Vídeo : `https://youtu.be/GMWT1vR114U`

1. Resumen

El determinante de una matriz A, que denotaremos $|A|$ es una función que dada una matriz cuadrada $A \in \mathbf{M}_{n\times n}(K)$ nos da un valor de K. El siguiente teorema nos garantiza la existencia y unicidad de dicha aplicación.

Teorema 1. *Sea K un cuerpo y n un entero positivo. Entonces existe una única aplicación que asigna a cada matriz cuadrada $A \in \mathbf{M}_{n\times n}(K)$ un valor $|A| \in K$ cumpliendo las siguientes propiedades:*

1. $|E_{\lambda(p)}A| = \lambda|A|$ *para toda fila p y todo $\lambda \in K$ distinto de 0.*
2. $|E_{(p)+\lambda(q)}A| = |A|$ *para toda fila p y q con $p \neq q$ y todo λ.*
3. $|E_{(p,q)}A| = -|A|$ *para toda fila p y q con $p \neq q$.*
4. *Si A tiene una fila de ceros, entonces $|A| = 0$.*
5. $|I| = 1$.

Aunque no es trivial, se pueden encontrar aplicaciones que no son el determinante y que cumplen las condiciones 1,2,3 y 4 y también las condiciones 1,2,3 y 5 (este segundo ejemplo no es nada fácil de encontrar).
La unicidad del teorema se puede deducir del hecho de que estas propiedades nos permiten calcular todos los determinantes. Para hacer ese cálculo vamos a realizar un proceso similar al de reducción por filas, hasta que lleguemos a la identidad (y podremos aplicar que vale 1) o tengamos una fila de ceros (donde aplicaremos que el determinante vale 0).
Cada vez que hagamos una operación elemental en el determinante, compensaremos el cambio multiplicando el determinante por una constante. Veámoslo para cada operación elemental:

1. Como $|E_{\lambda^{-1}(p)}A| = \lambda^{-1}|A|$, escribiremos $|A| = \lambda|E_{\lambda^{-1}(p)}A|$ cada vez que multipliquemos por el inverso del pivote. Es como sacar el pivote fuera del determinante como factor común de toda una fila para poder hacer la operación y que no se altere el determinante. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

porque en la segunda matriz hemos hecho la operación $E_{\frac{1}{2}(1)}$ y para compensar el cambio que se produce en el resultado debemos multiplicar por 2.

2. Como $|E_{(p)+\lambda(q)}A| = |A|$, podremos hacer este tipo de operaciones manteniendo el símbolo igual y sin hacer ningún cambio.

3. Como $|E_{(p,q)}A| = -|A|$, si hacemos este tipo de operaciones, tendremos que cambiar el signo que tenemos fuera del determinante.

Como ejemplo, vamos a calcular el siguiente determinante en $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{4(1)}}{=} 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} 4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{E_{(4)+4(1)}}{=} 4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{E_{(1)+1(2)}}{=} 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{E_{(3)+4(2)}}{=} 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{E_{(4)+3(2)}}{=} 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{E_{4(3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{E_{(2)+3(3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{E_{(4)+3(3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{E_{(2)+3(4)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{E_{(3)+2(4)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Hay una serie de propiedades que se pueden deducir directamente de la definción y que demostraremos en el apéndice de este documento:

Proposición 2. *El determinante cumple las siguientes propiedades:*

1. *A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$.*
2. *$|AB| = |A| \cdot |B|$ para cualesquiera matrices $A, B \in \mathbf{M}_{n\times n}(K)$.*
3. *$|A^T| = |A|$.*

Para calcular el determinante realmente no necesitamos la reducción completa. Podemos simplificar los cálculos utilizando el algoritmo de triangularización. Para utilizar este algoritmo, lo primero que podemos notar es que únicamente tenemos que hacer ceros debajo de la diagonal. Los valores que aparecen encima de la diagonal podemos ignorarlos tal y como nos indica la siguiente proposición en la que representaremos con $*$ un elemento cualquiera de K.

Proposición 3. *El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.*

Demostración. Como $|A^T| = |A|$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la matriz A es triangular superior.
Si todos los elementos de la diagonal principal son distintos de 0, podemos sacarlos factor común de cada una de las filas y el determinante nos quedaría de la forma:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n \begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

porque la matriz que tiene unos en la diagonal principal, haciendo operaciones del segundo tipo (que no alteran el determinante) se reduciría a la matriz identidad.
Por último, si la matriz es triangular y alguno de los elementos de la diagonal principal es 0, nos faltaría un pivote y al hacer la reducción completa obtendríamos al menos una fila de ceros, con lo que el determinante sería 0, lo mismo que el producto de los elementos de la diagonal (porque al menos uno de ellos es 0). □

También podemos eliminar la primera fila y columna cada vez que hayamos hecho ceros en toda la columna debajo del pivote, como nos indica la siguiente proposición:

Proposición 4. *Sea A una matriz cuadrada y $\lambda \in K$, entonces* $\left|\begin{array}{c|c} \lambda & * * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right| = \lambda |A|$.

Demostración. Si $\lambda = 0$ entonces la matriz tiene una columna de ceros y el determinante es 0 porque el de su traspuesta sería 0.
Si $\lambda \neq 0$ y continuamos el proceso de triangularización, las operaciones que hagamos en la matriz A no alteran la parte superior porque no haremos reducciones por encima de los pivotes. Luego multiplicaremos los elementos de la diagonal principal de la matriz final que estará formada por λ junto con los elementos de la diagonal principal de la forma triangular de A, lo que nos da la fórmula. $\square$

Con estas dos propiedades, calcularemos el determinante haciendo la triangularización, de forma que las operaciones de intercambio de filas alternarán el signo que hay fuera del determinante y las operaciones de sumar a una fila un múltiplo de otra, no alterarán el valor del determinante. Si en algún momento un pivote se deplazara de la diagonal principal, ya podemos asegurar que el determinante será 0 porque no tendremos suficientes pivotes para cubrir todas las filas. Al llegar a la forma triangular, multiplicaremos los elementos de la diagonal. También podemos hacer uso de la proposición anterior para reducir el tamaño de la matriz si nos interesa. Veamos un ejemplo sobre $\mathbb{Q}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)-1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)-2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -5 & \frac{5}{2} & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+\frac{1}{2}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -5 & \frac{5}{2} & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+\frac{5}{3}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(1,2)}}{=} -3 \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{15}{2}.$$

Para realizar el cálculo de los determinantes, hay una enorme cantidad de opciones posibles. Utilizar unas u otras depende de nuestras preferencias o de la forma particular que pueda tener una matriz. Utilizando el hecho de que $|A| = |A^T|$, todas las operaciones que hacemos por filas, también las podemos realizar por columnas, incluso mezclar operaciones fila con operaciones columna.
Otra propiedad importante que tienen los determinantes y que podemos usar para calcularlos es la multilinealidad. Podemos considerar el determinante una función aplicada a los vectores columna y si fijamos todas las columnas menos una, la función aplicada a esa única columna es lineal.

Vamos a verlo con un ejemplo: Consideremos la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Vamos a fijar los valores de la segunda columna y vamos a considerar la función $f : K^2 \to K$ dada por

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Que esta función sea lineal, significa que

1. $f\left(\begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda c \end{bmatrix}\right) = \lambda f\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right)$ es decir, $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.
2. $f\left(\begin{bmatrix} a+a' \\ c+c' \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a' \\ c' \end{bmatrix}\right)$ es decir, $\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$.

Esta propiedad nos permite calcular la fórmula genérica de un determinante 2×2, porque

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 1 & d \\ 0 & b \end{vmatrix} = ad - cb.$$

También podemos deducir la famosa fórmula de Sarrus para el determinante 3×3.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ i & j & k \end{vmatrix} =$$

$$a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & j & k \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & f \\ 0 & j & k \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & j & k \end{vmatrix} =$$

$$a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & j & k \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} 1 & e & f \\ 0 & b & c \\ 0 & j & k \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} 1 & j & k \\ 0 & b & c \\ 0 & e & f \end{vmatrix} =$$

$$a\begin{vmatrix} e & f \\ j & k \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ j & k \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} =$$

$$a(ek - fj) - d(bk - cj) + i(bf - ce) = aek + dcj + ibf - afj - dbk - ice.$$

Esta forma de aplicar la linealidad utilizando que

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots a_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

y luego alternar el signo para eliminar la fila y la columna es lo que se llama desarrollo del determinante por una columna. En realidad lo hemos hecho con la primera, pero como podemos intercambiar columnas haciendo el cambio de signo adecuado, esto lo podemos hacer con cualquier columna. También lo podemos hacer con cualquier fila teniendo en cuenta que el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

La multilinealidad es muy útil para calcular determinantes que tienen algún valor en forma de variable. También se puede utilizar para deducir la Fórmula de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones y que veremos en el apéndice, pero que no usaremos durante este curso porque la reducción de Gauss es casi siempre mas rápida y se puede aplicar en todos los casos.

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Ejercicio 5. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)-2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)-2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{9}{2} & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(5)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{9}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,4)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} & 3 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} & 3 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & \frac{17}{2} & -3 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & \frac{17}{2} & -3 \\ 0 & -\frac{15}{2} & 13 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+\frac{15}{17}(1)}}{=} \begin{vmatrix} \frac{17}{2} & -3 \\ 0 & \frac{176}{17} \end{vmatrix} = 88.$$

◊

Ejercicio 6. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & 6 & -8 \\ 3 & 3 & -5 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & 6 & -8 \\ 3 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 & -8 \\ 3 & 4 & 5 & -7 \\ -2 & -3 & -5 & 7 \\ 3 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & 23 & -31 \\ -2 & -3 & -5 & 7 \\ 3 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)-2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & 23 & -31 \\ 0 & -3 & -17 & 23 \\ 3 & 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & 23 & -31 \\ 0 & -3 & -17 & 23 \\ 0 & 3 & 13 & -19 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+\frac{3}{4}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 23 & -31 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 3 & 13 & -19 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)-\frac{3}{4}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 23 & -31 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{17}{4} & \frac{17}{4} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+17(1)}}{=} 4 \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Diamond$

Ejercicio 7. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-\frac{1}{14}(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 0 & -\frac{5}{14} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 8. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -6 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 8 & -6 \\ -1 & 7 & -3 & 9 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & -6 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 8 & -6 \\ -1 & 7 & -3 & 9 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 8 & -6 \\ -1 & 7 & -3 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 8 & -6 \\ -1 & 7 & -3 & 9 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 8 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 5 & -4 & 8 & -6 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+5(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)-1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 9. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & -7 \\ 2 & 5 & 6 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 & -7 \\ 2 & 5 & 6 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-\frac{2}{5}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 & -7 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{11}{5} \\ 4 & 4 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-\frac{4}{5}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 & -7 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)-\frac{2}{5}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 & -7 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+\frac{4}{13}(1)}}{=} 5 \begin{vmatrix} \frac{13}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{1}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{2}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+\frac{2}{13}(1)}}{=} 5 \begin{vmatrix} \frac{13}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{1}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & \frac{46}{13} & -\frac{46}{13} \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)-46(1)}}{=} 13 \begin{vmatrix} \frac{1}{13} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 10. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)-1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+\frac{1}{2}(1)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+\frac{4}{9}(1)}}{=} - \begin{vmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{41}{18} \end{vmatrix} = -\frac{41}{4}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 11. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-\frac{1}{4}(1)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} 4 \begin{vmatrix} -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{4} & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)-\frac{7}{4}(1)}}{=} -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{4} \end{vmatrix} = 11.$$

$\Diamond$

Ejercicio 12. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+5(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

$\Diamond$

Ejercicio 13. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -5 & -7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ -2 & -4 & -1 & -6 \\ -4 & -3 & -9 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 & -7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ -2 & -4 & -1 & -6 \\ -4 & -3 & -9 & -7 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+\frac{4}{3}(1)}}{=} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & -4 & -1 & -6 \\ -4 & -3 & -9 & -7 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-\frac{2}{3}(1)}}{=} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -4 & -3 & -9 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)-\frac{4}{3}(1)}}{=} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 & -7 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-4(1)}}{=} -3 \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+7(1)}}{=} -3 \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

◊

Ejercicio 14. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-\frac{1}{2}(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)-1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-6(1)}}{=} \frac{5}{2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 10.$$

◊

Ejercicio 15. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -9 \\ -2 & 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -9 \\ -2 & 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 16. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,5)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)-2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 17. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-\frac{1}{2}(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-2(1)}}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = -9.$$

◊

Ejercicio 18. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -6 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -6 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(1,2)}}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-2(1)}}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} -2 \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Diamond$

Ejercicio 19. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+\frac{1}{2}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+\frac{1}{2}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 3 & \frac{9}{2} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-6(1)}}{=} -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} = \frac{15}{8}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 20. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+\frac{1}{2}(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)-2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(5)-2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -3 & -\frac{17}{4} \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)-8(1)}}{=} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -3 & -\frac{17}{4} \\ 0 & 10 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+\frac{7}{6}(1)}}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{37}{12} \\ 10 & 5 & 10 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-\frac{10}{3}(1)}}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{37}{12} \\ 0 & -\frac{25}{3} & \frac{20}{3} \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+5(1)}}{=} \frac{3}{2} \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{37}{12} \\ 0 & -\frac{35}{4} \end{vmatrix} = -\frac{175}{8}.$$

◊

Ejercicio 21. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

◊

Ejercicio 22. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-6(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 0.$$

$\Diamond$

Ejercicio 23. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 3.$$

$\Diamond$

Ejercicio 24. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{R})$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)-2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\overset{E_{(4)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)-2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$\overset{E_{(2)+\frac{3}{2}(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1.$$

$\Diamond$

Ejercicio 25. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(1,3)}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

$\Diamond$

Ejercicio 26. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+4(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2.$$

$\Diamond$

Ejercicio 27. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 28. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

◊

Ejercicio 29. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

◊

Ejercicio 30. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+4(1)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

◊

Ejercicio 31. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

◊

Ejercicio 32. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

◊

Ejercicio 33. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+4(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Diamond$

Ejercicio 34. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

$\Diamond$

Ejercicio 35. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,4)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3.$$

◊

Ejercicio 36. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+4(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 37. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1.$$

◊

Ejercicio 38. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(\underline{1},4)}}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(\underline{1},2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+4(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

◊

Ejercicio 39. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(\underline{1},2)}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(\underline{1},2)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+2(1)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3.$$

◊

Ejercicio 40. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+3(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1.$$

◊

Ejercicio 41. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 42. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 43. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+3(1)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+1(1)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+4(1)}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 44. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,5)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(4)+1(1)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+1(1)}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+3(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.$$

◊

Ejercicio 45. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 46. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

◊

Ejercicio 47. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 48. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Diamond$

Ejercicio 49. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Diamond$

Ejercicio 50. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(5)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$\Diamond$

Ejercicio 51. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 52. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3,3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,3)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(1,2)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

◊

Ejercicio 53. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+2(1)}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

Ejercicio 54. *Calcula el determinante de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4,4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(3)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{E_{(4)+2(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{E_{(2)+1(1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

◊

A. Propiedades del Determinante

Proposición 55. *El determinante cumple las siguientes propiedades:*

1. *A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$.*
2. *$|AB| = |A|\ |B|$ para cualesquiera matrices $A, B \in \mathbf{M}_{n\times n}(K)$.*
3. *$|A^T| = |A|$.*

Demostración. Conocer el valor del determinante en las matrices elementales es inmediato porque no tenemos más que aplicar las condiciones 1,2 y 3 del teorema inicial tomando $A = I$ con lo que deducimos:

a. $|E_{\lambda(p)}| = |E_{\lambda(p)}(I)| = \lambda|I| = \lambda$ para toda fila p y todo $\lambda \in K$ distinto de 0.

b. $|E_{(p)+\lambda(q)}| = |E_{(p)+\lambda(q)}(I)| = |I| = 1$ para toda fila p y q con $p \neq q$ y todo λ.

c. $|E_{(p,q)}| = |E_{(p,q)}(I)| = -|I| = -1$ para toda fila p y q con $p \neq q$.

Esto prueba por un lado que el determinante de cualquier matriz elemental es distinto de 0 y además, utilizando estas tres propiedades y de nuevo las propiedades 1,2 y 3 de la defінción podemos deducir que $|EA| = |E|\ |A|$ para cualquier operación elemental E:

d. $|E_{\lambda(p)}A| = \lambda|A| = |E_{\lambda(p)}|\ |A|$ para toda fila p y todo $\lambda \in K$ distinto de 0.

e. $|E_{(p)+\lambda(q)}A| = |A| = |E_{(p)+\lambda(q)}|\ |A|$ para toda fila p y q con $p \neq q$ y todo λ.

f. $|E_{(p,q)}A| = -|A| = |E_{(p,q)}|\ |A|$ para toda fila p y q con $p \neq q$.

Esto prueba que si hacemos la reducción por filas, $R = E_kE_{k-1}\cdots E_1A$ y calculamos determinantes, tenemos que

$$|R| = |E_kE_{k-1}\cdots E_1A| = |E_k|\ |E_{k-1}\cdots E_1A| = \cdots = \underbrace{|E_k|\ |E_{k-1}|\ \cdots|E_1|}_{\neq 0}|A|.$$

Si A no es invertible, R tendrá al menos una fila de ceros y por lo tanto $|R) = 0$ y usando la fórmula anterior, $|A| = 0$. Por otro lado, si A es invertible, R será la matriz identidad y $|A|$ será el inverso de $|E_k|\ |E_{k-1}|\cdots|E_1|$ que es distinto de 0.

Para demostrar que $|AB| = |A|\ |B|$, vamos a considerar dos casos. El primer caso es que A no sea una matriz invertible. En este caso tampoco AB puede ser invertible, porque si tuviera un inverso, $(AB)^{-1}$ entonces $AB(AB)^{-1} = I$ y eso implica que $B(AB)^{-1}$ es un inverso de A, lo cual es imposible. Entonces tanto A como AB son no invertibles y su determinante es 0, por lo tanto

$$|AB| = 0 = 0 \cdot |B| = |A|\ |B|.$$

El segundo de los casos es que A sea una matriz invertible. Entonces su reducida por filas es la matriz identidad y podemos poner $I = R = E_kE_{k-1}\cdots E_1A$. Vamos a llamar $\alpha = |E_k|\ |E_{k-1}|\cdots|E_1|$. Sabemos que

$$1 = |I| = |R| = \underbrace{|E_k|\ |E_{k-1}|\cdots|E_1|}_{\alpha\neq 0}|A| = \alpha|A|.$$

y por otro lado

$$|B| = |IB| = |E_k\cdots E_1AB| = |E_k|\ |E_{k-1}|\cdots|E_1|\ |AB| = \alpha|AB|$$

Multiplicando ambos miembros por $|A)$ y teniendo en cuenta que $\alpha|A| = 1$, deducimos que

$$|A|\ |B| = |AB|.$$

Para ver (3) estudiaremos también dos casos, que A sea invertible o que no. Si no lo es, tampoco lo será A^T y ambas tendrán determinante igual a 0, por lo que el resultado será cierto. Si A es invertible, A se podrá poner como producto de matrices elementales $A = E_1E_2\cdots E_k$. Para las matrices elementales tenemos que

g. $E_{\lambda(p)} = E^T_{\lambda(p)}$, por lo tanto $|E_{\lambda(p)}| = |E^T_{\lambda(p)}|$ para toda fila p y todo $\lambda \in K$ distinto de 0.

h. $E^T_{(p)+\lambda(q)} = E_{(q)+\lambda(p)}$ y entonces ambas tienen determinante 1 para toda fila p y q con $p \neq q$ y todo λ.

i. $E^T_{(p,q)} = E_{(p,q)}$, por lo tanto $|E^T_{(p,q)}| = |E_{(p,q)}|$ toda fila p y q con $p \neq q$.

por lo tanto si llamamos $\alpha_i = |E_i| = |E_i^T|$ tenemos que

$$|A| = |E_1E_2\cdots E_k| = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$$
$$|A^T| = |(E_1E_2\cdots E_k)^T| = |E_k^T\cdots E_2^TE_1^T| = \alpha_k\cdots\alpha_2\alpha_1$$

Como los α_i están en un cuerpo, el orden del producto no importa y ambos determinantes son iguales. □

B. Fórmula de Cramer

Vamos a demostrar la fórmula de Cramer únicamente para sistemas de tres ecuaciones y tres incógnitas. La demostración general es exactamente la misma, pero la notación para demostrarla es un poco complicada. Las propiedades que se necesitan para hacer la demostración es la multilinealidad de la función determinante y el hecho de que si un determinante tiene dos columnas iguales, el valor es 0. Esto último es cierto porque podríamos restar a una de las columnas la otra y obtendríamos una columna de ceros.

El resultado es el siguiente:

Teorema 56 (Fórmula de Cramer)**.** *Supongamos que el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

es compatible determinado, entonces tenemos que

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Demostración. Lo primero que debemos notar es que al ser un sistema compatible determinado, la matriz de los coeficientes tiene rango máximo y por lo tanto su determinante es distinto de 0. Eso nos permite poner en los denominadores el valor de dicho determinante porque siempre será distinto de 0.

Para hacer la demostración, fijémonos que el vector de los términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{21} + x_3a_{31} \\ x_1a_{12} + x_2a_{22} + x_3a_{32} \\ x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{0 \text{ porque } col_1 = col_2} + x_3 \underbrace{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{0 \text{ porque } col_1 = col_3} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Pasando el determinante que multiplica a x_1 al denominador en el otro miembro obtenemos la fórmula para x_1. Para x_2 y x_3 se deducen utilizando la misma técnica. $\square$