	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Vídeo : [https://youtu.be/KZ4Tb\\_ixooQ](https://youtu.be/KZ4Tb_ixooQ)

## 1. Resumen

Empecemos recordando lo que es la representación implícita y paramétrica de un espacio vectorial:

**Definición 1.** Sea  $V \leq K^m$  un espacio vectorial,  $B \in \mathbf{M}_{m \times n}(K)$  y  $H \in \mathbf{M}_{p \times m}(K)$ . Diremos que  $V$  viene dado en forma paramétrica cuando el conjunto de vectores de  $V$  está definido como

$$V = C(B) = \{y \mid y = Bx \text{ para algún vector de parámetros } x\}$$

Diremos que está en forma implícita cuando

$$V = N(H) = \{y \mid Hy = 0\}$$

Lo que vamos a estudiar en este tema es cómo pasar de una representación a otra. Empecemos viendo cuando  $C(B)$  está contenido en  $N(H)$ .

**Proposición 2.** Sean  $B \in \mathbf{M}_{m \times n}(K)$  y  $H \in \mathbf{M}_{p \times m}(K)$ . Entonces  $C(B) \leq N(H)$  si y solo si  $HB = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $C(B) \leq N(H)$ , entonces para todo  $x \in K^n$  se tiene que  $Bx \in C(B) \leq N(H)$  por lo que  $H(Bx) = 0$ . Como esto es cierto para todos los vectores  $x \in K^n$ , lo podemos aplicar para las columnas de la matriz identidad y decir que  $HB = HBI = 0$ .

Recíprocamente, supongamos que  $HB = 0$  y que tenemos un vector  $y \in C(B)$ . Por definición de  $C(B)$  tenemos que  $y = Bx$  para algún vector de parámetros  $x$ , pero entonces  $Hy = HBx = 0 \cdot x = 0$  y eso prueba que  $y \in N(H)$ .  $\square$

En el caso particular de que un mismo espacio vectorial  $V$  venga representado de las dos formas,  $V = C(B)$  y  $V = N(H)$ , esta proposición nos dice que  $HB = 0$ , pero esta condición no es suficiente para garantizar la igualdad.


Vamos a ver el problema con un ejemplo: supongamos que  $V$  es el espacio  $C(B)$  siendo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5,3}(\mathbb{Z}_5).$$

Un vector  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$  estará en  $V$  si y solo si podemos encontrar un vector de parámetros  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  tal

que  $Bx = y$ . Escrito en forma de ecuaciones, eso significa que el siguiente sistema de ecuaciones tiene que ser compatible:

$$\begin{aligned} 3x_2 + 3x_3 &= y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= y_2 \\ x_1 + 4x_2 &= y_3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= y_4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= y_5 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática					Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta					Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial					Clase: 30 min.

Vamos a resolver el sistema tomando la matriz ampliada y poniendo los valores  $y_i$  como variables. Eso nos da la matriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & y_1 \\ 2 & 4 & 1 & y_2 \\ 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 2 & 3 & 0 & y_4 \\ 3 & 3 & 1 & y_5 \end{array} \right]$$

Para reducirla, vamos a alinear cada una de las variables  $y_i$  en una columna diferente

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 2 & 4 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 2 & 3 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +1y_4 & +0y_5 \\ 3 & 3 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +1y_5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 2 & 4 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_5 \\ 2 & 3 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +1y_4 & +0y_5 \\ 3 & 3 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +1y_5 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 2 & 3 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 3 & 3 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +1y_5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 3 & 3 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +1y_4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 3 & 3 & 1y_1 & +0y_2 & +0y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +2y_3 & +0y_4 & +1y_4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +0y_2 & +2y_3 & +0y_4 & +1y_4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +4y_2 & +4y_3 & +0y_4 & +1y_4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0y_1 & +1y_2 & +3y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1y_1 & +2y_2 & +1y_3 & +0y_4 & +0y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +4y_2 & +4y_3 & +0y_4 & +1y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0y_1 & +0y_2 & +3y_3 & +1y_4 & +0y_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$


El sistema será compatible si y solo si la columna de los términos independientes no es pivote y eso sucederá si y solo si

$$\begin{aligned} 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 + 0y_4 + 0y_4 &= 0 \\ 0y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 0y_4 + 1y_4 &= 0 \\ 0y_1 + 0y_2 + 3y_3 + 1y_4 + 0y_4 &= 0 \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hemos encontrado la matriz  $H$  que nos da la condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución y por lo tanto  $y$  esté en  $C(B)$ . La razón por la que hemos puesto la columna de estos términos independientes de esta forma es para que nos demos cuenta de que cada  $y_i$  va por separado y no interfiere con el comportamiento de las otras variables, por lo que esta reducción es totalmente equivalente a la siguiente:

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(2)+3(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(5)+2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(5)+4(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right]
\end{array}$$

y la matriz  $H$  es la que nos queda a la derecha de los ceros una vez que tenemos identificadas todas las filas pivote de la matriz reducida. Vamos a poner el resultado en forma de teorema:


**Teorema 3.** Sea  $B$  una matriz y  $V$  el espacio generado por las columnas de  $B$ ,  $C(B)$ . Para calcular la representación implícita del espacio  $V$  tomaremos la matriz  $[B|I]$  y la reduciremos por filas (o la triangularizaremos) para obtener una matriz de la forma  $\left[ \begin{array}{c|c} R_0 & A \\ \hline 0 & H \end{array} \right]$  donde en la matriz  $R_0$  todas las filas tienen elemento pivote. Entonces  $V$  en forma implícita es  $V = N(H)$  para la matriz  $H$  que aparece a la derecha de los ceros en esta reducción.

Como podemos ver, cuando tenemos matrices  $B \in \mathbf{M}_{m \times n}(K)$  y  $H \in \mathbf{M}_{p \times m}(K)$  tales que  $HB = 0$  tenemos una relación del tipo  $C(B) \leq N(H)$ , pero para que la igualdad se de, de alguna forma tienen que tomarse de forma óptima, por ejemplo, el sistema  $Hy = 0$  está formado por tres ecuaciones:

$$N \left( \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \right) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 + 0y_4 + 0y_5 = 0 \\ 0y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 0y_4 + 1y_5 = 0 \\ 0y_1 + 0y_2 + 3y_3 + 1y_4 + 0y_5 = 0 \end{array} \right\}$$

Cada una de estas ecuaciones supone una restricción al total de vectores que podemos tomar. Si eliminamos una de las ecuaciones, quitamos restricciones para tomar los vectores y por lo tanto tendremos (en general) más vectores

$$N \left( \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \right) \leq N \left( \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \right) \leq N \left( \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \right).$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Lo mismo sucede en el caso de los espacios generados por un conjunto, cuantos más elementos generadores tengamos, más vectores podremos generar (en general), así

$$C \left( \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right) \geq C \left( \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right) \geq C \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

De alguna forma, al calcular  $H$  en función de  $B$  como nos indica el Teorema 3, estamos encontrando el  $H$  "más grande" que cumple esta condición de tener  $HB = 0$  y por eso tenemos la igualdad  $C(B) = N(H)$  y no solo la desigualdad. Este algoritmo nos permite pues, pasar de forma paramétrica a implícita.

Si tomamos traspuestas,  $HB = 0$  es equivalente a  $B^T H^T = 0$ , por eso el problema de calcular la matriz  $B$  a partir de una matriz  $H$  se puede hacer repitiendo exactamente el mismo proceso, pero con las matrices traspuestas.

## 2. Erratas

(No detectadas)

## 3. Ejercicios


**Ejercicio 4.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(5)-3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática				Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta				Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial				Clase: 30 min.

$$E_{(4) \rightarrow 3(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(5) \rightarrow 2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \\ -10y_1 - 3y_2 + y_4 = 0 \\ -7y_1 - 2y_2 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 5.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2) \rightarrow 3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3) \rightarrow 3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4) \rightarrow 3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5) \rightarrow 1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3) \rightarrow \frac{1}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4) \rightarrow \frac{5}{2}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{11}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{11}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática					Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta					Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial					Clase: 30 min.

$$E_{(4) \rightarrow \frac{21}{3}}(3) \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] E_{(5) \rightarrow \frac{1}{3}}(3) \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -16 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -16y_1 + \frac{5}{2}y_2 + y_4 - \frac{21}{2}y_5 = 0 \\ 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -32y_1 + 5y_2 + 2y_4 - 21y_5 = 0 \\ 4y_1 - y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 6.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -5 \\ -4 & -7 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$E_{(2) \rightarrow -2(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] E_{(3) \rightarrow -4(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] E_{(4) \rightarrow -1(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática					Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta					
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial					

$$\begin{array}{c}
E_{(5) \rightarrow 1}^{(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(2,4)}^{(2,4)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(3) \rightarrow 3}^{(2)} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(4) \rightarrow 3}^{(2)} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(5) \rightarrow 3}^{(2)} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right].
\end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_1 + y_3 - 3y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 - 3y_4 = 0 \\ -4y_1 + 3y_4 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 7.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(3) \rightarrow 3}^{(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{20}{3} & -\frac{20}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{4}{3}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{20}{3} & -\frac{20}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática				Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta				Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial				Clase: 30 min.

$$\begin{array}{l}
E_{(5) \rightarrow -1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(3) \rightarrow +1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(4) \rightarrow +1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(5) \rightarrow +9(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(4) \rightarrow +\frac{5}{4}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & \frac{5}{4} & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(5) \rightarrow +\frac{21}{4}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{57}{4} & \frac{21}{4} & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{57}{4} & \frac{21}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} \frac{3}{4}y_1 + \frac{9}{4}y_2 + \frac{5}{4}y_3 + y_4 = 0 \\ -\frac{1}{4}y_1 + \frac{57}{4}y_2 + \frac{21}{4}y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} 3y_1 + 9y_2 + 5y_3 + 4y_4 = 0 \\ -y_1 + 57y_2 + 21y_3 + 4y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 8.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz


$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \\ -2 & -6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[ \begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{aligned}
 E_{(3) \rightarrow 2(1)} \left[ \begin{array}{cc|ccc} -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(4) \rightarrow 1(1)} \left[ \begin{array}{cc|ccc} -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 E_{(3) \rightarrow 2(2)} \left[ \begin{array}{cc|ccc} -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{cases} -2y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \\ -y_2 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 9.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & E_{(3)+3(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & E_{(5)+1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & E_{(4)-3(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-5(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -14 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

$$E_{(5)+3(3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 15 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 31 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -8y_1 - 3y_2 + y_4 = 0 \\ 31y_1 + 7y_2 + 3y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 10.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & -7 \\ -2 & 0 \\ -2 & 6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{4}{5}(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{43}(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{43}(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{43}(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{43}{43} & \frac{34}{43} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{34}{43}(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{43}{43} & \frac{43}{43} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{45}{43}(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{43}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{43}{43} & \frac{43}{43} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{43} & \frac{43}{43} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -\frac{14}{43} & \frac{4}{43} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{10}{43} & \frac{34}{43} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{43} & \frac{45}{43} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -\frac{14}{43}y_1 + \frac{4}{43}y_2 + y_3 = 0 \\ \frac{10}{43}y_1 + \frac{34}{43}y_2 + y_4 = 0 \\ -\frac{7}{43}y_1 + \frac{45}{43}y_2 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -14y_1 + 4y_2 + 43y_3 = 0 \\ 10y_1 + 34y_2 + 43y_4 = 0 \\ -7y_1 + 45y_2 + 43y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 11.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \\ 1 & -7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 17 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática					Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta					Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial					Clase: 30 min.

$$\begin{array}{l}
E_{(3)+17(2)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & -14 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \quad E_{(4)-14(2)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \\
E_{(5)+9(2)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \end{array} \right] \quad E_{(3,4)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \end{array} \right] \\
E_{(4,5)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \end{array} \right].
\end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 17 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + 3y_4 - 14y_5 = 0 \\ y_2 - 2y_4 + 9y_5 = 0 \\ y_3 - 3y_4 + 17y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 12.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 4 \\ 3 & 4 \\ -2 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{l}
\left[ \begin{array}{cc|cccc} -5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(2)+5(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática				Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta				Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial				Clase: 30 min.

$$\begin{array}{l}
 E_{(4)+2(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(3)+\frac{8}{15}(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 E_{(4)-\frac{4}{15}(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(5)-\frac{4}{15}(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{15} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} \frac{8}{15}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 0 \\ -\frac{4}{15}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + y_4 = 0 \\ -\frac{4}{15}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} 8y_1 - 5y_2 + 15y_3 = 0 \\ -4y_1 + 10y_2 + 15y_4 = 0 \\ -4y_1 - 20y_2 + 15y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 13.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 E_{(3)+5(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(4)+3(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{aligned}
& E_{(3)+4(2)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(4)+1(2)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& E_{(3,4)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ -3y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 14.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& E_{(4)+1(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& E_{(4)-9(2)} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& E_{(3,4)} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática				Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta				Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial				Clase: 30 min.

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - 9y_2 + y_4 = 0 \\ 2y_1 - 5y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_2 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 15.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -9 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+6(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-7(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} 5y_1 + y_3 + 6y_5 = 0 \\ 3y_1 + y_4 + 3y_5 = 0 \\ -5y_1 + y_2 - 7y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 16.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz


$$B = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -5 & -4 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} - \frac{5}{3}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{19}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)} - \frac{2}{3}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{19}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{3} & -\frac{10}{3} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)} - \frac{29}{3}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{23}{3} & -\frac{29}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)} - \frac{1}{3}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{22}{3} & -\frac{5}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{23}{3} & -\frac{29}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$



	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{23}{3} & -\frac{29}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -\frac{10}{3}y_1 - \frac{23}{3}y_2 - \frac{29}{3}y_3 + y_4 = 0 \\ -\frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -10y_1 - 23y_2 - 29y_3 + 3y_4 = 0 \\ -2y_1 - y_2 - y_3 + 3y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 17.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -2 & -8 & -9 \\ 2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)}-1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -1 & -4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} 4y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ -2y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ -4y_1 + 2y_2 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 18.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 1 \\ -1 & 5 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(3)+5(1)} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(5)+1(1)} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-20(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+9(2)} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática				Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta				Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial				Clase: 30 min.

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & -20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - 20y_2 + 5y_3 = 0 \\ 9y_2 - 2y_3 + y_4 = 0 \\ -4y_2 + y_3 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 19.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 9 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & -5 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+5(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_1 + y_4 = 0 \\ 4y_1 - 9y_2 + y_3 = 0 \\ 5y_1 - 10y_2 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 20.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -7 \\ 3 & 8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccc} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir


$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{cases} -5y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 21.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -4 & -3 \\ 4 & 7 \\ 0 & -5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+\frac{17}{21}(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{21} & \frac{17}{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{5}{21}(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{21} & \frac{17}{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{21} & \frac{5}{21} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)-\frac{20}{21}(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{21} & \frac{17}{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{21} & \frac{5}{21} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{21} & -\frac{20}{21} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -\frac{16}{21} & \frac{17}{21} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{20}{21} & \frac{5}{21} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{21} & -\frac{20}{21} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -\frac{16}{21}y_1 + \frac{17}{21}y_2 + y_3 = 0 \\ \frac{20}{21}y_1 + \frac{5}{21}y_2 + y_4 = 0 \\ \frac{4}{21}y_1 - \frac{20}{21}y_2 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:


$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} -16y_1 + 17y_2 + 21y_3 = 0 \\ 20y_1 + 5y_2 + 21y_4 = 0 \\ 4y_1 - 20y_2 + 21y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 22.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)}-2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)}-1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)}-1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)}+2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)}-2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)}-1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)}+1(3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)}-4(3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 8 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ -10 & 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir


$$V = N(H) = \left\{ \left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} 4y_1 - 3y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ -10y_1 + 8y_2 - 4y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 23.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -7 & -8 & 9 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -8 \\ -4 & -5 & 4 \\ -5 & -8 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

	Grado en Ingeniería Informática					Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta					Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial					Clase: 30 min.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)} - \frac{2}{7}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)} - \frac{4}{7}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)} - \frac{5}{7}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{24}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)} - \frac{21}{5}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{24}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} - \frac{3}{5}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{24}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)} - \frac{16}{5}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{8}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)} - \frac{1}{5}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{8}{5} & 0 & -\frac{16}{5} & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)} + \frac{8}{5}(3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} -7 & -8 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & -8 & \frac{8}{7} & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$


Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{11}{7} & -8 & \frac{8}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -\frac{4}{7}y_1 - \frac{1}{7}y_3 + y_4 = 0 \\ \frac{11}{7}y_1 - 8y_2 + \frac{8}{7}y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Podemos quitar denominadores multiplicando constantes no nulas, lo cual es una operación elemental válida dejando las ecuaciones implícitas de forma más simplificada:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -4y_1 - y_3 + 7y_4 = 0 \\ 11y_1 - 56y_2 + 8y_3 + 7y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

**Ejercicio 24.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.


$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} 3y_1 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_2 - y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇



	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		

**Ejercicio 25.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 26.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \\ \xrightarrow{E_{(3,5)}} \\ \xrightarrow{E_{(4,5)}} \end{array}
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}
\end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_5 = 0 \\ 3y_1 + y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{array} \end{array} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 27.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \\ \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \end{array}
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \\ \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \end{array}
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c|ccccc} 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}
\end{array}$$


$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \end{array}
\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c|ccccc} 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \\ 2y_3 + y_5 = 0 \end{array} \end{array} \right\}.$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	


**Ejercicio 28.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6 \times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\\
\begin{array}{c}
E_{(3)+3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\\
E_{(6)+3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\\
E_{(5)+4(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(6)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\\
E_{(4)+1(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\\
E_{(6)+3(3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4,6)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^6 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + y_2 + 3y_3 + y_6 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 + y_5 = 0 \\ -y_2 + y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 29.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \\ 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$


Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} 3y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ 3y_2 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

◇

**Ejercicio 30.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir


$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 + y_4 = 0 \\ 3y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 31.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -y_1 + y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_2 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 32.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_5 = 0 \\ 3y_2 + y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 33.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.


$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + y_4 = 0 \\ -y_1 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

**Ejercicio 34.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 \\ -y_1 - y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 35.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz


$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$E_{(3)+3(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] E_{(4,5)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_5 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 36.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & E_{(2)+1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] E_{(3)+2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & E_{(5)+1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] E_{(3)+2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & E_{(4)+1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] E_{(5)+2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \quad \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} 2y_1 - y_2 + y_5 = 0 \\ 2y_2 + y_3 - y_4 = 0 \end{array} \end{array} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 37.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$


Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - y_2 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{array} \end{array} \right\}.$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

◇

**Ejercicio 38.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + 3y_2 + y_4 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$


◇

**Ejercicio 39.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
\\
\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
\\
\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].
\end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que} \\ \begin{array}{l} y_1 + 3y_2 + y_5 = 0 \\ -y_1 + y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_3 = 0 \end{array} \end{array} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 40.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
\\
\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática					Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta					Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial					Clase: 30 min.

$$E_{(4,5)} \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} 3y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ 2y_2 + y_5 = 0 \\ y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 41.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & E_{(2)+3(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & E_{(4)+3(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & E_{(3,5)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{matrix} y_1 = 0 \\ -y_2 + y_3 + 3y_5 = 0 \\ y_4 + 3y_5 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 42.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_5 = 0 \\ 2y_2 + y_4 + 3y_5 = 0 \\ -y_2 + y_3 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 43.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_5).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son


$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - y_2 = 0 \\ 2y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 44.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 2}(\mathbb{Z}_3).$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+2(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+1(2)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 - y_3 + y_5 = 0 \\ y_4 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 45.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz


$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



	Grado en Ingeniería Informática				Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta				Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial				Clase: 30 min.

$$\begin{array}{cc}
E_{(4)+1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(5)+2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(4)+1(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(5)+1(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 46.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6 \times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{cc}
\left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{(1,4)}} & \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(3)+1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(4)+1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{cc}
 E_{(6)+1(1)} \xrightarrow{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(3)+2(2)} \xrightarrow{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+2(2)} \xrightarrow{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(5)+1(2)} \xrightarrow{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(6)+1(2)} \xrightarrow{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(3,4)} \xrightarrow{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4,5)} \xrightarrow{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(5,6)} \xrightarrow{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir


$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^6 \text{ tal que } \left. \begin{array}{l} y_1 - y_2 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_5 = 0 \\ y_2 + y_4 + y_6 = 0 \\ -y_2 + y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 47.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

	Grado en Ingeniería Informática				Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta				
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial				

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_5 = 0 \\ -y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 48.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$E_{(3)+1(2)} \left( \begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left( \begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 0 \end{array} \end{array} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 49.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6 \times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left( \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ E_{(3)+1(1)} \left( \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left( \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ E_{(5)+2(1)} \left( \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(6)+1(1)}} \left( \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ E_{(4)+1(2)} \left( \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left( \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática					Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta					
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial					

$$E_{(6)+1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^6 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_5 = 0 \\ y_2 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_6 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇


**Ejercicio 50.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & E_{(3)+1(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & E_{(4)+2(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_5 = 0 \\ -y_2 - y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 51.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_3).$$


Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(3)+2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+2(3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4),5}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_1 - y_2 + y_5 = 0 \\ y_2 - y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

◇

**Ejercicio 52.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4 \times 2}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son  $Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$


◇

**Ejercicio 53.** Sea  $V$  un espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5 \times 3}(\mathbb{Z}_3).$$

Escribe  $V$  en forma implícita.

*Solución:* Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[B|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

mulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Las ecuaciones implícitas del espacio  $V$  vienen dadas por la submatriz  $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  y son

$Hy = 0$ , es decir

$$V = N(H) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_5 = 0 \\ -y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

◇

**Ejercicio 54.** Sea  $V$  un espacio vectorial


$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 0 \\ y_2 - 4y_3 + y_4 - 4y_5 = 0 \\ -y_1 + y_2 + 6y_3 - 4y_4 + 8y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 6 & -4 & 8 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{ccc} 10 & -5 & 12 \\ 4 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

◇


**Ejercicio 55.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -3y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 4y_4 + 2y_5 = 0 \\ 7y_1 - 5y_2 - 7y_3 + 7y_4 - 8y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 7 & -5 & -7 & 7 & -8 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangular en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{3}(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(5)+\frac{2}{3}(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-7(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(5)-10(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & -6 & -6 \\ 0 & -7 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇


**Ejercicio 56.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left( \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -y_2 - 2y_3 - 2y_4 - y_5 = 0 \\ y_1 + 5y_2 + 6y_3 + 6y_4 + 5y_5 = 0 \\ 2y_1 + 8y_2 + 8y_3 + 8y_4 + 8y_5 = 0 \end{array} \right) \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 6 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

◇


**Ejercicio 57.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_2 - y_3 = 0 \\ y_1 + 6y_2 - 4y_3 - 3y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 58.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - 2y_2 + 3y_3 - 4y_4 = 0 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 + y_4 = 0 \end{array} \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$E_{(3) \rightarrow (2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad E_{(4) \rightarrow (2)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -1 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 59.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} 2y_1 + 4y_2 - 3y_3 - y_4 = 0 \\ 8y_1 + 9y_2 - 6y_3 - 6y_4 = 0 \end{array} \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & -1 \\ 8 & 9 & -6 & -6 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \\ E_{(2)+4(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \\ E_{(4)+2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{5}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ \\ E_{(4)-\frac{4}{15}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & 0 & \frac{14}{15} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & 0 & \frac{14}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{5} \end{array} \right] \end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{15} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 60.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - y_3 - 3y_4 = 0 \\ 4y_1 + y_2 - 3y_3 - 9y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & -9 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica


$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 61.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - 4y_2 + y_5 = 0 \\ 2y_1 - 7y_2 - 3y_3 + 7y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)-5(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica


$$V = C \left( \begin{bmatrix} 12 & -21 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 62.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - y_2 + y_3 - y_5 = 0 \\ -3y_1 + 4y_2 - 4y_3 + 7y_5 = 0 \\ y_1 - 8y_2 + 9y_3 + 3y_4 - 8y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -4 & 0 & 7 \\ 1 & -8 & 9 & 3 & -8 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -8 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -8 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & | & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -8 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & | & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -8 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & | & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & | & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & | & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)-21(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 & -25 & -21 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4,5)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 & -25 & -21 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica


$$V = C \left( \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -25 & -3 \\ -21 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 63.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - 2y_2 - 2y_3 - y_4 = 0 \\ 3y_1 - 5y_2 - 4y_3 - 6y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$



	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -4 & -6 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇


**Ejercicio 64.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - 2y_2 - y_3 - y_5 = 0 \\ 5y_1 - 9y_2 - 5y_3 - 3y_4 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & -9 & -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 6 & -7 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 65.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} -2y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 3y_4 = 0 \\ -5y_1 + 9y_2 + 8y_3 + 9y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ -5 & 9 & 8 & 9 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[ \begin{array}{cc|cccc} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{cc}
E_{(3)+\frac{3}{2}(1)} \left[ \begin{array}{cc|ccc} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(4)+\frac{3}{2}(1)} \left[ \begin{array}{cc|ccc} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(3)-\frac{1}{8}(2)} \left[ \begin{array}{cc|ccc} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(4)-\frac{1}{8}(2)} \left[ \begin{array}{cc|ccc} -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{8} & -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \left[ \begin{array}{cc} \frac{11}{8} & \frac{9}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \right).$$

◇

**Ejercicio 66.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \left. \begin{array}{l} y_1 + y_2 + 3y_5 = 0 \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 - 6y_5 = 0 \\ 4y_2 + 3y_3 - 3y_4 + 9y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & -3 & 9 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{cc}
\left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(2)-1(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(5)-3(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & E_{(3)-1(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
E_{(5) \rightarrow 3(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad E_{(4) \rightarrow 3(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(5) \rightarrow 3(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right].
\end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} -3 & -3 \\ 3 & 0 \\ -3 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 67.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ 6y_2 + 5y_3 + 7y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2) \rightarrow 1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(4) \rightarrow 1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3) \rightarrow \frac{5}{6}(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
E_{(4) \rightarrow \frac{7}{6}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{array} \right].
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{7}{6} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 68.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} 2y_2 - y_3 + y_4 - 2y_5 = 0 \\ -y_1 + 5y_2 - 3y_3 - y_4 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)-4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+7(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 7 \\ -2 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 69.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 + 3y_4 = 0 \\ -4y_1 + 5y_2 + y_3 - 7y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-5(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -5 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

**Ejercicio 70.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - 3y_3 + 3y_4 - 3y_5 = 0 \\ -5y_1 + y_2 + 8y_3 - 8y_4 + 9y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 8 & -8 & 9 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+7(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-7(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+6(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 7 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

**Ejercicio 71.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - 4y_2 - 4y_3 - 5y_4 = 0 \\ -2y_1 + 9y_2 + 6y_3 + 9y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 & -5 \\ -2 & 9 & 6 & 9 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ E_{(3)+4(1)} \xrightarrow{\quad} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+5(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ E_{(3)+2(2)} \xrightarrow{\quad} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$


◇

**Ejercicio 72.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} -4y_2 + y_3 - 3y_4 = 0 \\ -2y_1 + 5y_2 + y_3 + 2y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.



	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{9}(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{5}{9}(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{9} & \frac{17}{9} & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{17}{9} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{9} \\ \frac{7}{9} \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇


**Ejercicio 73.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 = 0 \\ 5y_1 + y_2 + 6y_3 + 5y_4 + 9y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)}-2(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)}-2(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)}-2(1)} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+5(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{ccc} -2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

◇


**Ejercicio 74.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left( \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right) \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \\ 2y_1 - y_3 + 3y_4 + 2y_5 = 0 \\ -y_1 - y_2 - y_4 + 3y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica


$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 75.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -y_1 + 3y_3 - y_5 = 0 \\ y_2 + 3y_3 - y_4 + 3y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

◇


**Ejercicio 76.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} 2y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + 2y_5 = 0 \\ y_3 + y_4 - y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica


$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 77.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 - y_5 = 0 \\ 3y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 0 \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$


Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 78.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ 3y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ -y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 2y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos


$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(2)+2(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(2,3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(5)+4(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

◇

**Ejercicio 79.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_4 - y_5 = 0 \\ 3y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 0 \\ 3y_2 - y_3 - y_4 - y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.


$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+1(1)} \quad E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+4(2)} \quad E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+2(3)} \quad E_{(5)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇



	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

**Ejercicio 80.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 + 2y_5 = 0 \\ y_2 + 3y_3 + 2y_5 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 - y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		

**Ejercicio 81.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ -y_1 + 3y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

$$E_{(3,4)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 82.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - y_2 + y_4 + 3y_5 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 + 3y_4 - y_5 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ E_{(4)+4(1)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ E_{(3)+3(2)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
 E_{(5)+2(2)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(5)+1(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+4(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4,5)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 83.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 0 \\ 2y_2 + 2y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 E_{(4)+1(1)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

**Ejercicio 84.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^6 \text{ tal que } \begin{cases} 2y_1 + y_4 + 2y_5 + y_6 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_4 + 3y_6 = 0 \\ 3y_2 + 2y_4 + y_5 + 2y_6 = 0 \end{cases} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(6)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

$$E_{(4,5)} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 85.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 - y_2 + 2y_3 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 3y_5 = 0 \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 + 3y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
\\
E_{(3)+3(1)} \xrightarrow{\quad} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
\\
E_{(4)+3(2)} \xrightarrow{\quad} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]
\end{array}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

$$E_{(5)+2(3)} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 86.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + y_4 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

**Ejercicio 87.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^6 \text{ tal que } \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 - y_5 + 2y_6 = 0 \\ 3y_1 + y_3 + 3y_4 + y_5 + 3y_6 = 0 \\ -y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_4 + 3y_5 - y_6 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.


*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(6)+3(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$



	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \xrightarrow{E_{(6)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{E_{(5,6)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 88.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		

$$E_{(3)+2(2)} \left( \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left( \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 89.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 + y_4 - y_5 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left( \begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left( \begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ E_{(5)+1(1)} \left( \begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left( \begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left( \begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \\ E_{(5)+2(2)} \left( \begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left( \begin{array}{c|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 90.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{cases} -y_2 + y_3 + 3y_4 = 0 \\ y_1 + 3y_3 + 3y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica


$$V = C \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 91.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 0 \\ 3y_1 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 92.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_2 - y_3 = 0 \\ -y_2 + 2y_3 - y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\left[ \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 93.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 = 0 \\ -y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 2y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 94.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - y_3 + y_4 = 0 \\ y_2 - y_4 = 0 \\ -y_1 + y_3 - y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

**Ejercicio 95.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_2 + y_3 - y_4 - y_5 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta	
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial	

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 96.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.


$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \\ \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇



	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

**Ejercicio 97.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = 0 \\ -y_1 - y_2 - y_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4,5)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica


$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

◇

**Ejercicio 98.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_2 - y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ -y_1 + y_3 + y_4 - y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇


**Ejercicio 99.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} -y_5 = 0 \\ -y_1 + y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 30 min.
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		Clase: 30 min.

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c|ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[ \begin{array}{c|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{c|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{c|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 100.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{array}{l} y_2 - y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ -y_1 - y_5 = 0 \end{array} \right\}.$$


Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c|ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial		

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \\ \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \\ \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \\ \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(3,5)}} \\ \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(4,5)}} \\ \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}
\end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

**Ejercicio 101.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right] \in \mathbb{Z}_3^4 \text{ tal que } \begin{array}{l} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \\ \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \\ \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \\ \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}
\end{array}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇

	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	<b>Álgebra y Matemática Discreta</b>	
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>	

**Ejercicio 102.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^4 \text{ tal que } \begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 = 0 \\ y_1 - y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

◇


**Ejercicio 103.** Sea  $V$  un espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^5 \text{ tal que } \begin{cases} -y_2 + y_3 - y_4 + y_5 = 0 \\ y_1 - y_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Escribe  $V$  en forma paramétrica.

*Solución:* Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial, tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 30 min. Clase: 30 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	<b>Representación Implícita y Paramétrica de un Espacio Vectorial</b>		

Para resolver el problema, tenemos que reducir por filas la matriz  $[H^T|I]$  y tomar la subdivisión que está a la derecha de las filas que resulten nulas en la matriz reducida. Como solo nos interesan las filas nulas, podemos triangularizar en lugar de hacer la reducción completa.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[ \begin{array}{cc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Esto nos deja la forma paramétrica

$$V = C \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right).$$

◇