Vídeo : `https://youtu.be/aEPSx9Lg7ao`

1. Resumen

Cuando tenemos un espacio vectorial V definido como el espacio generado por las columnas de una matriz B ($V = C(B)$) podemos describir todos los vectores de V como combinaciones lineales de las columnas de B utilizando parámetros libres que pueden tomar cualquier valor. Por ejemplo, si tomamos $V = C(B)$ siendo $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$, los vectores de V quedan totalmente determinados por las columnas de B de todas estas formas equivalentes:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ para algunos } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{array}{c} y_1 = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ y_3 = 4x_1 + x_2 \\ y_4 = x_1 + x_2 \\ y_5 = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{array} \text{ para algunos } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^5 \text{ tal que } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ para algún } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^3 \right\}$$

Una representación de este tipo usando parámetros libres para describir todos los vectores del espacio es lo que llamamos **representación paramétrica del espacio** V y la podremos hacer siempre que las columnas de B generen el espacio V.

Si las columnas de B no solo son generadoras sino que además son linealmente independientes el vector de parámetros x además es único porque si $y = Bx = Bx'$ para dos vectores de parámetros x y x', entonces $B(x - x') = 0$ y por lo tanto $x - x'$ estaría en el anulador por la derecha de B ($N(B)$) que es $\{0\}$ por ser las columnas de B linealmente independientes. Entonces $x - x' = 0$ y por tanto $x = x'$. Esta situación es muy útil para la representación de vectores y le vamos a dar un nombre:

Definición 1. *Sea $V \leq K^m$ un espacio vectorial y $B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ una matriz cuyas columnas son vectores de V. Diremos que* **las columnas de B son una base de V** *o simplemente que B* **es una base de V** *si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Las columnas de B son linealmente independientes.*

2. *El espacio generado por las columnas de B es V (son generadoras de V).*

Para cualquier $y \in V$ existe un único $x \in K^n$ tal que $y = Bx$. Este vector de parámetros x lo llamaremos **coordenadas de y en base B** *y lo representaremos como $y = x_B$.*

Un ejercicio básico de este tema es, dado un vector y una base, encontrar las coordenadas del vector en esa base.

Ejemplo 2. *Sean V y B el espacio vectorial y la base anteriores. Determina si el vector $y = \left[\begin{smallmatrix}2\\4\\4\\3\\4\end{smallmatrix}\right]$ está en el espacio V y en caso de estarlo, calcula las coordenadas de y en base B.*

Solución: Para resolver el problema tenemos que encontrar el vector $x \in \mathbb{Z}_5^3$ tal que $Bx = y$, que corresponde al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Si lo resolvemos reduciendo la matriz ampliada del sistema,

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

obtenemos los valores $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$, por lo tanto tenemos que $\left[\begin{smallmatrix}2\\4\\4\\3\\4\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}2\\1\\3\end{smallmatrix}\right]_B$, o lo que es lo mismo, el vector de coordenadas de $\left[\begin{smallmatrix}2\\4\\4\\3\\4\end{smallmatrix}\right]$ en base B es $\left[\begin{smallmatrix}2\\1\\3\end{smallmatrix}\right]$. $\Diamond$

Si al intentar plantear el sistema de ecuaciones nos apareciera un sistema incompatible, sería porque el vector y realmente no pertenece al espacio generado por las columnas de B. Si por otra parte, tuviéramos más de una solución (el sistema fuera compatible indeterminado), sería porque las columnas de B no son linealmente independientes y por tanto no son base.

Las coordenadas de un vector en una base pueden ser un instrumento muy útil para estudiar un espacio vectorial porque transforma cualquier espacio vectorial en uno del tipo K^n. Por ejemplo, un plano en el espacio tridimensional puede estar en muchas posiciones, pero tomando una base de dos vectores, podremos reducir el problema a dos coordenadas, igual que si fuera el plano $\mathbb{R}^2$.

Ya hemos visto que podemos obtener las coordenadas de un vector resolviendo un sistema de ecuaciones, pero sería interesante tener una fórmula que, dado un vector cualquiera, nos calculara directamente sus coordenadas. Vamos a ver que eso es posible utilizando matrices inversas laterales.

Supongamos que V y B son los mismos de antes. Queremos calcular las fórmulas de un vector y en esa base de forma genérica. Empecemos calculando una inversa por la izquierda de B, para lo cual reducimos la matriz $[B|I]$ con las mismas operaciones que antes:

$$[B|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{red.filas} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & H \end{array}\right].$$

tomando $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Con la matriz A, que es una inversa por la izquierda de B, podemos calcular las coordenadas de cualquier vector porque si $y = x_B = Bx$ entonces $x = Ix = ABx = Ay$. Es decir,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 + 3y_2 + 4y_4 \\ 2y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 + 4y_3 \end{bmatrix}.$$

Si aplicamos estas fórmulas al vector del ejemplo anterior, obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

que son las mismas coordenadas que obteníamos antes.

La matriz H tiene otra propiedad interesante y es que un vector y está en V si y solo si $Hy = 0$, o lo que es lo mismo V es el anulador por la derecha de H, $N(H)$. Las ecuaciones $Hy = 0$, que en este caso serían

$$\begin{aligned} y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 &= 0 \\ 2y_2 + 2y_2 + y_3 + y_5 &= 0 \end{aligned}$$

son las que llamamos *ecuaciones implícitas del espacio* V. Vamos a poner este resultado en forma de teorema:

Teorema 3. *Sea V un espacio vectorial con base B. Si reducimos la matriz $[B|I]$ obtendremos una matriz de la forma $\left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & H \end{array}\right]$ puesto que los vectores de B son linealmente independientes. Estas matrices A y H tienen las siguientes propiedades:*

1. *Para todo vector $y \in V$, las coordenadas de y en base B son las del vector $x = Ay$.*
2. *Un vector y está en V si y solo si $Hy = 0$, o lo que es lo mismo V es el espacio anulador por la derecha de H.*
3. *Un vector y está en V si y solo si $BAy = y$ (dicho de otro modo, aunque BA no es la matriz identidad en general, se comporta como si los fuera con los vectores de V y sólo con ellos).*

Las ecuaciones $Hy = 0$ que nos garantizan la pertenencia de un vector y al espacio V se denominan **ecuaciones implícitas o cartesianas del espacio** *V.*

Demostración. Utilizando el teorema fundamental de la reducción por filas, tenemos que la matriz de paso $P = \left[\frac{A}{H}\right]$ multiplicada por la matriz original es la matriz reducida $R = \left[\frac{I}{0}\right]$,

$$PB = \left[\frac{A}{H}\right] B = \left[\frac{I}{0}\right] = R$$

y por tanto $AB = I$ y $HB = 0$.

1. Sea x el vector de coordenadas de y en base B. Entonces $y = Bx$, pero multiplicando por A tenemos que $Ay = ABx = Ix = x$.
2. Supongamos que $y \in V = C(B)$, entonces $y = Bx$ y si multiplicamos por H tenemos que $Hy = HBx = 0x = 0$. Recíprocamente, si $Hy = 0$ tomemos $x = Ay$.

   $$Py = \left[\frac{A}{H}\right] y = \left[\frac{Ay}{Hy}\right] = \left[\frac{x}{0}\right] = \left[\frac{I}{0}\right] x = \left[\frac{A}{H}\right] Bx = PBx$$

   En la igualdad $Py = PBx$ podemos multiplicar por P^{-1} (P es invertible por ser una matriz de paso y por tanto producto de matrices elementales invertibles) y deducimos que $y = P^{-1}Py = P^{-1}PBx = Bx$ que nos dice que y es combinación lineal de las columnas de B y por tanto un vector de V.
3. Si y está en V, tomemos su vector x de coordenadas en base B, es decir $y = Bx$. Entonces

   $$BAy = (BA)(Bx) = B(AB)x = BIx = Bx = y.$$

   Recíprocamente, si $y = BAy$ entonces $Hy = H(BAy) = \underbrace{(HB)}_{0} Ay = 0$ y aplicando (2) concluimos que $y \in V$.

□

El método de utilizar inversas laterales para calcular coordenadas nos permite encontrar métodos de cálculo para cambiar coordenadas desde una base a otra. Supongamos que tenemos dos bases B y B' en un espacio vectorial y nos dan las coordenadas de un vector y en base B', es decir, el vector y es $y = x'_{B'} = B'x'$. Lo que nos piden es el vector de coordenadas de y en base B. Dicho de otra forma, nos piden un x tal que $y = x_B = Bx$. Si planteamos la ecuación tenemos $Bx = y = B'x'$ y multiplicando por una inversa por la izquierda de B (llamémosla A) tenemos que $x = Ix = ABx = Ay = AB'x'$.

Esta matriz AB' que nos permite cambiar de coordenadas en base B' a coordenadas en base B se denomina **matriz de cambio de base** B' **a base** B y la denotaremos $P_{B'B}$ o $M_{B'B}(\mathsf{id})$.

Proposición 4. *Sea V un espacio vectorial y B, B' y B'' tres bases de V. La matriz de cambio de base tiene las siguientes propiedades:*

1. *$P_{B'B} = AB'$ siendo A cualquier matriz inversa por la izquierda de B.*
2. *Las columnas de $P_{B'B}$ son las coordenadas de cada uno de los vectores de la base B' escritos en base B.*
3. *$P_{BB} = I$.*
4. *$P_{B'B} \cdot P_{B''B'} = P_{B''B}$.*
5. *$P_{B'B}$ es una matriz invertible.*
6. *Todas las bases de V tienen el mismo número de elementos.*

Demostración.

1. Este punto ya lo hemos visto, si $Bx = y = B'x'$ entonces podemos despejar x como $x = ABx = Ay = AB'x'$ por lo que la matriz que nos cambia coordenadas en base B' a coordenadas en base B es precisamente AB'.
2. Si las columnas de B' son $v'_1, v'_2, \cdots, v'_n$ entonces las columnas de AB' son $Av'_1, Av'_2, \cdots, Av'_n$, pero en general Av son las coordenadas de v en base B de donde deducimos el resultado.
3. Sea A cualquier inversa lateral por la izquierda de B, entonces $P_{BB} = AB = I$.
4. Sea A' una inversa lateral por la izquierda de B' y A una inversa lateral por la izquierda de B. Por el Teorema 3.3, sabemos que $B'A'y = y$ para cualquier y de V. En particular, como los vectores de B'' son todos de V podemos deducir que $B'A'B'' = B''$ y por lo tanto
$$P_{B'B} \cdot P_{B''B'} = (AB')(A'B'') = A(B'A'B'') = AB'' = P_{B''B}.$$
5. Utilizando las dos propiedades anteriores, tenemos que $P_{BB'}P_{B'B} = P_{B'B'} = I$ y que $P_{B'B}P_{BB'} = P_{BB} = I$, por lo que $P_{B'B}$ y $P_{BB'}$ son inversas la una de la otra.
6. Supongamos que B tiene n columnas y que B' tiene n' columnas. Si A es una inversa por la izquierda de B, el número de filas de A es n y el producto AB' tiene n filas y n' columnas. Pero AB' es una matriz invertible, por lo que tiene que ser cuadrada y por lo tanto $n = n'$.

$\square$

Definición 5. *Sea V un espacio vectorial. Llamaremos* **dimensión de** *V al número de elementos de cualquier base de V (todas tienen el mismo número de elementos por la proposición anterior).*

La utilización de bases también nos permite extender las construcciones que teníamos para aplicaciones lineales $f : K^n \to K^m$ a espacios genéricos $f : U \to V$. La definición de aplicación lineal en este caso es la misma que teníamos:

Definición 6. *Sean U y V espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Diremos que una aplicación $f : U \to V$ es lineal si cumple que*

1. *$f(u + u') = f(u) + f(u')$ para todo $u, u' \in U$.*
2. *$f(cu) = cf(u)$ para todo $u \in U$ y todo $c \in K$.*

La representación de las aplicaciones lineales con matrices era una herramienta muy potente que también podemos utilizar en este caso si fijamos bases en los dos espacios.

Definición 7. *Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal y sean B una base de V y B' una base de U. Llamaremos matriz de la aplicación lineal f en las bases B' y B a la matriz $M_{B'B}(f)$ que cumple la propiedad de que para todo vector $y' \in U$, si y' tiene coordenadas x' en base B', entonces $f(y')$ tiene coordenadas $M_{B'B}(f)x'$ en base B.*

Proposición 8. *Sean W, U y V tres espacios vectoriales con bases B'', B' y B, y dimensiones n'', n' y n respectivamente. Sean $f : U \to V$ y $g : W \to U$ aplicaciones lineales. Entonces:*

1. *$M_{B'B}(f) = Af(B')$ siendo A cualquier inversa por la izquierda de B.*
2. *Si $v'_1, v'_2, \cdots, v'_{n'}$ son las columnas de B', entonces las columnas de $M_{B'B}(f)$ son las coordenadas en base B de los vectores $f(v'_1), f(v'_2), \cdots, f(v'_{n'})$.*
3. *$M_{B'B}(f) \cdot M_{B''B'}(g) = M_{B''B}(f \circ g)$.*

Demostración.

1. Sea $y' \in U$ un vector de coordenadas x' en base B', es decir, $y' = B'x'$. Si A es una inversa por la izquierda de B, el vector $f(y')$ tiene coordenadas $Af(y')$ en base B. Lo que tiene que suceder es que $Af(y') = M_{B'B}(f)x'$ y por tanto $Af(B'x') = M_{B'B}(f)x'$ para cualquier vector de coordenadas $x' \in K^{n'}$.

   Si esa relación es cierta para todos los vectores x' de $K^{n'}$, en particular lo será para las columnas de la matriz identidad $I' \in M_{n' \times n'}(K)$ y por lo tanto

   $$Af(B') = Af(B'I') = M_{B'B}(f)I' = M_{B'B}(f).$$

2. $f(B')$ es la matriz que tiene como columnas los vectores $f(v'_1)$, $f(v'_2)$, ..., $f(v'_{n'})$ y multiplicar por A lo que nos da son las coordenadas en base B, por lo tanto $Af(B')$ son las coordenadas de $f(v'_i)$ en base B.

3. Sea y'' un vector de W con coordenadas x'' en base B'', es decir, $y'' = B''x''$. Por definición, el producto $x' = M_{B''B'}(g)x''$ son las coordenadas de $g(y'')$ en base B', pero aplicando la definición de $M_{B'B}(f)$ tenemos que $M_{B'B}(f)x'$ son las coordenadas de $f(g(y''))$ en base B. Juntando ambas fórmulas tenemos que $M_{B'B}(f) \cdot M_{B''B'}(g)x''$ son las coordenadas de $f(g(y''))$ en base B para cualquier vector y''. Pero esa es precisamente la defición de la matriz $M_{B''B}(f \circ g)$.

$\square$

Esta definición generaliza a la matriz de cambio de base si tomamos la aplicación identidad.

Proposición 9. *Sea V un espacio vectorial con dos bases B' y B. Consideremos la aplicación identidad $\mathsf{id} : V \to V$. Entonces $M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B}$.*

Demostración. Tomemos A una inversa lateral por la izquierda de B, entonces

$$P_{B'B} = AB' = A\mathsf{id}(B') = M_{B'B}(\mathsf{id}).$$

$\square$

Esa es la razón por la que al hacer la defición de matriz de cambio de base, usábamos las dos notaciones, $P_{B'B}$ y $M_{B'B}(\mathsf{id})$.

Otro caso importante es cuando los espacios vectoriales son $U = K^n$ y $V = K^m$ y tomamos las bases canónicas[1].

Proposición 10. *Sea C' la base canónica de K^n y C la base canónica de K^m y sea $f : K^n \to K^m$ una aplicación lineal. Entonces $M(f) = M_{C'C}(f)$.*

Demostración. Como las matrices asociadas a las bases canónicas C' y C son respectivamente las matrices identidad I' e I, tenemos que $M(f) = f(I')$ y por otro lado $M_{C'C}(f) = I^{-1}f(I') = f(I') = M(f)$. $\square$

[1] La base canónica es la base formada por las columnas de la matriz identidad y se suele representar por la letra C, lo cual es diferente a lo que solemos hacer de poner la misma letra para la base y la matriz. Cuando tratemos el caso de las bases canónicas supondremos que $C = I$ y usaremos la letra C para referirnos a la base y la letra I para referirnos a la matriz.

Las bases nos permiten resolver problemas dados en un espacio vectorial cualquiera en un espacio del tipo K^n. Todos los conceptos que hemos definido para aplicaciones lineales $f : K^n \to K^m$ se pueden generalizar a aplicaciones lineales $f : U \to V$, por ejemplo

$$\mathsf{Ker}(f) = \{u \in U : f(u) = 0\}$$

$$\mathsf{Im}(f) = \{v \in V : \exists u \in U \text{ tal que } f(u) = v\}$$

etc. Para calcularlos reduciremos el problema a calcularlos en términos de una base y luego traducir el resultado final a vectores usando de nuevo la base.

Esto es cierto incluso para conjuntos que se consideran espacios vectoriales aunque no estén formado por vectores columna, por ejemplo el caso de los polinomios. Si llamamos $\mathcal{P}_n(K)$ al conjunto de polinomios de grado menor o igual que n, podemos identificar cualquier polinomio $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ con el vector $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ considerando la base $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$. Vamos a ver un ejemplo:

Ejemplo 11. *Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 3 y consideremos la base formada por los polinomios $B = \{1, x, x^2, x^3\}$. Calcula la matriz de la aplicación derivada con respecto a esta base y su núcleo.*

Solución: Para resolver el problema identificaremos el polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ con el vector $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. Vamos a ver cómo se comporta la aplicación derivada sobre los vectores de la base haciendo esta identificación:

- El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que corresponde al polinomio 1 tiene como derivada 0, que corresponde a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- El vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que corresponde al polinomio x tiene como derivada 1, que corresponde a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- El vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ que corresponde al polinomio x^2 tiene como derivada $2x$, que corresponde a $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- El vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ que corresponde al polinomio x^3 tiene como derivada $3x^2$, que corresponde a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

La matriz que nos piden es la que tiene como columnas las coordenadas de los vectores derivados, es decir

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El núcleo estará formado por los vectores $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ que van al 0, que corresponde al sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que si lo resolvemos nos da $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y a_0 toma cualquier valor. Traduciendo este resultado de nuevo a polinomios con la identificación que hemos hecho, el núcleo estará formado por los polinomios constantes a_0 para cualquier valor de $a_0 \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

En esta sección hay 150 ejercicios de tres modelos distintos. Para cada modelo, hay 20 sobre $\mathbb{R}$, otros 20 sobre $\mathbb{Z}_5$ y 10 sobre $\mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 12. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = -13$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -13 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = -4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$. ♢

Ejercicio 13. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & -2 & -2 \\ 5 & 9 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 46 \\ -17 \\ 24 \\ 38 \\ 65 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 46$$

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -17$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 24$$

$$2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 38$$

$$5x_1 + 9x_2 - 4x_4 = 65$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 8 & 2 & 4 & 46 \\ -2 & -3 & -1 & -2 & -17 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 24 \\ 2 & 7 & -2 & -2 & 38 \\ 5 & 9 & 0 & -4 & 65 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 8 & 2 & 4 & 46 \\ -2 & -3 & -1 & -2 & -17 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 24 \\ 2 & 7 & -2 & -2 & 38 \\ 5 & 9 & 0 & -4 & 65 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{46}{5} \\ -2 & -3 & -1 & -2 & -17 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 24 \\ 2 & 7 & -2 & -2 & 38 \\ 5 & 9 & 0 & -4 & 65 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{46}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 24 \\ 2 & 7 & -2 & -2 & 38 \\ 5 & 9 & 0 & -4 & 65 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{46}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{18}{5} \\ 2 & 7 & -2 & -2 & 38 \\ 5 & 9 & 0 & -4 & 65 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{46}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{14}{5} & -\frac{18}{5} & \frac{98}{5} \\ 5 & 9 & 0 & -4 & 65 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-5(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{46}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{14}{5} & -\frac{18}{5} & \frac{98}{5} \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 19 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{5(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{46}{5} \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{14}{5} & -\frac{18}{5} & \frac{98}{5} \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{8}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{14}{5} & -\frac{18}{5} & \frac{98}{5} \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{14}{5} & -\frac{18}{5} & \frac{98}{5} \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 19 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{19}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -8 & 19 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto y no está en el espacio vectorial V. $\Diamond$

Ejercicio 14. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ -24 \\ -10 \\ 41 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_3 = 2$$

$$-x_1 - x_2 - 5x_4 = -24$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -10$$

$$2x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 41$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & -24 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 2 & 2 & 9 & 41 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -5 & -24 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 2 & 2 & 9 & 41 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -22 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 2 & 2 & 9 & 41 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -22 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 9 & 41 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 22 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 9 & 41 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 2 & 9 & 41 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-4(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-4(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$
.

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 5$$
$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 3$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 2 \\ -24 \\ -10 \\ 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 15. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 1 & 4 & -8 \\ 1 & 6 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 42 \\ 49 \\ 60 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 42$$
$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 49$$
$$x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 60$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 42 \\ 1 & 4 & -8 & 49 \\ 1 & 6 & -9 & 60 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 42 \\ 1 & 4 & -8 & 49 \\ 1 & 6 & -9 & 60 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 42 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 6 & -9 & 60 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 42 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 21 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 21 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 9$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = -3$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 42 \\ 49 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 16. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -21 \\ 17 \\ 9 \\ -11 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - 2x_3 + 9x_4 = -21$$

$$x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 17$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = -11$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 9 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 17 \\ -1 & -1 & 1 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & -11 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 9 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 17 \\ -1 & -1 & 1 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 9 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 17 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -12 \\ 1 & 1 & -1 & 5 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 9 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 17 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 9 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 9 & -21 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & -8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = -5$$
$$x_2 = 3$$
$$x_3 = -1$$
$$x_4 = -2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} -21 \\ 17 \\ 9 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 17. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -22 \\ -12 \\ 29 \\ 35 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-3x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -22$$
$$-x_1 - x_2 - 3x_3 = -12$$
$$2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 29$$
$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 35$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -6 & -22 \\ -1 & -1 & -3 & -12 \\ 2 & 2 & 7 & 29 \\ 2 & 2 & 8 & 35 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -6 & -22 \\ -1 & -1 & -3 & -12 \\ 2 & 2 & 7 & 29 \\ 2 & 2 & 8 & 35 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{22}{3} \\ -1 & -1 & -3 & -12 \\ 2 & 2 & 7 & 29 \\ 2 & 2 & 8 & 35 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{22}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{14}{3} \\ 2 & 2 & 7 & 29 \\ 2 & 2 & 8 & 35 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{22}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{14}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{43}{3} \\ 2 & 2 & 8 & 35 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{22}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{14}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{43}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 4 & \frac{61}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{22}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{43}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 4 & \frac{61}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{2}{3}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{43}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 4 & \frac{61}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{3}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{2}{3} & 4 & \frac{61}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{3}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto y no está en el espacio vectorial V. ◊

Ejercicio 18. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \left[\begin{array}{c} -6 \\ -6 \\ -5 \\ 8 \\ 2 \end{array}\right]$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -6$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 9x_4 = -6$$

$$x_1 - 4x_4 = -5$$

$$-2x_1 + x_3 + 7x_4 = 8$$

$$x_1 - x_2 - 3x_4 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -7 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & -9 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -7 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & -9 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -7 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 9 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+5(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+5(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = -4$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 3$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 19. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -5 & -6 \\ 2 & 0 & -3 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

$$-4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 2$$

$$2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 5$$

$$2x_1 - 3x_3 - 7x_4 = 18$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & -7 & 18 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & -7 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -5 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & -7 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -7 & -8 & 9 \\ 2 & 0 & -3 & -7 & 18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -7 & -8 & 9 \\ 0 & -2 & -5 & -9 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -7 & -8 & 9 \\ 0 & -2 & -5 & -9 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -15 \\ 0 & -2 & -5 & -9 & 22 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+5(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 5$$
$$x_4 = -5$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 20. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -38 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_2 = -5$$
$$-4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 - 9x_3 = -38$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -9 & -38 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -9 & -38 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \\ 1 & 1 & -9 & -38 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & 2 & -9 & -33 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -23 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & 2 & -9 & -33 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -23 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = -8$$

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = 3$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 21. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 16 \\ 23 \\ -11 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + 2x_3 = 16$$

$$x_2 + 5x_3 = 23$$

$$-x_1 - x_3 = -11$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 5 & 23 \\ -1 & 0 & -1 & -11 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 5 & 23 \\ -1 & 0 & -1 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 1 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 5$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 16 \\ 23 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 22. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -8 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -8 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -5$$

$$x_2 + 3x_3 = 3$$

$$3x_1 - 4x_2 - 8x_3 = -8$$

$$-x_1 + 4x_3 = 4$$

$$x_1 - 4x_2 - 6x_3 = -5$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & -8 & -8 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & -6 & -5 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & -8 & -8 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & -6 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 7 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & -4 & -6 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -6 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto y no está en el espacio vectorial V. $\Diamond$

Ejercicio 23. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ -18 \\ 6 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 14$$

$$-x_1 - 5x_3 = -1$$

$$2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -18$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 6$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & -3 & 14 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -18 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & -3 & 14 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -18 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -14 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & -18 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -14 \\ 0 & 3 & -2 & -15 \\ 2 & 4 & 7 & -18 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -14 \\ 0 & 3 & -2 & -15 \\ 0 & -2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -14 \\ 0 & 3 & -2 & -15 \\ 0 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & -4 & 2 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -14 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & -4 & 2 & 20 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & -4 & 2 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{2}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -5$$
$$x_3 = 0$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ -18 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 24. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -14 \\ 12 \\ -6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -14$$
$$-x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 12$$
$$x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -6$$
$$-x_1 + 2x_3 + x_4 = 5$$
$$-2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 5 & -14 \\ -1 & -2 & 4 & -2 & 12 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -4 & 5 & -14 \\ -1 & -2 & 4 & -2 & 12 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 6 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 6 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-4(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto y no está en el espacio vectorial V. ◊

Ejercicio 25. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -3 & 9 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 10 \\ -13 \\ 31 \\ 7 \\ -29 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$5x_1 - 6x_2 = 10$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -13$$

$$-4x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 31$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7$$
$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -29$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & -6 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & -4 & -13 \\ -4 & -3 & 9 & 31 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & -29 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & -6 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & -4 & -13 \\ -4 & -3 & 9 & 31 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & -29 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & -13 \\ -4 & -3 & 9 & 31 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & -29 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{17}{5} & -4 & -17 \\ -4 & -3 & 9 & 31 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & -29 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{17}{5} & -4 & -17 \\ 0 & -\frac{39}{5} & 9 & 39 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & -29 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{17}{5} & -4 & -17 \\ 0 & -\frac{39}{5} & 9 & 39 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & -29 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{17}{5} & -4 & -17 \\ 0 & -\frac{39}{5} & 9 & 39 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 3 \\ 0 & \frac{31}{5} & -2 & -31 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{\frac{5}{17}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{6}{5} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{17} & -5 \\ 0 & -\frac{39}{5} & 9 & 39 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 3 \\ 0 & \frac{31}{5} & -2 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{6}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{24}{17} & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{17} & -5 \\ 0 & -\frac{39}{5} & 9 & 39 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 3 \\ 0 & \frac{31}{5} & -2 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{39}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{24}{17} & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{17} & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{17} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 3 \\ 0 & \frac{31}{5} & -2 & -31 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{3}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{24}{17} & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{17} & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{17} & 0 \\ 0 & \frac{31}{5} & -2 & -31 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{31}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{24}{17} & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{17} & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{90}{17} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{17}{3}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{24}{17} & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{17} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{90}{17} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{24}{17}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{20}{17} & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{90}{17} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{20}{17}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{90}{17} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{5}{17}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{90}{17} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{90}{17}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = -4$$
$$x_2 = -5$$

$$x_3 = 0$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 10 \\ -13 \\ 31 \\ 7 \\ -29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 26. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -15 \\ 45 \\ 14 \\ 13 \\ -33 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_2 - 4x_3 = -15$$

$$-x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 45$$

$$-x_1 + 3x_3 = 14$$

$$-2x_2 + x_3 = 13$$

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -33$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -15 \\ -1 & -4 & 6 & 45 \\ -1 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & -3 & -33 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -15 \\ -1 & -4 & 6 & 45 \\ -1 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & -3 & -33 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -15 \\ 0 & -5 & 2 & 30 \\ -1 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & -3 & -33 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -15 \\ 0 & -5 & 2 & 30 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 1 & 5 & -3 & -33 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -15 \\ 0 & -5 & 2 & 30 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 6 & 1 & -18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{5}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 6 & 1 & -18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{22}{5} & -21 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 6 & 1 & -18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{22}{5} & -21 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & -7 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 6 & 1 & -18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{22}{5} & -21 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & -7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 6 & 1 & -18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-6(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{22}{5} & -21 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & -7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & 18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-\frac{5}{7}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{22}{5} & -21 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{22}{5}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{5}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & 18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{5}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{5} & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{17}{5}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto y no está en el espacio vectorial V. $\Diamond$

Ejercicio 27. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 13 \\ -16 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 13$$

$$x_2 + x_3 - 5x_4 = -16$$

$$2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -2$$

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -3 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 2 & -5 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -3 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 2 & -5 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 2 & -5 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & -2 & 7 & 24 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -11 & -45 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & -2 & 7 & 24 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -11 & -45 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -11 & -45 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & 34 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -11 & -45 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & 34 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-5(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & 34 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & 34 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = -4$$

$$x_4 = 2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 13 \\ -16 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 28. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - 3x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 5x_3 = -3$$

$$x_2 - 3x_3 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 5$$

$$x_3 = 1$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 29. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -6$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -6 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{2}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -5$$

$$x_3 = -1$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 30. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ -3 & -2 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -13 \\ 15 \\ -11 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -13$$

$$-3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 15$$

$$x_2 - x_3 - 6x_4 = -11$$

$$-x_2 + x_3 + 7x_4 = 12$$

$$x_2 + 2x_3 - x_4 = -3$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 & -13 \\ -3 & -2 & -5 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 & -13 \\ -3 & -2 & -5 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 & -13 \\ 0 & 4 & 4 & -12 & -24 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & -11 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{3}{2}(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{9}{2}(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{2}(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{1}{2}(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -4$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 1$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} -13 \\ 15 \\ -11 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 31. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} -6 \\ -17 \\ 5 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_2 + 2x_3 = -6$$

$$x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -17$$

$$x_2 - x_3 = 5$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & -4 & 4 & -17 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & -4 & 4 & -17 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & 4 & -17 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = -1$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} -6 \\ -17 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 32. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$3x_1 - x_3 + 3x_4 = 1$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_4 = 2$$

$$-x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 3$$
$$x_4 = 2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. ♢

Ejercicio 33. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3$$
$$x_2 - x_3 = 3$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. ♢

Ejercicio 34. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 35. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$2x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_3 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 1$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 36. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 = 3$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

.

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 37. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$x_2 + x_3 - x_4 = 4$$

$$3x_1 + x_4 = 4$$

$$3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 38. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_3 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 1$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 39. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_3 = 1$$

$$2x_1 + 3x_3 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 3$$
$$x_3 = 2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. ♢

Ejercicio 40. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 2$$

$$x_2 + 3x_4 = 2$$

$$x_3 - x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 4$$

$$x_4 = 4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 41. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 2$$

$$3x_2 - x_3 - x_4 = 3$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 42. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 4$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 1$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 43. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 3$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 4$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= 3 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 44. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 1$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 1$$

$$x_5 = 0$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 45. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 = 4$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&2&4\\0&4&0&0\\0&4&2&4\\0&3&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&2&4\\0&4&0&0\\0&4&2&4\\0&3&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&2&4\\0&0&2&4\\0&4&2&4\\0&3&2&4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&2&4\\0&0&2&4\\0&0&4&3\\0&3&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&2&4\\0&0&2&4\\0&0&4&3\\0&0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{E_{3(3)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&2&4\\0&0&1&2\\0&0&4&3\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&4&3\\0&0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 46. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix}4&4&0&0&2\\2&0&2&0&4\\3&0&4&3&4\\3&2&2&1&0\\4&2&3&1&3\end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times5}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix}0\\4\\1\\3\\4\end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 - x_2 + 2x_5 = 0$$

$$2x_1 + 2x_3 - x_5 = 4$$

$$3x_1 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 3$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 47. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_2 = 4$$
$$0 = 0$$
$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\lozenge$

Ejercicio 48. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2$$

$$-x_1 - x_3 + 3x_4 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0$$

$$2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = 3$$

$$x_5 = 0$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 49. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$

$$-x_1 + 2x_4 = 3$$

$$3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto y no está en el espacio vectorial V. $\Diamond$

Ejercicio 50. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 4$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 51. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 4$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 3$$
$$x_5 = 3$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 52. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$-x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 53. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_2 - x_3 - x_4 = 1$$

$$x_1 - x_3 - x_4 = 0$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

.

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 54. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_2 - x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_1 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 55. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$-x_1 - x_2 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 0$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\Diamond$

Ejercicio 56. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 - x_3 - x_4 = 1$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$-x_1 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2&0&2&2&1\\ 2&2&2&2&0\\ 2&0&1&2&0\\ 1&1&0&0&2\\ 1&1&0&2&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 2&2&2&2&0\\ 2&0&1&2&0\\ 1&1&0&0&2\\ 1&1&0&2&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 0&2&0&0&2\\ 2&0&1&2&0\\ 1&1&0&0&2\\ 1&1&0&2&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 0&2&0&0&2\\ 0&0&2&0&2\\ 1&1&0&0&2\\ 1&1&0&2&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 0&2&0&0&2\\ 0&0&2&0&2\\ 0&1&2&2&0\\ 1&1&0&2&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 0&2&0&0&2\\ 0&0&2&0&2\\ 0&1&2&2&0\\ 0&1&2&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&2&0&2\\ 0&1&2&2&0\\ 0&1&2&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&2&0&2\\ 0&0&2&2&2\\ 0&1&2&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&2&0&2\\ 0&0&2&2&2\\ 0&0&2&1&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&2\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&2&2&2\\ 0&0&2&1&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&2&2&2\\ 0&0&2&1&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&2&1&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 0$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\2\\2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 57. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_2 = 2$$

$$x_1 - x_3 = 1$$

$$-x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_4 = 1$$

$$x_2 - x_4 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto y no está en el espacio vectorial V. $\Diamond$

Ejercicio 58. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$-x_1 - x_2 = 2$$

$$-x_2 - x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto y no está en el espacio vectorial V. $\Diamond$

Ejercicio 59. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.*

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = 1$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 1$$

$$-x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 2$$
$$x_5 = 0$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 60. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 61. *Sea V el espacio vectorial cuya base son las columnas de la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Determina si el vector $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ está en V y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas en base B.

Solución: El vector x de coordenadas de y se puede obtener planteando sistema $Bx = y$:

$$-x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Para resolverlo, tomamos la matriz ampliada del sistema:

$$[B|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Eso nos da las soluciones:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1$$

Por lo tanto y escrito en base B es $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$ y las coordenadas son $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. ◊

Ejercicio 62. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 10 & -11 & -51 \\ -3 & 8 & 21 \\ 6 & -2 & -25 \\ -8 & 4 & 35 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -11 & -51 \\ -3 & 8 & 21 \\ 6 & -2 & -25 \\ -8 & 4 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 63. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 9 \\ 5 & 8 & 8 \\ -5 & -7 & -4 \\ -10 & -12 & -1 \\ -9 & -17 & -24 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 13 & 9 \\ 5 & 8 & 8 \\ -5 & -7 & -4 \\ -10 & -12 & -1 \\ -9 & -17 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 64. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -23 \\ -13 & -2 & 42 \\ -2 & 0 & 7 \\ -7 & -1 & 23 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base

B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -23 \\ -13 & -2 & 42 \\ -2 & 0 & 7 \\ -7 & -1 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 2 & -1 & -9 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 65. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} -5 & 22 \\ 0 & 1 \\ -2 & 14 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 0 & 1 \\ -2 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} -5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{5}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{26}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{26}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{7}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{26}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{26}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{26}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{26}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{26}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 22 \\ 0 & 1 \\ -2 & 14 \\ -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 66. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & -14 \\ 0 & 1 \\ 2 & -23 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+6(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -14 \\ 0 & 1 \\ 2 & -23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 67. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -5 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & -9 \\ 9 & 0 & 15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -5 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & -9 \\ 9 & 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 68. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} -38 & 27 & -22 \\ 4 & -3 & 1 \\ -53 & 37 & -36 \\ 43 & -30 & 29 \\ -19 & 14 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & -9 \\ -2 & 6 & 7 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+6(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+6(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -19 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -19 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -19 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -19 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 & -9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} -9 & -19 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -9 & -19 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -38 & 27 & -22 \\ 4 & -3 & 1 \\ -53 & 37 & -36 \\ 43 & -30 & 29 \\ -19 & 14 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 69. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} -20 & 25 & -38 \\ -13 & 11 & 6 \\ -3 & 5 & -13 \\ 9 & -5 & -20 \\ 13 & -16 & 24 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 1 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -9 \\ -1 & -6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 8 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{29}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{29}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{29}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{29}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{29}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{29}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{\frac{1}{4}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{29}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{29}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{29}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{29}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{29}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{29}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{29}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{29}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{16(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{29}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{15}{8}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 7 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{29}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{29}{16}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 7 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -7 & -29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{29}{8}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 7 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -7 & -29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 15 & 58 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 7 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -7 & -29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 15 & 58 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -19 & -80 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 7 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -7 & -29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -18 & 15 & 58 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -19 & -80 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{ccccc} -9 & 7 & 30 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & -29 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -9 & 7 & 30 & 0 & 0 \\ 9 & -7 & -29 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & 25 & -38 \\ -13 & 11 & 6 \\ -3 & 5 & -13 \\ 9 & -5 & -20 \\ 13 & -16 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 70. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 34 & -7 \\ 43 & -9 \\ 23 & -5 \\ 29 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -2 & -7 \\ -2 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-6(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-9(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{9}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base

B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 34 & -7 \\ 43 & -9 \\ 23 & -5 \\ 29 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 71. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 10 & 24 \\ 9 & 22 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 24 \\ 9 & 22 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 72. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -9 & -34 \\ 6 & 22 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr} -1 & -3 \\ -9 & -34 \\ 6 & 22 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}\right].$$

◊

Ejercicio 73. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \left[\begin{array}{rrr} 29 & 49 & 88 \\ 0 & 0 & -1 \\ 13 & 22 & 40 \\ 24 & 40 & 68 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{rrr} 1 & -9 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 8 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -8 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{9}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -9 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -8 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+9(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -8 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 28 & -8 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-28(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{28}{9} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{9(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{28}{9} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -7 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{28}{9} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -7 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{28}{9} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{16}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -7 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & 16 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -7 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & 16 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & -18 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 8 & -7 & -18 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 & 49 & 88 \\ 0 & 0 & -1 \\ 13 & 22 & 40 \\ 24 & 40 & 68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -9 \\ -3 & -5 & -9 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 74. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 75. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 4 & 11 & 30 \\ -4 & -9 & -21 \\ -1 & -8 & -31 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{7}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{5}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 12 \\ 4 & 11 & 30 \\ -4 & -9 & -21 \\ -1 & -8 & -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -3 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

$\lozenge$

Ejercicio 76. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 15 & -38 \\ -3 & 8 \\ 10 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \\ -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-6(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-5(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr} 10 & -25 \\ 15 & -38 \\ -3 & 8 \\ 10 & -25 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr} 3 & -8 \\ 2 & -5 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 77. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \left[\begin{array}{rrr} -3 & 9 & 16 \\ -1 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 7 \\ 5 & -13 & -28 \\ -6 & 14 & 34 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{rrr} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -6 \\ -2 & 4 & 6 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{\frac{1}{5}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -2 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -2 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & -1 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 9 & 16 \\ -1 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 7 \\ 5 & -13 & -28 \\ -6 & 14 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 \\ -1 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\lozenge$

Ejercicio 78. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 47 \\ -15 & -16 & -58 \\ -20 & -21 & -76 \\ -3 & -2 & -7 \\ 17 & 20 & 73 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{rrrrr} -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{rrrrr} -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrr} 12 & 13 & 47 \\ -15 & -16 & -58 \\ -20 & -21 & -76 \\ -3 & -2 & -7 \\ 17 & 20 & 73 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \\ -2 & -2 & -7 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 79. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \left[\begin{array}{rr} 7 & 20 \\ 1 & 3 \\ 11 & 32 \\ 2 & 5 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{rr} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-5(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+5(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 20 \\ 1 & 3 \\ 11 & 32 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 80. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & -29 & -66 \\ 1 & 14 & 29 \\ -2 & -26 & -53 \\ -3 & -36 & -72 \\ 1 & 10 & 19 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -2 & -9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -29 & -66 \\ 1 & 14 & 29 \\ -2 & -26 & -53 \\ -3 & -36 & -72 \\ 1 & 10 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 81. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 13 \\ -3 & -3 & 8 \\ 7 & 8 & -20 \\ 9 & 20 & -38 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -11 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -11 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -11 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -11 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -11 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -8 & 13 \\ -3 & -3 & 8 \\ 7 & 8 & -20 \\ 9 & 20 & -38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 82. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 83. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 84. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\lozenge$

Ejercicio 85. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 86. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 87. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 88. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 89. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 90. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 91. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 92. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 93. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 94. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 95. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 96. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 97. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 98. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 99. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 100. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 101. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 102. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 103. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$.$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 104. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 105. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 106. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

.

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 107. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right].$$

$\Diamond$

Ejercicio 108. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 109. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 110. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 111. *Sea V un espacio vectorial del cual conocemos dos bases, B y B' que corresponden a las columnas de las siguientes matrices*

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Calcula la matriz de cambio de base $P_{B'B}$.

Solución: Vamos a utilizar la fórmula de que $P_{B'B} = AB'$, donde A es una matriz inversa por la izquierda de B. Empecemos calculando A, para lo cual vamos a hacer la siguiente reducción de matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

La matriz reducida nos ha quedado $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ por lo que una posible inversa por la izquierda de B podría ser $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Con esta matriz calculamos la matriz de cambio de base B' a B como

$$M_{B'B}(\mathsf{id}) = P_{B'B} = AB' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 112. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -8 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3{}_{B'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^3{}_{C'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3{}_{C} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^3{}_{B}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id}) M_{C'C}(f) M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -8 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 82 \\ 1 & 4 & 25 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 113. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & -7 \\ 5 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4{}_{C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^4{}_{B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2{}_{B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^2{}_{C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id}) M_{B'B}(f) M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & -5 & -7 \\ 5 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -897 & -104 & -130 & 1053 \\ -1587 & -184 & -230 & 1863 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 114. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 4 & -8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^4{}_{B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^4{}_{C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -6 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 4 & -8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 211 & 546 \\ 44 & 114 \\ -218 & -567 \\ -64 & -158 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 115. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^4{}_{B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^4{}_{B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 371 & 1015 \\ 504 & 1370 \\ 495 & 1344 \\ -110 & -300 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 116. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^2{}_{B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46 & -46 \\ -27 & -27 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 117. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4{}_{C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^2{}_{B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 36 & -24 & 36 \\ 5 & 15 & -10 & 15 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 118. *Consideremos la aplicación lineal* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ *de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f)=\begin{bmatrix} 3 & 8\\ -2 & -5\\ -1 & -8\\ 4 & 7\end{bmatrix}$$

siendo B' *y* B *las bases dadas por las matrices*

$$B'=\begin{bmatrix} 1 & -5\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3\\ 1 & 5 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 2 & 4\\ -1 & -3 & 0 & -4\end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$*.*

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^4{}_{B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^4{}_{C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f)=M_{C'C}(f)=M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id})=I^{-1}B=B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id})=(B')^{-1}I'=(B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f)=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 3\\ 1 & 5 & -1 & 4\\ -1 & 0 & 2 & 4\\ -1 & -3 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 8\\ -2 & -5\\ -1 & -8\\ 4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & 57\\ 10 & 69\\ 11 & 59\\ -13 & -86\end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 119. *Consideremos la aplicación lineal* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ *de la que conocemos que*

$$M_{B'_1C}(f)=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'_2C}$ *siendo* C *la base canónica y* B'_1 *y* B'_2 *las bases dadas por las matrices*

$$B'_1=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -5\\ 3 & -5 & 8\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix} \text{ y } B'_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2\\ 3 & 4 & -8\\ -5 & -3 & 7\end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3{}_{B_2'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^3{}_{B_1'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2{}_C. \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2'C}(f) = M_{B_1'C}(f)M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id})$$

- $M_{B_1'C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id}) = (B_1')^{-1}B_2'$ porque en este caso B_1' es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B_2'C}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & -5 & 8 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -8 \\ -5 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -220 & -256 & 516 \\ -165 & -192 & 387 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 120. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3{}_{C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^3{}_{B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2{}_B \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^2{}_C. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -21 & -36 & 45 \\ -98 & -168 & 210 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 121. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'_1C}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'_2C}$ siendo C la base canónica y B'_1 y B'_2 las bases dadas por las matrices

$$B'_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \text{ y } B'_2 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{B'_2} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{B'_1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2{}_C. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'_2C}(f) = M_{B'_1C}(f) M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id})$$

- $M_{B'_1C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id}) = (B'_1)^{-1}B'_2$ porque en este caso B'_1 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B'_2C}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 141 \\ -97 & -263 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 122. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'_1C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'_2C}$ siendo C la base canónica y B'_1 y B'_2 las bases dadas por las matrices

$$B'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 8 \end{bmatrix} \text{ y } B'_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 9 \\ -1 & -7 & -9 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3{}_{B'_2} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^3{}_{B'_1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2{}_C. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'_2C}(f) = M_{B'_1C}(f) M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id})$$

- $M_{B'_1C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id}) = (B'_1)^{-1}B'_2$ porque en este caso B'_1 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B_2'C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 9 \\ -1 & -7 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 41 \\ 25 & 102 & 206 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 123. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2{}_{B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^2{}_{C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B.$
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -13 & 13 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 124. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{B'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{C'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3{}_{C} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^3{}_{B}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id})M_{C'C}(f)M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 45 \\ -16 & -144 \\ -4 & -36 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 125. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de la que conocemos que*

$$M_{B'_1C}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'_2C}$ siendo C la base canónica y B'_1 y B'_2 las bases dadas por las matrices

$$B'_1 = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B'_2 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{B'_2} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{B'_1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3{}_{C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'_2C}(f) = M_{B'_1C}(f)M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id})$$

- $M_{B'_1C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id}) = (B'_1)^{-1}B'_2$ porque en este caso B'_1 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B'_2C}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 & -215 \\ 30 & -113 \\ -22 & 83 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 126. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^2{}_{B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2{}_{B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^2{}_{C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 45 & 55 \\ -54 & -66 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 127. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -3 & 2 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2{}_{C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^4{}_{B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^4{}_{B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -3 & 2 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -39 & 0 \\ 85 & 0 \\ 21 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 128. *Consideremos la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ *siendo* C' *la base canónica y* B_1 *y* B_2 *las bases dadas por las matrices*

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ y\ B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} {\mathbb{R}^2}_{C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & {\mathbb{R}^3}_{B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & {\mathbb{R}^3}_{B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \\ -5 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157 & 290 \\ 29 & 53 \\ -34 & -62 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 129. *Consideremos la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 5 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ *siendo* C' *la base canónica y* B_1 *y* B_2 *las bases dadas por las matrices*

$$B_1 = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \ y\ B_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3{}_{C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^3{}_{B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^3{}_{B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 5 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72 & -91 & -129 \\ -75 & -117 & -201 \\ 31 & 38 & 52 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 130. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -1 & 6 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3{}_{B'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^3{}_{C'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3{}_{C} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{R}^3{}_{B}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id})M_{C'C}(f)M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -1 & 6 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -50 & -140 \\ -2 & -2 & -14 \\ -5 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 131. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} {\mathbb{R}^4}_{B'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & {\mathbb{R}^4}_{C'} \arrow[r, "f"] & {\mathbb{R}^2}_{C} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & {\mathbb{R}^2}_{B}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id})M_{C'C}(f)M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & -22 & -89 & 78 \\ 8 & 6 & 21 & -17 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 132. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^4$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^4_{5B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^4_{5B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B'_1}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 133. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5B'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5C'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{5C} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{5B}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id})M_{C'C}(f)M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 134. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^3_{5B'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^3_{5C'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^3_{5C} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^3_{5B}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id}) M_{C'C}(f) M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 135. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'_1C}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'_2C}$ siendo C la base canónica y B'_1 y B'_2 las bases dadas por las matrices

$$B'_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^4_{5B'_2} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^4_{5B'_1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{5C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2'C}(f) = M_{B_1'C}(f)M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id})$$

- $M_{B_1'C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id}) = (B_1')^{-1}B_2'$ porque en este caso B_1' es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B_2'C}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 136. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B_2'C}$ siendo C la base canónica y B_1' y B_2' las bases dadas por las matrices

$$B_1' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5\,B_2'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5\,B_1'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{5\,C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2'C}(f) = M_{B_1'C}(f)M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id})$$

- $M_{B_1'C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id}) = (B_1')^{-1}B_2'$ porque en este caso B_1' es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B_2'C}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 137. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3$ de la que conocemos que*

$$M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B_2'C}$ siendo C la base canónica y B_1' y B_2' las bases dadas por las matrices

$$B_1' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5\,B'_2} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5\,B'_1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^3_{5\,C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'_2C}(f) = M_{B'_1C}(f)M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id})$$

- $M_{B'_1C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id}) = (B'_1)^{-1}B'_2$ porque en este caso B'_1 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B'_2C}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 138. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}^2_5 \to \mathbb{Z}^2_5$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5\,C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5\,B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{5\,B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B'_1}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 139. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}^2_5 \to \mathbb{Z}^2_5$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5\,C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5\,B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{5\,B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{5\,C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id}) M_{B'B}(f) M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 140. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}^3_5 \to \mathbb{Z}^2_5$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^3_{5\,C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5\,B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{5\,B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if}) M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 141. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}^2_5 \to \mathbb{Z}^3_5$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5B'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5C'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^3_{5C} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^3_{5B}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id})M_{C'C}(f)M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 142. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}^4_5 \to \mathbb{Z}^2_5$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^4_{5C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{5B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 143. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^3$ de la que conocemos que*

$$M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B_2'C}$ siendo C la base canónica y B_1' y B_2' las bases dadas por las matrices

$$B_1' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5B_2'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5B_1'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^3_{5C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2'C}(f) = M_{B_1'C}(f) M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id})$$

- $M_{B_1'C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id}) = (B_1')^{-1} B_2'$ porque en este caso B_1' es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B_2'C}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 144. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^3_{5C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^3_{5B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^3_{5B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 145. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^4$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{5C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^4_{5B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^4_{5B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 146. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B_2'C}$ siendo C la base canónica y B_1' y B_2' las bases dadas por las matrices

$$B_1' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^3_{5B'_2} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^3_{5B'_1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{5C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'_2C}(f) = M_{B'_1C}(f)M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id})$$

- $M_{B'_1C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id}) = (B'_1)^{-1}B'_2$ porque en este caso B'_1 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B'_2C}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 147. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'_1C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'_2C}$ siendo C la base canónica y B'_1 y B'_2 las bases dadas por las matrices

$$B'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^4_{5B'_2} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^4_{5B'_1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{5C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'_2C}(f) = M_{B'_1C}(f)M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id})$$

- $M_{B'_1C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id}) = (B'_1)^{-1}B'_2$ porque en este caso B'_1 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B'_2C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 148. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^4_{5C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^4_{5B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{5B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{5C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 149. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{5\,C'}^2 \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}_{5\,B'}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}_{5\,B}^2 \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}_{5\,C}^2. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 150. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B_2'C}$ siendo C la base canónica y B_1' y B_2' las bases dadas por las matrices

$$B_1' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{5\,B_2'}^2 \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}_{5\,B_1'}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}_{5\,C}^2. \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2'C}(f) = M_{B_1'C}(f)M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id})$$

- $M_{B_1'C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id}) = (B_1')^{-1}B_2'$ porque en este caso B_1' es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B_2'C}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 151. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^3_{5C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{5B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{5B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 152. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B_2'C}$ siendo C la base canónica y B_1' y B_2' las bases dadas por las matrices

$$B_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{3B_2'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{3B_1'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{3C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2'C}(f) = M_{B_1'C}(f)M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id})$$

- $M_{B_1'C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id}) = (B_1')^{-1}B_2'$ porque en este caso B_1' es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B_2'C}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 153. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^3$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{3C'} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^3_{3B_1} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^3_{3B_2}. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 154. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^3$ de la que conocemos que*

$$M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B_2'C}$ siendo C la base canónica y B_1' y B_2' las bases dadas por las matrices

$$B_1' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{3B_2'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{3B_1'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^3_{3C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B_2'C}(f) = M_{B_1'C}(f)M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id})$$

- $M_{B_1'C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B_2'B_1'}(\mathsf{id}) = (B_1')^{-1}B_2'$ porque en este caso B_1' es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B_2'C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

◊

Ejercicio 155. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^2$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{3B'}^4 \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}_{3C'}^4 \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}_{3C}^2 \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}_{3B}^2. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id}) M_{C'C}(f) M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 156. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{3C'}^3 \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}_{3B'}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}_{3B}^2 \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}_{3C}^2. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id}) M_{B'B}(f) M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 157. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$ de la que conocemos que*

$$M_{C'B_1}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{C'B_2}$ siendo C' la base canónica y B_1 y B_2 las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{3C'}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}_{3B_1}^2 \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}_{3B_2}^2. \end{tikzcd}$$

$$M_{C'B_2}(f) = M_{B_1B_2}(\mathsf{if})M_{C'B_1}(f)$$

- $M_{B_1B_2}(\mathsf{id}) = (B_2)^{-1}B_1$ porque en este caso B_2 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.
- $M_{C'B_1'}(f)$ nos la dan.

Por lo tanto

$$M_{C'B_2}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 158. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{3C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{3B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{3B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{3C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 159. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^2$ de la que conocemos que*

$$M_{B'B}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo B' y B las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^3_{3C'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^3_{3B'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{3B} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{3C}. \end{tikzcd}$$

$$M(f) = M_{C'C}(f) = M_{BC}(\mathsf{id})M_{B'B}(f)M_{C'B'}(\mathsf{id})$$

- $M_{BC}(\mathsf{id}) = I^{-1}B = B$.
- $M_{B'B}(f)$ nos la dan.
- $M_{C'B'}(\mathsf{id}) = (B')^{-1}I' = (B')^{-1}$ porque en este caso B' es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 160. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^2$ de la que conocemos que*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si B' y B son las bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B'B}(f)$.

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^4_{3B'} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^4_{3C'} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^2_{3C} \arrow[r, "\mathsf{id}"] & \mathbb{Z}^2_{3B}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'B}(f) = M_{CB}(\mathsf{id})M_{C'C}(f)M_{B'C'}(\mathsf{id})$$

- $M_{CB}(\mathsf{id}) = B^{-1}I = B^{-1}$ porque en este caso B es invertible y su inversa por la izquierda es también su inversa.
- $M_{C'C}(f) = M(f)$ nos la dan.
- $M_{B'C'}(\mathsf{id}) = (I')^{-1}B' = B'$.

Por lo tanto

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$

Ejercicio 161. *Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^4$ de la que conocemos que*

$$M_{B_1'C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcula $M_{B_2'C}$ siendo C la base canónica y B_1' y B_2' las bases dadas por las matrices

$$B_1' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B_2' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución: Para resolver el problema empecemos poniendo el diagrama de lo que tenemos y lo que nos piden:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2_{3\,B'_2} \arrow[r, "\mathsf{id}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{Z}^2_{3\,B'_1} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}^4_{3\,C}. \end{tikzcd}$$

$$M_{B'_2C}(f) = M_{B'_1C}(f)M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id})$$

- $M_{B'_1C}(f)$ nos la dan.
- $M_{B'_2B'_1}(\mathsf{id}) = (B'_1)^{-1}B'_2$ porque en este caso B'_1 es invertible y su inversa por la izquierda también es su inversa.

Por lo tanto

$$M_{B'_2C}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Diamond$