una antiimagen, diremos que* f *es* **inyectiva**. *Dicho de otro modo,* f *es inyectiva si* $f(x_1) = f(x_2)$ *implica que* $x_1 = x_2$.
4. *Diremos que* f *es* **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva. Si* $f : X \to Y$ *es biyectiva, podemos definir* $g : Y \to X$ *tal que a cada* $y \in Y$ *le asigne* $g(y)$ *su única antiimagen de* X. *Esta* g *es la aplicación inversa de* f. *En realidad, una aplicación es biyectiva si y solo si tiene inversa.*

En el caso de aplicaciones lineales, tenemos que

Proposición 11. *Sea* $f : K^n \to K^m$ *una aplicación lineal, entonces*

1. f *es inyectiva si y solo si* $\mathsf{Ker}(f) = 0$.
2. f *es sobreyectiva si y solo si* $\mathsf{Im}(f) = K^m$.

Demostración. Si $f(x_1) = f(x_2)$, utilizando la linealidad tendríamos que $f(x_1 - x_2) = 0$ y eso es equivalente a que $x_1 - x_2 \in \mathsf{Ker}(f) = 0$ y por lo tanto $x_1 = x_2$.
Recíprocamente, si $\mathsf{Ker}(f)$ no fuese 0, habría algún elemento $x_1 \in \mathsf{Ker}(f)$ distinto de 0 y también podríamos tomar $x_2 = 0$ con lo que $f(x_1) = 0 = f(x_2)$ y f no podría ser inyectiva.
La parte (2) es inmediata. □

Esto nos permite relacionar muchos conceptos que hemos estudiado en contextos diferentes:

Proposición 12. *Sea* $r : K^n \to K^m$ *una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. r *es sobreyectiva.*
2. $\mathsf{Im}(r) = K^m$.
3. $C(M(r)) = K^m$.
4. *Las columnas de* $M(r)$ *son generadoras de* K^m.

5. *La matriz $M(r)$ tiene una inversa lateral por la derecha.*
6. *Existe una aplicación lineal $s : K^m \to K^n$ tal que $r \circ s = \mathsf{id}$.*

y de forma similar, tenemos los conceptos relativos a la inyectividad:

Proposición 13. *Sea $s : K^m \to K^n$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *s es inyectiva.*
2. $\mathsf{Ker}(s) = 0$.
3. $N(M(s)) = 0$.
4. *Las columnas de $M(s)$ son linealmente independientes.*
5. *La matriz $M(s)$ tiene una inversa lateral por la izquierda.*
6. *Existe una aplicación lineal $r : K^n \to K^m$ tal que $r \circ s = \mathsf{id}$.*

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Existen varios tipos de ejercicios que se pueden plantear en términos de aplicaciones lineales, pero que ya hemos resuelto en otro contexto con anterioridad.
Por ejemplo, si nos dan una aplicación lineal, pueden preguntarnos si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Para ello no tendríamos más que reducir la matriz y comprobar si las columnas son linealmente independientes, generadoras o ambas cosas.
También nos podrían pedir las inversas laterales (en caso de existir). Para calcularlas no tenemos más que calcular las matrices inversas laterales.
También nos pueden pedir componer aplicaciones lineales (lo cual es equivalente a multiplicar matrices).
Para obtener la matriz de una aplicación lineal f, simplemente tenemos que aplicar f a las columnas de la matriz identidad para obtener las columnas de la matriz $M(f)$. En muchas ocasiones es incluso más sencillo, si nos dan por ejemplo:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

se puede ver de forma casi inmediata que

$$\begin{bmatrix} x_1 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la matriz es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
A continuación vamos a ver problemas de tres tipos: los 50 primeros son para ver si una aplicación lineal es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Los 50 siguientes son para ver si una serie de vectores están en el núcleo y en la imagen de una aplicación lineal. En ese problema veremos que se pueden resolver todos los vectores al mismo tiempo aplicando el resultado a matrices completas. El tercer tipo de problemas (los últimos 50)

serán ejemplos en los que nos piden que calculemos una aplicación lineal sabiendo que toma ciertos valores sobre unos vectores que nos dan en el enunciado. Este tipo de problemas se pueden plantear como una ecuación matricial. En este tema resolveremos las más sencillas, más adelante planteremos algunas en las cuales existan soluciones múltiples o incluso no existan soluciones. Como es habitual, en los tres casos los casos los 20 primeros ejercicios serán en $\mathbb{R}$, los 20 siguientes en $\mathbb{Z}_5$ y los 10 últimos en $\mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 14. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 5 \\ 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 5 & 5 \\ 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+\frac{5}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 15. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -7 & 8 \\ 3 & -2 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -7 & 8 \\ 3 & -2 & -6 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{4}(1)}} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -7 & 8 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-8(2)}} \begin{bmatrix} 4 & -3 & -7 & 8 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y por tanto no puede ser biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 16. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 17. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 18. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 19. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y por tanto no puede ser biyectiva. ◊

Ejercicio 20. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. ◊

Ejercicio 21. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 9 \\ 1 & 6 & -8 \\ -1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & -7 & 9 \\ 1 & 6 & -8 \\ -1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -7 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -7 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -7 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -7 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 22. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 23. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 24. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 & 8 \\ -1 & -2 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 & 8 \\ -1 & -2 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & -5 & 8 \\ -1 & -2 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -15 & 14 \\ -1 & -2 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -15 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -15 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+\frac{2}{7}(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -15 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{2}{7}(3)}} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -15 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 25. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 9 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 9 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{4}{7}(1)}} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & \frac{55}{7} \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{7}(1)}} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & \frac{55}{7} \\ 0 & \frac{4}{7} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{7}(1)}} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & \frac{55}{7} \\ 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & \frac{10}{7} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{4}{55}(2)}} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & \frac{55}{7} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{11}(2)}} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & \frac{55}{7} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 26. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{5}(1)}} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{5}(1)}} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. ◊

Ejercicio 27. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-11(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. ◊

Ejercicio 28. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. ♢

Ejercicio 29. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -9 & 7 \\ 1 & -7 & -8 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -9 & 7 \\ 1 & -7 & -8 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & -8 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. ♢

Ejercicio 30. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. ♢

Ejercicio 31. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 6 \\ 5 & -7 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 6 \\ 5 & -7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{2}(1)}} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+\frac{5}{2}(1)}} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. ♢

Ejercicio 32. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 8 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y por tanto no puede ser biyectiva. ♢

Ejercicio 33. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. ♢

Ejercicio 34. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 35. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 36. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 37. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 38. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 39. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 40. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 41. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 42. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 43. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 44. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. ♢

Ejercicio 45. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. ♢

Ejercicio 46. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 47. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3,4)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 4 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 48. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene un sólo pivote. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 49. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. ◊

Ejercicio 50. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. ◊

Ejercicio 51. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 52. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 53. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 54. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 55. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 56. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes no coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es inyectiva y no es biyectiva por no ser ni inyectiva ni sobreyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 57. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 58. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 59. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

.

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 60. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 61. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. $\Diamond$

Ejercicio 62. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 2 pivotes. Como el número de pivotes no coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A no es sobreyectiva y por lo tanto tampoco puede ser biyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. ♢

Ejercicio 63. *Determina si la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva o ninguna de esas cosas, siendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Vamos a calcular el número de pivotes que aparecen en la reducción por filas de A. Como solo necesitamos el número de pivotes, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz reducida tiene 3 pivotes. Como el número de pivotes coincide con el número de filas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es sobreyectiva. Como el número de pivotes coincide con el número de columnas, la aplicación lineal asociada a la matriz A es inyectiva. Como es inyectiva y sobreyectiva, entonces es biyectiva. ♢

Ejercicio 64. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -8 \\ -3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{4} & \frac{3}{32} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{18} & 0 & -1 & \frac{2}{13} \\ \frac{37}{11} & -\frac{1}{182} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{6} & -7 & -\frac{2}{3} & \frac{17}{18} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & -1 & 0 & -\frac{1}{6} & -60 & \frac{1}{159} & 0 \\ \frac{37}{11} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{17}{18} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} & 1 & 2 & \frac{1}{6} \\ -16 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -8 \\ -3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} & 1 & 2 & \frac{1}{6} \\ -16 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 79 & -\frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{67}{18} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ 127 & -6 & 0 & 0 & 0 & -\frac{109}{18} & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{19}{3} \\ -141 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{32}{3} \\ 79 & -\frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{67}{18} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ -141 & \frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{32}{3} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,4,5,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 1 & -5 & -\frac{3}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 2 & -8 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{4} & \frac{3}{32} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{18} & 0 & -1 & \frac{2}{13} \\ -3 & -1 & 9 & \frac{37}{11} & -\frac{1}{182} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{6} & -7 & -\frac{2}{3} & \frac{17}{18} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -5 & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & -1 & 0 & -\frac{1}{6} & -60 & \frac{1}{159} & 0 \\ -3 & -1 & 9 & \frac{37}{11} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{17}{18} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 1 & -5 & -\frac{3}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{14}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{43}{224} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{13} \\ -3 & -1 & 9 & \frac{37}{11} & -\frac{1}{182} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{6} & -7 & -\frac{2}{3} & \frac{17}{18} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -5 & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & -1 & 0 & -\frac{1}{6} & -60 & \frac{1}{159} & 0 \\ -3 & -1 & 9 & \frac{37}{11} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{17}{18} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 1 & -5 & -\frac{3}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{14}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{43}{224} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{13} \\ 0 & 2 & -6 & \frac{28}{11} & -\frac{547}{182} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{6} & -\frac{43}{7} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -1 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & -5 & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & -1 & 0 & -\frac{1}{6} & -60 & \frac{1}{159} & 0 \\ -3 & -1 & 9 & \frac{37}{11} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{17}{18} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 1 & -5 & -\frac{3}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{14}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{43}{224} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{13} \\ 0 & 2 & -6 & \frac{28}{11} & -\frac{547}{182} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{6} & -\frac{43}{7} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -1 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{7} & 0 & 0 & -\frac{119}{2} & -\frac{475}{318} & -1 \\ -3 & -1 & 9 & \frac{37}{11} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{17}{18} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 1 & -5 & -\frac{3}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{14}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{43}{224} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{13} \\ 0 & 2 & -6 & \frac{28}{11} & -\frac{547}{182} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{6} & -\frac{43}{7} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -1 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{7} & 0 & 0 & -\frac{119}{2} & -\frac{475}{318} & -1 \\ 0 & 2 & -6 & \frac{28}{11} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{6} & \frac{5}{14} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{2} & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 0 & -2 & -\frac{17}{11} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{107}{224} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{18} & -1 & 4 & \frac{24}{13} \\ 0 & 1 & -3 & \frac{14}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{43}{224} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{13} \\ 0 & 2 & -6 & \frac{28}{11} & -\frac{547}{182} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{6} & -\frac{43}{7} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -1 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{7} & 0 & 0 & -\frac{119}{2} & -\frac{475}{318} & -1 \\ 0 & 2 & -6 & \frac{28}{11} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{6} & \frac{5}{14} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{2} & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{E_{(3)-2(2)}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{17}{11} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{107}{224} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{18} & -1 & 4 & \frac{24}{13} \\ 0 & 1 & -3 & \frac{14}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{43}{224} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{183}{182} & 0 & 0 & -\frac{645}{112} & 0 & 0 & -2 & \frac{17}{2} & \frac{135}{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{7} & 0 & 0 & -\frac{119}{2} & -\frac{475}{318} & -1 \\ 0 & 2 & -6 & \frac{28}{11} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{6} & \frac{5}{14} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{2} & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{E_{(5)-2(2)}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{17}{11} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{107}{224} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{18} & -1 & 4 & \frac{24}{13} \\ 0 & 1 & -3 & \frac{14}{11} & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{43}{224} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{183}{182} & 0 & 0 & -\frac{645}{112} & 0 & 0 & -2 & \frac{17}{2} & \frac{135}{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{9}{7} & 0 & 0 & -\frac{119}{2} & -\frac{475}{318} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{83}{112} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 9 & \frac{61}{13} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,3,4,6,7 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 65. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f)=\left[\begin{array}{ccccc} 2 & -6 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A=\left[\begin{array}{cccccccccc} -1 & -\frac{1}{6} & 18 & \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & -2 & 12 & 0 & -16 & 0 \\ 1 & \frac{1}{12} & -9 & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{4} & 1 & 1 & 20 & -3 & 0 \\ -10 & 5 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{4}{11} & -2 \end{array}\right]$$

$$B=\left[\begin{array}{cccccccccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & -2 & 7 & \frac{1}{9} & 2 & -\frac{1}{10} & -2 & 0 & 1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{14}{3} & -14 & -\frac{9}{5} & -1 & \frac{13}{15} & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{20}{3} & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ \frac{4}{3} & -13 & -\frac{7}{3} & 7 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{13}{30} & 2 & \frac{1}{3} & 16 \end{array}\right]$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B)=M(f)\cdot B=\left[\begin{array}{ccccc} 2 & -6 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cccccccccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & -2 & 7 & \frac{1}{9} & 2 & -\frac{1}{10} & -2 & 0 & 1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{14}{3} & -14 & -\frac{9}{5} & -1 & \frac{13}{15} & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{20}{3} & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ \frac{4}{3} & -13 & -\frac{7}{3} & 7 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{13}{30} & 2 & \frac{1}{3} & 16 \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & -122 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{139}{12} & 0 & \frac{49}{2} & 0 & 89 \\ 0 & 61 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{139}{24} & 0 & -\frac{49}{4} & 0 & -\frac{89}{2} \\ 0 & -\frac{104}{3} & 0 & 0 & \frac{37}{15} & -\frac{361}{72} & 0 & \frac{33}{4} & 0 & \frac{21}{2} \end{array}\right]$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,3,4,7,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 2 & -6 & 0 & 0 & 6 & -1 & -\frac{1}{6} & 18 & \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & -2 & 12 & 0 & -16 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -3 & 1 & \frac{1}{12} & -9 & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{4} & 1 & 1 & 20 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & -10 & 5 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{4}{11} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrrrrrrr} 1 & -3 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & 9 & \frac{1}{8} & \frac{7}{4} & -1 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -3 & 1 & \frac{1}{12} & -9 & -\frac{1}{8} & -\frac{7}{4} & 1 & 1 & 20 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & -10 & 5 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{4}{11} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrrrrrrr} 1 & -3 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & 9 & \frac{1}{8} & \frac{7}{4} & -1 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 20 & -11 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & -10 & 5 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{4}{11} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrrrrrrr} 1 & -3 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & 9 & \frac{1}{8} & \frac{7}{4} & -1 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 20 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -\frac{19}{2} & \frac{61}{12} & -\frac{19}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -6 & 0 & \frac{92}{11} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(3)}} \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrrrrrrr} 1 & -3 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & 9 & \frac{1}{8} & \frac{7}{4} & -1 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 20 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{19}{2} & -\frac{61}{12} & \frac{19}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 6 & 0 & -\frac{92}{11} & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{rrrrr|rrrrrrrrrr} 1 & -3 & 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & 9 & \frac{1}{8} & \frac{7}{4} & -1 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{19}{2} & -\frac{61}{12} & \frac{19}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 6 & 0 & -\frac{92}{11} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 20 & -11 & 0 \end{array}\right]$$

$$.$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,3,4,5,6,10 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 66. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 & -\frac{4}{5} & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -5 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -3 & 0 & -9 & 1 & \frac{29}{3} & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{29} & \frac{1}{19} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{15} & -\frac{7}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{23}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & -2 & \frac{5}{182} & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{2} & 1 & -38 & \frac{1}{3} & 0 & -2 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{6} & 109 \\ 0 & \frac{39}{2} & \frac{21}{2} & -456 & \frac{9}{2} & -6 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} & -152 & \frac{3}{2} & -2 & -1 & -1 & 0 & -\frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & -2 & \frac{5}{182} & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{2} & 1 & -38 & \frac{1}{3} & 0 & -2 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{6} & 109 \\ 0 & \frac{39}{2} & \frac{21}{2} & -456 & \frac{9}{2} & -6 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} & -152 & \frac{3}{2} & -2 & -1 & -1 & 0 & -\frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{84}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{225}{91} & -\frac{41}{10} & -\frac{7}{6} & -\frac{2821}{6} \\ -\frac{114}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2907}{182} & \frac{17}{5} & -\frac{8}{3} & -\frac{2353}{6} \\ \frac{18}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1269}{182} & -\frac{8}{5} & -\frac{5}{3} & -\frac{2665}{6} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,3,4,5,6 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrrrrr} -1 & -4 & -1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 & -\frac{4}{5} & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -5 & -5 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -3 & 0 & -9 & 1 & \frac{29}{3} & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{29} & \frac{1}{19} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{15} & -\frac{7}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{23}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrrrrr} 1 & 4 & 1 & -4 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -6 & \frac{4}{5} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -5 & -5 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & -3 & 0 & -9 & 1 & \frac{29}{3} & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{29} & \frac{1}{19} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{15} & -\frac{7}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{23}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrrrrr} 1 & 4 & 1 & -4 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -6 & \frac{4}{5} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & -5 & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & -9 & \frac{4}{5} & -10 & 1 & \frac{32}{3} & 5 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{29} & \frac{1}{19} & \frac{6}{5} & -\frac{8}{15} & -\frac{7}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{23}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrrrrr} 1 & 4 & 1 & -4 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -6 & \frac{4}{5} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & -5 & -\frac{7}{12} & -\frac{1}{12} & -9 & \frac{4}{5} & -10 & 1 & \frac{32}{3} & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -\frac{31}{58} & \frac{1}{19} & -\frac{24}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{10}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{32}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrrrrr} 1 & 4 & 1 & -4 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -6 & \frac{4}{5} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{36} & -\frac{1}{36} & -3 & \frac{4}{15} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & \frac{32}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -\frac{31}{58} & \frac{1}{19} & -\frac{24}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{10}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{32}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrrrrr} 1 & 4 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & -\frac{11}{36} & \frac{1}{36} & -3 & \frac{8}{15} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{23}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{36} & -\frac{1}{36} & -3 & \frac{4}{15} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & \frac{32}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -\frac{31}{58} & \frac{1}{19} & -\frac{24}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{10}{3} & -\frac{19}{2} & \frac{32}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrrrrr} 1 & 4 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & -\frac{11}{36} & \frac{1}{36} & -3 & \frac{8}{15} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{23}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{36} & -\frac{1}{36} & -3 & \frac{4}{15} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & \frac{32}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{355}{1044} & \frac{55}{684} & -\frac{9}{5} & 0 & 0 & -\frac{59}{6} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 5,6,8,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 67. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -8 & 5 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & -2 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{28}{3} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{13}{6} & -\frac{11}{2} & 2 & 1 & -12 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -22 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{2} & -5 \\ \frac{1}{31} & \frac{1}{9} & -7 & 0 & \frac{4}{23} & -\frac{2}{11} & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{2}{5} & -2 & 3 & -\frac{3}{4} & -1 & 0 & -\frac{1}{61} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{53}{9} & 0 & \frac{167}{4} & -\frac{88}{23} & \frac{53}{11} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -2 & 2 & \frac{85}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B)=M(f)\cdot B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -8 & 5 & -7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -22 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{2} & -5 \\ \frac{1}{31} & \frac{1}{9} & -7 & 0 & \frac{4}{23} & -\frac{2}{11} & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{2}{5} & -2 & 3 & -\frac{3}{4} & -1 & 0 & -\frac{1}{61} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{53}{9} & 0 & \frac{167}{4} & -\frac{88}{23} & \frac{53}{11} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -2 & 2 & \frac{85}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{2117}{1240} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{719}{1464} & -\frac{59}{35} & \frac{142}{45} & \frac{27}{5} \\ -\frac{21}{40} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{67}{366} & -\frac{26}{35} & -\frac{19}{6} & -\frac{74}{5} \\ -\frac{9283}{1240} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3059}{1464} & -\frac{243}{35} & \frac{199}{9} & \frac{283}{5} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,3,4,5,6 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & -2 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{28}{3} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -5 & -8 & 5 & -7 & 3 & -\frac{13}{6} & -\frac{11}{2} & 2 & 1 & -12 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}}\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & -2 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & -1 & -2 & 3 & 2 & -\frac{53}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 3 & -5 & -8 & 5 & -7 & 3 & -\frac{13}{6} & -\frac{11}{2} & 2 & 1 & -12 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(1)}}\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 & -2 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & -1 & -2 & 3 & 2 & -\frac{53}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 3 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{2} & 2 & -2 & -6 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{2}{3} & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}}\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{28}{3} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & -1 & -2 & 3 & 2 & -\frac{53}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 & 3 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{2} & 2 & -2 & -6 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{2}{3} & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}}\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{28}{3} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{3} & \frac{5}{4} & -1 & -2 & 3 & 2 & -\frac{53}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{8} & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 9 & -\frac{91}{6} & 0 & -4 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,3,4,6,9 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 68. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f)=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{1}{4} & 4 & 0 & -3 & 1 & \frac{3}{8} \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & -20 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{15}{32} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 1 & -8 & -\frac{1}{3} & \frac{6}{37} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -1 & 17 & 5 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{95}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{35}{444} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & -20 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{15}{32} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 1 & -8 & -\frac{1}{3} & \frac{6}{37} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -1 & 17 & 5 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{95}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{35}{444} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{2} & \frac{13}{6} & 4 & -\frac{1009}{32} & -\frac{144}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,3,4,5 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & -2 & 2 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{1}{4} & 4 & 0 & -3 & 1 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,4,6,7 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 69. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{18}{11} & 1 & 14 & 6 & -1 & 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & -9 \\ -3541 & -2 & 1 & \frac{11}{7} & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3540 & -\frac{14}{11} & -1 & \frac{185}{7} & -1 & \frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -15 \\ -14161 & \frac{20}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{544}{7} & 4 & -11 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{3} & 42 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \frac{2}{9} & -6 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{40} \\ -3 & -1 & \frac{1}{30} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 11 & 1 \\ \frac{3}{2} & 22 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & \frac{2}{9} & -6 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{40} \\ -3 & -1 & \frac{1}{30} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 11 & 1 \\ \frac{3}{2} & 22 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 130 & \frac{13}{45} & -5 & 0 & 0 & 21 & -\frac{641}{40} \\ 0 & 173 & \frac{29}{90} & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 32 & -\frac{841}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 87 & \frac{23}{90} & -\frac{11}{2} & 0 & 0 & 10 & -\frac{441}{40} \\ 0 & -88 & -\frac{4}{9} & 12 & 0 & 0 & 2 & \frac{241}{20} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,5,6 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 2 & 6 & -\frac{1}{2} & -\frac{18}{11} & 1 & 14 & 6 & -1 & 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & -9 \\ 1 & 3 & 8 & -3541 & -2 & 1 & \frac{11}{7} & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3540 & -\frac{14}{11} & -1 & \frac{185}{7} & -1 & \frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -15 \\ -2 & 0 & -4 & -14161 & \frac{20}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{544}{7} & 4 & -11 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{3} & 42 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 2 & 6 & -\frac{1}{2} & -\frac{18}{11} & 1 & 14 & 6 & -1 & 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7081}{2} & -\frac{4}{11} & 0 & -\frac{87}{7} & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{3} & \frac{5}{6} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3540 & -\frac{14}{11} & -1 & \frac{185}{7} & -1 & \frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & -15 \\ -2 & 0 & -4 & -14161 & \frac{20}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{544}{7} & 4 & -11 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{3} & 42 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 2 & 6 & -\frac{1}{2} & -\frac{18}{11} & 1 & 14 & 6 & -1 & 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7081}{2} & -\frac{4}{11} & 0 & -\frac{87}{7} & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{3} & \frac{5}{6} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \frac{7081}{2} & \frac{4}{11} & -2 & \frac{87}{7} & -7 & \frac{11}{8} & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} & -6 \\ -2 & 0 & -4 & -14161 & \frac{20}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{544}{7} & 4 & -11 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{3} & 42 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 2 & 6 & -\frac{1}{2} & -\frac{18}{11} & 1 & 14 & 6 & -1 & 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7081}{2} & -\frac{4}{11} & 0 & -\frac{87}{7} & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{3} & \frac{5}{6} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \frac{7081}{2} & \frac{4}{11} & -2 & \frac{87}{7} & -7 & \frac{11}{8} & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} & -6 \\ 0 & 4 & 8 & -14162 & -\frac{16}{11} & \frac{5}{2} & -\frac{348}{7} & 16 & -13 & 4 & -\frac{29}{12} & \frac{10}{3} & 24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 0 & 2 & \frac{14161}{2} & -\frac{10}{11} & 1 & \frac{272}{7} & 16 & -\frac{11}{5} & 7 & -6 & -\frac{13}{6} & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7081}{2} & -\frac{4}{11} & 0 & -\frac{87}{7} & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{3} & \frac{5}{6} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \frac{7081}{2} & \frac{4}{11} & -2 & \frac{87}{7} & -7 & \frac{11}{8} & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} & -6 \\ 0 & 4 & 8 & -14162 & -\frac{16}{11} & \frac{5}{2} & -\frac{348}{7} & 16 & -13 & 4 & -\frac{29}{12} & \frac{10}{3} & 24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 0 & 2 & \frac{14161}{2} & -\frac{10}{11} & 1 & \frac{272}{7} & 16 & -\frac{11}{5} & 7 & -6 & -\frac{13}{6} & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7081}{2} & -\frac{4}{11} & 0 & -\frac{87}{7} & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{3} & \frac{5}{6} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -12 & \frac{79}{40} & -\frac{11}{2} & \frac{11}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -14162 & -\frac{16}{11} & \frac{5}{2} & -\frac{348}{7} & 16 & -13 & 4 & -\frac{29}{12} & \frac{10}{3} & 24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 0 & 2 & \frac{14161}{2} & -\frac{10}{11} & 1 & \frac{272}{7} & 16 & -\frac{11}{5} & 7 & -6 & -\frac{13}{6} & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{7081}{2} & -\frac{4}{11} & 0 & -\frac{87}{7} & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{5}{2} & \frac{7}{3} & \frac{5}{6} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -12 & \frac{79}{40} & -\frac{11}{2} & \frac{11}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 36 & -\frac{77}{5} & 14 & -\frac{47}{4} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,2,4,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 70. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{11} & 1 & \frac{1}{2} & 49 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{33} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 4 & 1 & 0 & 2 & -\frac{217}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{22} \\ -1 & 5 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{97} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{240} & \frac{1}{3} \\ 0 & 7 & \frac{5}{14} & \frac{1}{2} & -\frac{25}{2} & -\frac{1}{9} & 0 & 1 & \frac{67}{120} & \frac{41}{132} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 4 & 1 & 0 & 2 & -\frac{217}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{22} \\ -1 & 5 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{97} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{240} & \frac{1}{3} \\ 0 & 7 & \frac{5}{14} & \frac{1}{2} & -\frac{25}{2} & -\frac{1}{9} & 0 & 1 & \frac{67}{120} & \frac{41}{132} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{24}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{7851}{97} & \frac{1949}{6} & 5 & \frac{36}{5} & 0 & 0 \\ \frac{16}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5234}{97} & \frac{1949}{9} & \frac{10}{3} & \frac{24}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,3,4,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} -3 & -6 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{11} & 1 & \frac{1}{2} & 49 & -\frac{7}{2} \\ -2 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{33} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 2 & -2 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{33} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{49}{3} & \frac{7}{6} \\ -2 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{33} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 2 & -2 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{33} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{49}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{496}{15} & \frac{7}{3} \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 3,4,5,6 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 71. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -3 & -\frac{16}{5} & -1 \\ -1 & 1 & \frac{2}{15} & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & -1 \\ -42 & \frac{3}{11} & 3 & -\frac{21}{44} & \frac{3}{22} & -\frac{17}{44} & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{96}{55} & 0 \\ -\frac{1}{14} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{21}{44} & -\frac{3}{22} & \frac{17}{44} & \frac{2}{5} & 6 & -\frac{96}{55} & -126 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 3 & 1 & \frac{13}{5} & 1 & 2 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{275} & 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{13}{15} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{15} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{18} & -3 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{13}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{83} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 3 & 1 & \frac{13}{5} & 1 & 2 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{275} & 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{13}{15} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{15} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{18} & -3 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{13}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{83} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{549}{275} & 0 & 0 & -\frac{25}{2} & \frac{52}{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{170}{83} \\ 0 & \frac{807}{550} & 0 & 0 & \frac{27}{2} & -\frac{39}{11} & 11 & 0 & 0 & \frac{329}{83} \\ 0 & \frac{819}{550} & 0 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{39}{11} & 3 & 0 & 0 & -\frac{3}{83} \\ 0 & -\frac{819}{550} & 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{39}{11} & -3 & 0 & 0 & \frac{3}{83} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,3,4,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 1 & 4 & -\frac{15}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -3 & -\frac{16}{5} & -1 \\ 2 & -9 & -3 & -1 & 1 & \frac{2}{15} & -2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{12} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -42 & \frac{3}{11} & 3 & -\frac{21}{44} & \frac{3}{22} & -\frac{17}{44} & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{96}{55} & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{21}{44} & -\frac{3}{22} & \frac{17}{44} & \frac{2}{5} & 6 & -\frac{96}{55} & -126 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 1 & 4 & -\frac{15}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -3 & -\frac{16}{5} & -1 \\ 0 & -11 & -11 & 14 & 1 & \frac{2}{15} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{17}{12} & -\frac{7}{5} & 6 & \frac{32}{5} & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -42 & \frac{3}{11} & 3 & -\frac{21}{44} & \frac{3}{22} & -\frac{17}{44} & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{96}{55} & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{21}{44} & -\frac{3}{22} & \frac{17}{44} & \frac{2}{5} & 6 & -\frac{96}{55} & -126 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{11}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 1 & 4 & -\frac{15}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -3 & -\frac{16}{5} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{14}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{165} & \frac{7}{44} & -\frac{1}{22} & \frac{17}{132} & \frac{7}{55} & -\frac{6}{11} & -\frac{32}{55} & -\frac{1}{11} \\ 0 & -3 & -3 & -42 & \frac{3}{11} & 3 & -\frac{21}{44} & \frac{3}{22} & -\frac{17}{44} & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{96}{55} & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{21}{44} & -\frac{3}{22} & \frac{17}{44} & \frac{2}{5} & 6 & -\frac{96}{55} & -126 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 3 & -\frac{137}{22} & \frac{1}{11} & \frac{2}{165} & -\frac{25}{88} & \frac{23}{22} & \frac{71}{132} & \frac{48}{55} & -\frac{27}{11} & -\frac{144}{55} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{14}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{165} & \frac{7}{44} & -\frac{1}{22} & \frac{17}{132} & \frac{7}{55} & -\frac{6}{11} & -\frac{32}{55} & -\frac{1}{11} \\ 0 & -3 & -3 & -42 & \frac{3}{11} & 3 & -\frac{21}{44} & \frac{3}{22} & -\frac{17}{44} & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{96}{55} & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{21}{44} & -\frac{3}{22} & \frac{17}{44} & \frac{2}{5} & 6 & -\frac{96}{55} & -126 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 3 & -\frac{137}{22} & \frac{1}{11} & \frac{2}{165} & -\frac{25}{88} & \frac{23}{22} & \frac{71}{132} & \frac{48}{55} & -\frac{27}{11} & -\frac{144}{55} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{14}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{165} & \frac{7}{44} & -\frac{1}{22} & \frac{17}{132} & \frac{7}{55} & -\frac{6}{11} & -\frac{32}{55} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{504}{11} & 0 & \frac{163}{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{199}{55} & -\frac{69}{22} & 0 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 3 & 3 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{11} & 0 & \frac{21}{44} & -\frac{3}{22} & \frac{17}{44} & \frac{2}{5} & 6 & -\frac{96}{55} & -126 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 3 & -\frac{137}{22} & \frac{1}{11} & \frac{2}{165} & -\frac{25}{88} & \frac{23}{22} & \frac{71}{132} & \frac{48}{55} & -\frac{27}{11} & -\frac{144}{55} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{14}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{165} & \frac{7}{44} & -\frac{1}{22} & \frac{17}{132} & \frac{7}{55} & -\frac{6}{11} & -\frac{32}{55} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{504}{11} & 0 & \frac{163}{55} & 0 & 0 & 0 & -\frac{199}{55} & -\frac{69}{22} & 0 & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{577}{154} & 0 & \frac{2}{55} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{55} & \frac{84}{11} & 0 & -\frac{1383}{11} \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,4,5,6,9 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 72. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & -\frac{193}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{20} & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 1 & -\frac{2}{5} & 5 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2143}{22} & -4 & 3 & -10 & -5 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{11} & -2 & \frac{4}{5} & -4 & -2 & \frac{4}{3} & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{21}{17} & 2 & 2 & 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 1 & -\frac{7}{12} & 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{21}{17} & 2 & 2 & 0 & -\frac{7}{4} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 1 & -\frac{7}{12} & 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{143}{34} & 0 & -3 & -\frac{55}{6} & 0 & 0 & 10 & \frac{101}{2} \\ 0 & -\frac{21}{17} & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 3 & 17 \\ 0 & \frac{67}{34} & 0 & 2 & \frac{35}{6} & 0 & 0 & -5 & -\frac{69}{2} \\ 0 & \frac{42}{17} & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & -6 & -34 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,3,6,7 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 3 & -9 & 5 & 0 & 2 & -\frac{193}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{20} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 1 & -\frac{2}{5} & 5 & 1 & -14 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2143}{22} & -4 & 3 & -10 & -5 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{11} & -2 & \frac{4}{5} & -4 & -2 & \frac{4}{3} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 3 & -9 & 5 & 0 & 2 & -\frac{193}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{20} & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 1 & -\frac{2}{5} & 5 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{10}{11} & -5 & 2 & -\frac{201}{20} & -5 & -2 & -\frac{9}{4} \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{11} & -2 & \frac{4}{5} & -4 & -2 & \frac{4}{3} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2135}{22} & -2 & \frac{11}{5} & -\frac{299}{20} & -3 & 44 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 1 & -\frac{2}{5} & 5 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & -5 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{10}{11} & -5 & 2 & -\frac{201}{20} & -5 & -2 & -\frac{9}{4} \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{11} & -2 & \frac{4}{5} & -4 & -2 & \frac{4}{3} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2135}{22} & -2 & \frac{11}{5} & -\frac{299}{20} & -3 & 44 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 1 & -\frac{2}{5} & 5 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{299}{20} & 0 & -72 & -\frac{9}{4} \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{11} & -2 & \frac{4}{5} & -4 & -2 & \frac{4}{3} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2135}{22} & -2 & \frac{11}{5} & -\frac{299}{20} & -3 & 44 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{11} & 1 & -\frac{2}{5} & 5 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{299}{20} & 0 & -72 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -\frac{80}{3} & -2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,4,5,6,8 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 73. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -2 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{5} & -130 & 1 & -4 & -\frac{2}{5} & 0 & 4 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{18} & -1 \\ \frac{5}{11} & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{11} & 0 & -\frac{32}{55} & -\frac{8}{11} & -1 & \frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{8} & \frac{9}{110} & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{5} & \frac{5}{11} \\ \frac{18}{11} & -3 & 46 & \frac{1}{20} & -\frac{16}{11} & 0 & -\frac{58}{55} & -\frac{20}{11} & -3 & \frac{56}{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{23} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{9}{2} & 1673 & 0 & -1 & -\frac{3}{37} \\ -1 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{14} & \frac{1}{6} & -\frac{9}{4} & -\frac{1673}{2} & 0 & -21 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -2 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{23} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{9}{2} & 1673 & 0 & -1 & -\frac{3}{37} \\ -1 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{14} & \frac{1}{6} & -\frac{9}{4} & -\frac{1673}{2} & 0 & -21 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{277}{23} & -60 & 0 & \frac{67}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 173 & -\frac{1531}{185} \\ \frac{205}{23} & -45 & 0 & \frac{31}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 127 & -\frac{1657}{185} \\ \frac{2}{23} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -9 & 45 & 0 & -\frac{45}{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & -129 & \frac{1287}{185} \\ -\frac{272}{23} & 60 & 0 & -\frac{16}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & -168 & \frac{2456}{185} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,5,6,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & -4 & -8 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{5} & -130 & 1 & -4 & -\frac{2}{5} & 0 & 4 & -\frac{1}{3} \\ -2 & -3 & -6 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{18} & -1 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{11} & 0 & -\frac{32}{55} & -\frac{8}{11} & -1 & \frac{6}{11} \\ 0 & 3 & 6 & \frac{6}{11} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{8} & \frac{9}{110} & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{5} & \frac{5}{11} \\ 4 & 4 & 8 & \frac{18}{11} & -3 & 46 & \frac{1}{20} & -\frac{16}{11} & 0 & -\frac{58}{55} & -\frac{20}{11} & -3 & \frac{56}{33} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & -4 & -8 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{5} & -130 & 1 & -4 & -\frac{2}{5} & 0 & 4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -11 & -22 & -2 & \frac{4}{13} & -\frac{7}{5} & -260 & 3 & -\frac{59}{8} & -\frac{3}{10} & 1 & \frac{145}{18} & -\frac{5}{3} \\ 2 & 0 & 0 & \frac{5}{11} & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{11} & 0 & -\frac{32}{55} & -\frac{8}{11} & -1 & \frac{6}{11} \\ 0 & 3 & 6 & \frac{6}{11} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{8} & \frac{9}{110} & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{5} & \frac{5}{11} \\ 4 & 4 & 8 & \frac{18}{11} & -3 & 46 & \frac{1}{20} & -\frac{16}{11} & 0 & -\frac{58}{55} & -\frac{20}{11} & -3 & \frac{56}{33} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & -4 & -8 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{5} & -130 & 1 & -4 & -\frac{2}{5} & 0 & 4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -11 & -22 & -2 & \frac{4}{13} & -\frac{7}{5} & -260 & 3 & -\frac{59}{8} & -\frac{3}{10} & 1 & \frac{145}{18} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 8 & 16 & \frac{16}{11} & \frac{31}{26} & -\frac{3}{5} & \frac{519}{2} & -\frac{24}{11} & 8 & \frac{12}{55} & -\frac{8}{11} & -9 & \frac{40}{33} \\ 0 & 3 & 6 & \frac{6}{11} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{8} & \frac{9}{110} & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{5} & \frac{5}{11} \\ 4 & 4 & 8 & \frac{18}{11} & -3 & 46 & \frac{1}{20} & -\frac{16}{11} & 0 & -\frac{58}{55} & -\frac{20}{11} & -3 & \frac{56}{33} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & -4 & -8 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{5} & -130 & 1 & -4 & -\frac{2}{5} & 0 & 4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -11 & -22 & -2 & \frac{4}{13} & -\frac{7}{5} & -260 & 3 & -\frac{59}{8} & -\frac{3}{10} & 1 & \frac{145}{18} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 8 & 16 & \frac{16}{11} & \frac{31}{26} & -\frac{3}{5} & \frac{519}{2} & -\frac{24}{11} & 8 & \frac{12}{55} & -\frac{8}{11} & -9 & \frac{40}{33} \\ 0 & 3 & 6 & \frac{6}{11} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{8} & \frac{9}{110} & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{5} & \frac{5}{11} \\ 0 & 20 & 40 & \frac{40}{11} & -\frac{47}{13} & \frac{234}{5} & \frac{10401}{20} & -\frac{60}{11} & 16 & \frac{6}{11} & -\frac{20}{11} & -19 & \frac{100}{33} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{11}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & -4 & -8 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{5} & -130 & 1 & -4 & -\frac{2}{5} & 0 & 4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{11} & -\frac{4}{143} & \frac{7}{55} & \frac{260}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{59}{88} & \frac{3}{110} & -\frac{1}{11} & -\frac{145}{198} & \frac{5}{33} \\ 0 & 8 & 16 & \frac{16}{11} & \frac{31}{26} & -\frac{3}{5} & \frac{519}{2} & -\frac{24}{11} & 8 & \frac{12}{55} & -\frac{8}{11} & -9 & \frac{40}{33} \\ 0 & 3 & 6 & \frac{6}{11} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{8} & \frac{9}{110} & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{5} & \frac{5}{11} \\ 0 & 20 & 40 & \frac{40}{11} & -\frac{47}{13} & \frac{234}{5} & \frac{10401}{20} & -\frac{60}{11} & 16 & \frac{6}{11} & -\frac{20}{11} & -19 & \frac{100}{33} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{6}{143} & \frac{17}{55} & -\frac{390}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{29}{22} & -\frac{16}{55} & -\frac{4}{11} & \frac{106}{99} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{11} & -\frac{4}{143} & \frac{7}{55} & \frac{260}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{59}{88} & \frac{3}{110} & -\frac{1}{11} & -\frac{145}{198} & \frac{5}{33} \\ 0 & 8 & 16 & \frac{16}{11} & \frac{31}{26} & -\frac{3}{5} & \frac{519}{2} & -\frac{24}{11} & 8 & \frac{12}{55} & -\frac{8}{11} & -9 & \frac{40}{33} \\ 0 & 3 & 6 & \frac{6}{11} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{8} & \frac{9}{110} & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{5} & \frac{5}{11} \\ 0 & 20 & 40 & \frac{40}{11} & -\frac{47}{13} & \frac{234}{5} & \frac{10401}{20} & -\frac{60}{11} & 16 & \frac{6}{11} & -\frac{20}{11} & -19 & \frac{100}{33} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-8(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{6}{143} & \frac{17}{55} & -\frac{390}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{29}{22} & -\frac{16}{55} & -\frac{4}{11} & \frac{106}{99} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{11} & -\frac{4}{143} & \frac{7}{55} & \frac{260}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{59}{88} & \frac{3}{110} & -\frac{1}{11} & -\frac{145}{198} & \frac{5}{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{405}{286} & -\frac{89}{55} & \frac{1549}{22} & 0 & \frac{29}{11} & 0 & 0 & -\frac{311}{99} & 0 \\ 0 & 3 & 6 & \frac{6}{11} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{9}{11} & \frac{3}{8} & \frac{9}{110} & -\frac{3}{11} & -\frac{6}{5} & \frac{5}{11} \\ 0 & 20 & 40 & \frac{40}{11} & -\frac{47}{13} & \frac{234}{5} & \frac{10401}{20} & -\frac{60}{11} & 16 & \frac{6}{11} & -\frac{20}{11} & -19 & \frac{100}{33} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrrrrrr} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{6}{143} & \frac{17}{55} & -\frac{390}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{29}{22} & -\frac{16}{55} & -\frac{4}{11} & \frac{106}{99} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{11} & -\frac{4}{143} & \frac{7}{55} & \frac{260}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{59}{88} & \frac{3}{110} & -\frac{1}{11} & -\frac{145}{198} & \frac{5}{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{405}{286} & -\frac{89}{55} & \frac{1549}{22} & 0 & \frac{29}{11} & 0 & 0 & -\frac{311}{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{691}{286} & -\frac{21}{55} & -\frac{9371}{132} & 0 & -\frac{18}{11} & 0 & 0 & \frac{329}{330} & 0 \\ 0 & 20 & 40 & \frac{40}{11} & -\frac{47}{13} & \frac{234}{5} & \frac{10401}{20} & -\frac{60}{11} & 16 & \frac{6}{11} & -\frac{20}{11} & -19 & \frac{100}{33} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-20(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{6}{143} & \frac{17}{55} & -\frac{390}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{29}{22} & -\frac{16}{55} & -\frac{4}{11} & \frac{106}{99} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{11} & -\frac{4}{143} & \frac{7}{55} & \frac{260}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{59}{88} & \frac{3}{110} & -\frac{1}{11} & -\frac{145}{198} & \frac{5}{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{405}{286} & -\frac{89}{55} & \frac{1549}{22} & 0 & \frac{29}{11} & 0 & 0 & -\frac{311}{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{691}{286} & -\frac{21}{55} & -\frac{9371}{132} & 0 & -\frac{18}{11} & 0 & 0 & \frac{329}{330} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{437}{143} & \frac{2434}{55} & \frac{10411}{220} & 0 & \frac{57}{22} & 0 & 0 & -\frac{431}{99} & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,5,7,8,10 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 74. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -\frac{2}{11} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & -7 & -6 & 0 & 8 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -4 \\ -2 & -\frac{13}{11} & -\frac{1}{2} & -\frac{22}{3} & -1 & -1 & 5 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{19} & -1 \\ 0 & -4 & -22 & -28 & -1 & 1 & 32 & -\frac{4}{3} & 0 & -16 \\ -6 & -3 & -\frac{1}{2} & -21 & -1 & -70 & 24 & -1 & -\frac{1}{131} & -12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{9} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -16 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 11 & -7 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 4 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{9} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -16 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 11 & -7 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 4 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 55 & \frac{257}{9} & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 & 4 \\ -11 & -9 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & -2 \\ 44 & \frac{176}{9} & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 2 \\ -44 & -36 & 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 & -8 \\ -33 & -27 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,4,5,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & -4 & 5 & 10 & -\frac{2}{11} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -7 & -6 & 0 & 8 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -4 \\ 1 & -3 & 4 & -2 & -\frac{13}{11} & -\frac{1}{2} & -\frac{22}{3} & -1 & -1 & 5 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{19} & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -4 & -22 & -28 & -1 & 1 & 32 & -\frac{4}{3} & 0 & -16 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 & -\frac{1}{2} & -21 & -1 & -70 & 24 & -1 & -\frac{1}{131} & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & -4 & 5 & 10 & -\frac{2}{11} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -7 & -6 & 0 & 8 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -12 & -1 & -\frac{3}{2} & -7 & -1 & -2 & 8 & -\frac{1}{3} & -\frac{17}{19} & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -4 & -22 & -28 & -1 & 1 & 32 & -\frac{4}{3} & 0 & -16 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 & -\frac{1}{2} & -21 & -1 & -70 & 24 & -1 & -\frac{1}{131} & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 1 & 6 & -\frac{46}{11} & -7 & -\frac{85}{3} & -24 & 1 & 29 & -\frac{7}{3} & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -7 & -6 & 0 & 8 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -12 & -1 & -\frac{3}{2} & -7 & -1 & -2 & 8 & -\frac{1}{3} & -\frac{17}{19} & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -4 & -22 & -28 & -1 & 1 & 32 & -\frac{4}{3} & 0 & -16 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 & -\frac{1}{2} & -21 & -1 & -70 & 24 & -1 & -\frac{1}{131} & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 1 & 6 & -\frac{46}{11} & -7 & -\frac{85}{3} & -24 & 1 & 29 & -\frac{7}{3} & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -7 & -6 & 0 & 8 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & -\frac{53}{38} & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -4 & -22 & -28 & -1 & 1 & 32 & -\frac{4}{3} & 0 & -16 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 & -\frac{1}{2} & -21 & -1 & -70 & 24 & -1 & -\frac{1}{131} & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 1 & 6 & -\frac{46}{11} & -7 & -\frac{85}{3} & -24 & 1 & 29 & -\frac{7}{3} & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -7 & -6 & 0 & 8 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & -\frac{53}{38} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -14 & 0 & 23 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 & -\frac{1}{2} & -21 & -1 & -70 & 24 & -1 & -\frac{1}{131} & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 1 & 6 & -\frac{46}{11} & -7 & -\frac{85}{3} & -24 & 1 & 29 & -\frac{7}{3} & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -7 & -6 & 0 & 8 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 & -2 & 0 & 0 & -\frac{53}{38} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -14 & 0 & 23 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \frac{11}{2} & 0 & 17 & -70 & 0 & 0 & -\frac{395}{262} & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,4,7,8,10 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 75. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 \\ -5 & -4 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 1 \\ 18 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 3 & 1 & \frac{3}{10} & -1 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{26} & \frac{13}{10} & \frac{11}{30} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{282} & -\frac{9}{5} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{20} & -\frac{11}{60} & \frac{3}{20} & -3 & \frac{9}{10} & -2 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{18} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & \frac{1}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & \frac{1}{7} & 21 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{43} & -1 & 2 & \frac{1}{7} & 21 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 \\ -5 & -4 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & \frac{1}{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & \frac{1}{7} & 21 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{43} & -1 & 2 & \frac{1}{7} & 21 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -21 & 0 & \frac{4649}{817} & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -14 \\ -\frac{10}{3} & -22 & 0 & \frac{9513}{817} & 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & -13 \\ \frac{5}{3} & 17 & 0 & -\frac{4692}{817} & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ -\frac{5}{6} & -\frac{17}{2} & 0 & \frac{2346}{817} & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,5,6,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} -5 & -2 & 2 & \frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -4 & 4 & 18 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 3 & 1 & \frac{3}{10} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 4 & 2 & -2 & \frac{1}{26} & \frac{13}{10} & \frac{11}{30} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{282} & -\frac{9}{5} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -\frac{13}{20} & -\frac{11}{60} & \frac{3}{20} & -3 & \frac{9}{10} & -2 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{18} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{5}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -5 & -4 & 4 & 18 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 3 & 1 & \frac{3}{10} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 4 & 2 & -2 & \frac{1}{26} & \frac{13}{10} & \frac{11}{30} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{282} & -\frac{9}{5} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -\frac{13}{20} & -\frac{11}{60} & \frac{3}{20} & -3 & \frac{9}{10} & -2 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{18} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -2 & 2 & \frac{53}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{10} & -2 & -\frac{9}{8} \\ 4 & 2 & -2 & \frac{1}{26} & \frac{13}{10} & \frac{11}{30} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{282} & -\frac{9}{5} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -\frac{13}{20} & -\frac{11}{60} & \frac{3}{20} & -3 & \frac{9}{10} & -2 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{18} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -2 & 2 & \frac{53}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{10} & -2 & -\frac{9}{8} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{119}{390} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2251}{1410} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -\frac{13}{20} & -\frac{11}{60} & \frac{3}{20} & -3 & \frac{9}{10} & -2 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{18} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -2 & 2 & \frac{53}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{13}{10} & -2 & -\frac{9}{8} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{119}{390} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2251}{1410} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{3}{20} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{20} & -\frac{19}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{41}{90} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{53}{6} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{13}{20} & 1 & \frac{9}{16} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{119}{390} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2251}{1410} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{3}{20} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{20} & -\frac{19}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{41}{90} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{2}{5}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{52}{15} & \frac{7}{10} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{23}{50} & -\frac{3}{5} & -\frac{17}{40} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{53}{6} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{13}{20} & 1 & \frac{9}{16} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{119}{390} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2251}{1410} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{3}{20} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{20} & -\frac{19}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{41}{90} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{5}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{52}{15} & \frac{7}{10} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{23}{50} & -\frac{3}{5} & -\frac{17}{40} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{53}{6} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{13}{20} & 1 & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{499}{130} & 0 & 0 & 0 & \frac{1687}{1410} & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{27}{50} & 0 & \frac{23}{40} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{3}{20} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{20} & -\frac{19}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{41}{90} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{1}{5}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{52}{15} & \frac{7}{10} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{23}{50} & -\frac{3}{5} & -\frac{17}{40} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{53}{6} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{13}{20} & 1 & \frac{9}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{499}{130} & 0 & 0 & 0 & \frac{1687}{1410} & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{27}{50} & 0 & \frac{23}{40} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{19}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{18}{5} & 0 & -\frac{39}{20} & \frac{27}{100} & 0 & -\frac{247}{720} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,3,4,6,9 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 76. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & -9 \\ 2 & 1 & -5 & -1 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & -8 & -\frac{1}{20} & -\frac{4}{9} & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 14 & \frac{7}{2} & -1 & -19 & 0 & -3 \\ -3 & \frac{14}{3} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 28 & 7 & \frac{1}{2} & -\frac{153}{4} & 0 & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 7 & 36 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{11} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{2}{27} & -2 & 1 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -2 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{16}{5} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{46} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{105}{2} & \frac{13}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{30} & -\frac{1}{9} & \frac{8}{5} & \frac{21}{16} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & -9 \\ 2 & 1 & -5 & -1 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 7 & 36 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{11} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{2}{27} & -2 & 1 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -2 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{16}{5} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{46} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{105}{2} & \frac{13}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{30} & -\frac{1}{9} & \frac{8}{5} & \frac{21}{16} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5809}{54} & 0 & 2 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{191}{4554} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{25913}{54} & 0 & \frac{53}{2} & -\frac{8}{3} & \frac{21}{4} & 0 & -\frac{332}{759} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{22781}{54} & 0 & 63 & \frac{13}{6} & \frac{69}{8} & 0 & -\frac{3029}{4554} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,6,8,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & -8 & -\frac{1}{20} & -\frac{4}{9} & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & -9 & 2 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 14 & \frac{7}{2} & -1 & -19 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & -1 & -8 & -3 & \frac{14}{3} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 28 & 7 & \frac{1}{2} & -\frac{153}{4} & 0 & \frac{1}{11} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 8 & \frac{1}{20} & \frac{4}{9} & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & -9 & 2 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 14 & \frac{7}{2} & -1 & -19 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & -1 & -8 & -3 & \frac{14}{3} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 28 & 7 & \frac{1}{2} & -\frac{153}{4} & 0 & \frac{1}{11} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 8 & \frac{1}{20} & \frac{4}{9} & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 2 & \frac{7}{3} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{7} & 14 & \frac{7}{2} & -25 & -\frac{383}{20} & -\frac{4}{3} & -3 \\ 2 & 1 & -5 & -1 & -8 & -3 & \frac{14}{3} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 28 & 7 & \frac{1}{2} & -\frac{153}{4} & 0 & \frac{1}{11} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 8 & \frac{1}{20} & \frac{4}{9} & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 2 & \frac{7}{3} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{7} & 14 & \frac{7}{2} & -25 & -\frac{383}{20} & -\frac{4}{3} & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 & -6 & -3 & \frac{14}{3} & \frac{17}{28} & -\frac{6}{7} & 28 & 7 & -\frac{15}{2} & -\frac{383}{10} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{11} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 8 & \frac{1}{20} & \frac{4}{9} & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 2 & \frac{7}{3} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{7} & 14 & \frac{7}{2} & -25 & -\frac{383}{20} & -\frac{4}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & -\frac{109}{28} & 0 & 0 & 0 & \frac{85}{2} & 0 & \frac{20}{9} & \frac{67}{11} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 2 & \frac{7}{3} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{7} & 14 & \frac{7}{2} & -25 & -\frac{383}{20} & -\frac{4}{3} & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 8 & \frac{1}{20} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & -\frac{109}{28} & 0 & 0 & 0 & \frac{85}{2} & 0 & \frac{20}{9} & \frac{67}{11} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,4,5,6,8 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 77. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \left[\begin{array}{cccc} -2 & -6 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & -3 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \left[\begin{array}{cccccccccc} 5 & -1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{17} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -\frac{15}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{34} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} & -4 & -9 & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cccccccccc} -5 & -1 & -\frac{21}{2} & \frac{1}{14} & 0 & 0 & 9 & -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{15} & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{1}{2} & -2 & 0 & 4 & -1 & -\frac{11}{2} \\ -1 & -\frac{8}{31} & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{19}{4} & -\frac{266}{155} & 0 & \frac{453}{70} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 13 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \left[\begin{array}{cccc} -2 & -6 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & -3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccccccccc} -5 & -1 & -\frac{21}{2} & \frac{1}{14} & 0 & 0 & 9 & -1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{15} & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{1}{2} & -2 & 0 & 4 & -1 & -\frac{11}{2} \\ -1 & -\frac{8}{31} & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{19}{4} & -\frac{266}{155} & 0 & \frac{453}{70} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 13 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 21 & 0 & \frac{27}{14} & \frac{32}{3} & -\frac{52}{3} & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & -\frac{63}{2} & 0 & -\frac{81}{28} & -16 & 26 & 0 & 0 & -\frac{69}{2} \end{array}\right]$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,4,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} -2 & -6 & -4 & 2 & 5 & -1 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{17} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 3 & 9 & 6 & -3 & -\frac{15}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{34} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} & -4 & -9 & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 3 & 2 & -1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{24} & \frac{1}{34} & -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 9 & 6 & -3 & -\frac{15}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{34} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} & -4 & -9 & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 3 & 2 & -1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{24} & \frac{1}{34} & -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{4} & -\frac{21}{2} & -\frac{19}{10} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,4,5,6,7 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 78. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f)=\left[\begin{array}{cccc} -3 & 6 & 6 & -6 \\ 2 & -4 & -4 & 4 \end{array}\right]\in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A=\left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -2 & -3 & -\frac{17}{18} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{17}{27} & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$B=\left[\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{9} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & -\frac{97}{6} & 1 & 4 & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{55}{18} & -1 & \frac{1}{4} & 0 & -1 & 0 & -2 & \frac{9}{2} & -1 & -\frac{9}{8} \end{array}\right]$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B)=M(f)\cdot B=\left[\begin{array}{cccc} -3 & 6 & 6 & -6 \\ 2 & -4 & -4 & 4 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{9} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & -\frac{97}{6} & 1 & 4 & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{55}{18} & -1 & \frac{1}{4} & 0 & -1 & 0 & -2 & \frac{9}{2} & -1 & -\frac{9}{8} \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & \frac{63}{4} & 0 & 15 & 3 & -103 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & -\frac{21}{2} & 0 & -10 & -2 & \frac{206}{3} & 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right]$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,3,7,8,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} -3 & 6 & 6 & -6 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -2 & -3 & -\frac{17}{18} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -4 & -4 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{17}{27} & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & -2 & -2 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{17}{54} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -4 & -4 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{17}{27} & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & -2 & -2 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{17}{54} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,3,6,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 79. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \left[\begin{array}{ccccc} -3 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & -8 & -4 & -4 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & -\frac{1}{6} & -2 & -\frac{6}{215} & 1 & \frac{1}{33} & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{21} & \frac{4}{3} & \frac{4}{99} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{25} & \frac{4}{9} \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cccccccccc} -1 & 2 & \frac{1}{2} & 11 & \frac{5}{11} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{9} & 1 & 6 & -\frac{1}{17} & -1 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{8} & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & 4 & 0 & \frac{26}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{49} & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -25 & 0 & -\frac{46}{3} & -6 & \frac{143}{98} & -\frac{515}{24} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \left[\begin{array}{ccccc} -3 & -3 & -6 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & -8 & -4 & -4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccccccccc} -1 & 2 & \frac{1}{2} & 11 & \frac{5}{11} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{9} & 1 & 6 & -\frac{1}{17} & -1 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{8} & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & 4 & 0 & \frac{26}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{49} & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & -25 & 0 & -\frac{46}{3} & -6 & \frac{143}{98} & -\frac{515}{24} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & -\frac{17}{6} & \frac{15}{2} & 0 & \frac{339}{187} & 0 & 22 & 0 & 0 & -\frac{93}{5} \\ 0 & -\frac{34}{9} & 10 & 0 & \frac{452}{187} & 0 & \frac{88}{3} & 0 & 0 & -\frac{124}{5} \end{array}\right]$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,4,6,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} -3 & -3 & -6 & -3 & -3 & 0 & -\frac{1}{6} & -2 & -\frac{6}{215} & 1 & \frac{1}{33} & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -4 & -4 & -8 & -4 & -4 & -1 & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{21} & \frac{4}{3} & \frac{4}{99} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{25} & \frac{4}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{2}{3} & \frac{2}{215} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{99} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -4 & -4 & -8 & -4 & -4 & -1 & -\frac{2}{9} & -\frac{8}{3} & \frac{11}{21} & \frac{4}{3} & \frac{4}{99} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{25} & \frac{4}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{2}{3} & \frac{2}{215} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{99} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{2533}{4515} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{391}{225} & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,3,5,6,10 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 80. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \left[\begin{array}{cccc} -1 & 4 & -5 & -3 \\ 2 & -8 & 1 & -3 \\ -2 & 8 & -5 & -1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
Aplicaciones Lineales	Clase: 30 min.

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{238}{5} & -65 & -1 & 1 & 1 & 5 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{21} \\ -1 & -\frac{82}{3} & 1 & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{19}{27} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 14 & -1 & -5 & -2 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{18} \\ 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{6} & -9 \\ \frac{57}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & -1 \\ -\frac{57}{4} & -\frac{1}{3} & 2 & 14 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{7}{12} & -\frac{5}{26} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 & -3 \\ 2 & -8 & 1 & -3 \\ -2 & 8 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 14 & -1 & -5 & -2 & -2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{18} \\ 7 & 0 & -1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{6} & -9 \\ \frac{57}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & -1 \\ -\frac{57}{4} & -\frac{1}{3} & 2 & 14 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{7}{12} & -\frac{5}{26} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{63}{2} & -\frac{97}{2} & -1 & 0 & 0 & \frac{31}{6} & 0 & -\frac{3553}{117} \\ 0 & 0 & \frac{63}{2} & -\frac{85}{2} & 2 & 0 & 0 & \frac{19}{6} & 0 & \frac{16723}{234} \\ 0 & 0 & -\frac{91}{2} & -\frac{39}{2} & -2 & 0 & 0 & \frac{17}{6} & 0 & -\frac{15607}{234} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,6,7,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} -1 & 4 & -5 & -3 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & -3 & -\frac{5}{3} & \frac{238}{5} & -65 & -1 & 1 & 1 & 5 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{21} \\ -2 & 8 & -5 & -1 & -1 & -\frac{82}{3} & 1 & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{19}{27} & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 1 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 1 & -3 & -\frac{5}{3} & \frac{238}{5} & -65 & -1 & 1 & 1 & 5 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{21} \\ -2 & 8 & -5 & -1 & -1 & -\frac{82}{3} & 1 & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{19}{27} & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 1 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & -\frac{5}{3} & \frac{228}{5} & -69 & -1 & 3 & 1 & 4 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{21} \\ -2 & 8 & -5 & -1 & -1 & -\frac{82}{3} & 1 & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{19}{27} & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 1 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & -\frac{5}{3} & \frac{228}{5} & -69 & -1 & 3 & 1 & 4 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -1 & -\frac{76}{3} & 5 & \frac{5}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{35}{27} & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{9}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 1 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{76}{15} & \frac{23}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{27} & -\frac{1}{189} \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -1 & -\frac{76}{3} & 5 & \frac{5}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{35}{27} & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 1 & -4 & 0 & -2 & -\frac{25}{27} & \frac{79}{3} & -\frac{109}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{49}{18} & -\frac{8}{27} & \frac{5}{189} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{76}{15} & \frac{23}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{27} & -\frac{1}{189} \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -1 & -\frac{76}{3} & 5 & \frac{5}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{35}{27} & -\frac{5}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 1 & -4 & 0 & -2 & -\frac{25}{27} & \frac{79}{3} & -\frac{109}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{49}{18} & -\frac{8}{27} & \frac{5}{189} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{27} & -\frac{76}{15} & \frac{23}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{27} & -\frac{1}{189} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{52}{27} & 0 & -\frac{100}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{71}{36} & 0 & -\frac{310}{189} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,4,5,8 (empezando a contar los índices desde 1). $\lozenge$

Ejercicio 81. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{67} & 0 & -2 & 1 & 1 & -22 & -\frac{1}{3} \\ \frac{13}{3} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 4 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{13}{20} & 2 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{13}{12} & -\frac{1}{3} & 3 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & -1 & -27 & -\frac{5}{3} & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{23}{28} & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{51}{4} & 3 & \frac{21}{8} & -4 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{2} & -1 & -27 & -\frac{5}{3} & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{23}{28} & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{51}{4} & 3 & \frac{21}{8} & -4 & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 27 & \frac{66}{5} & 0 & 0 & -\frac{1288}{33} & 0 & 22 & -\frac{62}{5} \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{20}{11} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{105}{4} & -\frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{302}{11} & 0 & -\frac{31}{2} & \frac{53}{10} \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,5,6,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 4 & -4 & -4 & -8 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{67} & 0 & -2 & 1 & 1 & -22 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 6 & \frac{1}{3} & -\frac{13}{20} & 2 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{13}{12} & -\frac{1}{3} & 3 & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{268} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 6 & \frac{1}{3} & -\frac{13}{20} & 2 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{13}{12} & -\frac{1}{3} & 3 & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{32} & \frac{1}{268} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} & \frac{67}{32} & -\frac{265}{268} & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{27}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 0 & -3 & -2 & \frac{13}{3} & \frac{3}{20} & \frac{39}{224} & \frac{269}{268} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{12} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} & \frac{67}{32} & -\frac{265}{268} & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{27}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 0 & -3 & -2 & \frac{13}{3} & \frac{3}{20} & \frac{39}{224} & \frac{269}{268} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{12} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{7} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{3} & 0 & \frac{501}{224} & \frac{3}{268} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{19}{2} & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,5,6,7,10 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 82. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \\ -4 & 8 \\ -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{25}{2} & 3 \\ 0 & -4 & 1 & \frac{1}{9} & -2 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -4 & 7 & -7 & 679 & -1 & -\frac{1}{2} & -12 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{7}{2} & -12 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -\frac{1}{3} & 17 & -\frac{1}{3} & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} & -1 & 2 & 0 & 8 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{41} \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{82} \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \\ -4 & 8 \\ -4 & 8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{3} & -1 & 2 & 0 & 8 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{41} \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{82} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{58}{7} & -\frac{9}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{232}{7} & 18 & 12 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{232}{7} & 18 & 12 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{232}{7} & 18 & 12 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{116}{7} & -9 & -6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,3,4,5,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrrr}
1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{25}{2} & 3 \\
-4 & 8 & 0 & -4 & 1 & \frac{1}{9} & -2 & 0 & 0 & -12 \\
-4 & 8 & 0 & -4 & 7 & -7 & 679 & -1 & -\frac{1}{2} & -12 \\
-4 & 8 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{7}{2} & -12 \\
2 & -4 & 0 & 2 & -1 & 1 & -\frac{1}{3} & 17 & -\frac{1}{3} & 6
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}}\left[\begin{array}{rr|rrrrrrrr}
1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{25}{2} & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{37}{9} & -2 & 4 & 50 & 0 \\
-4 & 8 & 0 & -4 & 7 & -7 & 679 & -1 & -\frac{1}{2} & -12 \\
-4 & 8 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{7}{2} & -12 \\
2 & -4 & 0 & 2 & -1 & 1 & -\frac{1}{3} & 17 & -\frac{1}{3} & 6
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}}\left[\begin{array}{rr|rrrrrrrr}
1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{25}{2} & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{37}{9} & -2 & 4 & 50 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & 679 & 3 & \frac{99}{2} & 0 \\
-4 & 8 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 & \frac{7}{2} & -12 \\
2 & -4 & 0 & 2 & -1 & 1 & -\frac{1}{3} & 17 & -\frac{1}{3} & 6
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}}\left[\begin{array}{rr|rrrrrrrr}
1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{25}{2} & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{37}{9} & -2 & 4 & 50 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & 679 & 3 & \frac{99}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 5 & \frac{107}{2} & 0 \\
2 & -4 & 0 & 2 & -1 & 1 & -\frac{1}{3} & 17 & -\frac{1}{3} & 6
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(1)}}\left[\begin{array}{rr|rrrrrrrr}
1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{25}{2} & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{37}{9} & -2 & 4 & 50 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -3 & 679 & 3 & \frac{99}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 5 & \frac{107}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{3} & 15 & -\frac{76}{3} & 0
\end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,2,8 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 83. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \left[\begin{array}{rrr} -3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Consideremos también las matrices

$$A = \left[\begin{array}{rrrrrrrrr} -\frac{7}{4} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{3} & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{27} & 0 & -\frac{2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{rrrrrrrrrr} 2 & -1 & 30 & -4 & \frac{1}{2} & 2 & -2 & 5 & -5 & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{3} & -18 & -137 & 64 & \frac{11}{4} & 2 & \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{18} & -1 & 0 & 1 & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{36} \end{array}\right]$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \left[\begin{array}{ccc} -3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccccccccc} 2 & -1 & 30 & -4 & \frac{1}{2} & 2 & -2 & 5 & -5 & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{3} & -18 & -137 & 64 & \frac{11}{4} & 2 & \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{18} & -1 & 0 & 1 & -1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{36} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccccccccc} -15 & 27 & -\frac{269}{3} & 6 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 18 & -\frac{538}{9} & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 6,7,8,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} -3 & 0 & 6 & -\frac{7}{4} & -\frac{8}{9} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{3} & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & \frac{2}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{27} & 0 & -\frac{2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & -2 & \frac{7}{12} & \frac{8}{27} & -\frac{1}{21} & \frac{13}{9} & -\frac{1}{27} & 0 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & \frac{2}{21} & \frac{1}{3} & \frac{2}{27} & 0 & -\frac{2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & -2 & \frac{7}{12} & \frac{8}{27} & -\frac{1}{21} & \frac{13}{9} & -\frac{1}{27} & 0 & \frac{1}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{43}{27} & 0 & \frac{29}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 3,5,6,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 84. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \left[\begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cccccc} 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccccc} 4 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,3,4 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|cccccccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,3,6 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 85. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,6,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,5,7,9 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 86. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,4,7,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,2,7,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 87. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 1 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 1 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,5,8,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$.$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,2,3,4,5,7 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 88. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,3,5 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,3,6 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 89. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,4,5,7 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,3,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 90. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,4,5,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,3,7,8,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 91. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,7,8,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 3,4,5,9 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 92. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,5,7 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,3,6,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 93. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,3,5,6,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,6,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). $\lozenge$

Ejercicio 94. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,4,6 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,4,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 95. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 6,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|cccccccccc} 4 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 3,7,8,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 96. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,4,6,7,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,6,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 97. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,3,4,6 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,6,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 98. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,4,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 4 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,2,3,4,7,10 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 99. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,3,5,8,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,2,5,7,9 (empezando a contar los índices desde 1). $\lozenge$

Ejercicio 100. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \left[\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cccccccccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cccccccccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccccccccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,4,5,6,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 4,6,7 (empezando a contar los índices desde 1). $\lozenge$

Ejercicio 101. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,3,4,5,7,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 4,5,6,7 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 102. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,5,6 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,4,5,6,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 103. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,3,6 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|cccccccc} 4 & 2 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 104. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,5,6,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,2,3,7 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 105. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 3,4 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,3,5,6,8 (empezando a contar los índices desde 1). ♢

Ejercicio 106. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,3 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 4,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 107. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,4 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,3,4 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 108. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 5,7,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,3,4,6,8,9 (empezando a contar los índices desde 1). ◊

Ejercicio 109. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,3,5,6,7 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,4,5 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 110. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,4,5 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 2,3,5 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 111. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 2,4,5,9,10 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 1,2,5,6,8 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 112. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,4 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 3,4,7 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 113. *Sea f la aplicación lineal asociada a la matriz*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Consideremos también las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Determina qué columnas de la matriz A están en la imagen de f.*
- *Determina qué columnas de la matriz B están en el núcleo de f.*

Solución: Para calcular los elementos que están en el núcleo vamos a calcular f aplicado a cada uno de los vectores multiplicando la matriz $M(f)$ por B.

$$f(B) = M(f)\cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los elementos del núcleo son las columnas con índices 1,2,4,5,8 (empezando a contar los índices desde 1). Para calcular los elementos que están en la imagen vamos a resolver todos los sistemas de un golpe haciendo la reducción de la matriz $M(f)$ ampliada con la matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas que nos dan un sistema compatible (la columna de términos independientes no es pivote) son las columnas con índices 4,6,7,8 (empezando a contar los índices desde 1). $\Diamond$

Ejercicio 114. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\left[\begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] \quad f\left(\left[\begin{array}{c} 7 \\ -3 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right]$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\left[\begin{array}{cc} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{array}\right]\right) = M(f)\left[\begin{array}{cc} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right].$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\left[\begin{array}{cc} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{array}\right]$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{7}{2}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -5 & -11 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 115. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -\frac{13}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -\frac{13}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{13}{2}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+8(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 1 & -13 \\ -7 & 1 & -16 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -2 & 33 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 116. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & -8 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & -8 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -8 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & -8 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{8}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{49}{8} & -\frac{3}{8} & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{49}{8} & -\frac{3}{8} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{4}{5}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{49}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{4}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{49}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{1}{4}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{49}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{10(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{49}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{3}{5}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{49}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{49}{10}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 9 & -49 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 10 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 15 & 9 & -49 \\ -3 & -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & \frac{37}{2} & -101 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{17}{2} \\ 23 & 14 & -75 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 117. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 118. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 11 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 11 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 10 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -9 \\ 7 & 4 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 119. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 120. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 9 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{9}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{9(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{7}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-\frac{5}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 9 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -7 \\ -2 & 1 & -5 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & -14 \\ -6 & 2 & -\frac{29}{2} \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 121. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -9 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & -9 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -2 & 5 \\ -10 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 & \frac{11}{2} \\ -21 & 3 & -10 \\ \frac{51}{2} & -3 & \frac{25}{2} \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 122. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+6(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 5 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 123. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & -1 & 0 \\ -2 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 124. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-7(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 125. *Calcula la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u=f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right)=M(f)\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 7 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{7}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{7(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{2}{7}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f)=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 126. *Calcula la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u=f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\right)=M(f)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 127. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -9 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -9 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{9}{4}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -\frac{3}{2} & 7 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 128. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 13 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 13 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{19}{2} & \frac{7}{2} \\ -2 & -12 & 3 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 129. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 130. *Calcula la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}-1\\4\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}-3\\-6\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u=f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix}1&-1&-3\\1&4&-6\\0&2&-1\end{bmatrix}\right)=M(f)\begin{bmatrix}1&-1&-3\\1&4&-6\\0&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix}1&-1&-3\\1&4&-6\\0&2&-1\end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-3&1&0&0\\1&4&-6&0&1&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-3&1&0&0\\0&5&-3&-1&1&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-3&1&0&0\\0&1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-\frac{18}{5}&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-\frac{18}{5}&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&0&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{5(3)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-\frac{18}{5}&\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&0&1&2&-2&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{18}{5}(3)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&-7&18\\0&1&-\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&0&1&2&-2&5\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(2)+\frac{3}{5}(3)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&-7&18\\0&1&0&1&-1&3\\0&0&1&2&-2&5\end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-7&18\\1&-1&3\\2&-2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&-10&26\\10&-9&24\end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 131. *Calcula la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix}-3\\-1\\-2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}6\\1\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\quad f\left(\begin{bmatrix}-4\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u=f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix}-3&6&-4\\-1&1&1\\-2&3&0\end{bmatrix}\right)=M(f)\begin{bmatrix}-3&6&-4\\-1&1&1\\-2&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&2&2\\2&1&0\end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{10}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -12 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{7}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -12 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -12 & 10 \\ -2 & -8 & 7 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -8 & -32 & 27 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 132. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} -8 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} -8 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} -8 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -8 & 8 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{8}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{29}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-8(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{29}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{29}{8}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -11 & 1 & 29 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -11 & 1 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -8 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 1 & 29 \\ -9 & 1 & 24 \\ 3 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 20 & -2 & -53 \\ -4 & 0 & 10 \\ -\frac{19}{2} & \frac{3}{2} & 25 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 133. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 13 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & -16 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & -16 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -16 & 4 \\ 3 & 13 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 1 \\ 4 & 23 & -6 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 134. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 135. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 136. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 137. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 138. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 139. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{Z}_5{}^3 \to \mathbb{Z}_5{}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 140. *Calcula la aplicación lineal* $f : \mathbb{Z}_5{}^3 \to \mathbb{Z}_5{}^3$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$
.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 141. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 142. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 143. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 144. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 145. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 146. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\diamond$

Ejercicio 147. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\diamond$

Ejercicio 148. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 149. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 150. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 151. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_5}^2 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 152. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^4$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 153. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_5}^3 \to {\mathbb{Z}_5}^3$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

.

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 154. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_3}^2 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 155. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^2 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 156. *Calcula la aplicación lineal* $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^3$ *que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 157. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 158. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\lozenge$

Ejercicio 159. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^2$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 160. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3{}^3 \to \mathbb{Z}_3{}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 161. *Calcula la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3{}^3 \to \mathbb{Z}_3{}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 162. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^4$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 163. *Calcula la aplicación lineal $f : {\mathbb{Z}_3}^3 \to {\mathbb{Z}_3}^3$ que cumple las siguientes condiciones:*

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como $M(f)u = f(u)$ para cualquier vector u, vamos a aplicarlo a los vectores columna que conocemos para deducir que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = M(f)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para despejar $M(f)$ vamos a multiplicar por la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ que calcularemos utilizando el método habitual de reducir por filas la matriz ampliada con la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Multiplicando por la inversa despejamos $M(f)$:

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

A. Representación matricial de aplicaciones lineales

En este apéndice vamos a ver un poco más en detalle el hecho de que toda aplicación lineal esté representada por una matriz. Este tipo de demostraciones son sencillas desde el punto de vista conceptual, pero un poco complicadas de escribir debido a la notación, por eso se deja como apéndice y no como parte fundamental del tema. Esta demostración, que desde el punto de vista matemático es clarificadora, puede tener el efecto contrario si no estáis acostumbrados al lenguaje matemático.

Empecemos recordando que hacer una operación elemental a varios vectores $u_1, u_2, \cdots, u_p$ es lo mismo que hacer la operación elemental a la matriz que tiene los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_p$ como columnas. El resultado lo tendremos el las columnas de la matriz que nos quede.

Haremos lo mismo para las aplicaciones lineales. Si $f : K^n \to K^m$ es lineal y tomamos varios vectores $u_1, u_2, \cdots, u_p \in K^n$, para calcular $f(u_i)$ para todos los vectores al mismo tiempo, tomaremos la matriz $B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \vdots & u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ y definiremos $f(B)$ como la matriz que tiene como columnas los vectores $f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_p)$. Si la aplicación lineal f viene dada por una matriz A, entonces $f(B)$ es lo mismo que multiplicar A por cada columna de B y por lo tanto tenemos que $f(B) = AB$, el producto de matrices ordinario.

Proposición 164. *Sea $f : K^n \to K^m$ una aplicación lineal, $M(f) = f(I)$ la matriz de tamaño $m \times n$ sobre K que resulta de aplicar f a las columnas de la matriz identidad, entonces*

$$f(x) = M(f)x$$

para cualquier vector columna x de K^n.

Demostración. Sea $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ un vector columna cualquiera de K^n y vamos a denotar $v_1, v_2, \cdots, v_n$ a los vectores que resultan de aplicar f a las columnas de la matriz identidad, es decir,

$$M(f) = f(I) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \vdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

El vector x puede escribir como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

y aplicando el hecho de que f es lineal, podemos poner

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = f\left(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x_1 f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \cdots + x_n f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \vdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = f(I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M(f) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$\square$

Notemos que si la aplicación lineal f viene dada por una matriz A, entonces

$$M(f) = f(I) = AI = A.$$