Vídeo : `https://youtu.be/wZONpvCO4j4`

1. Resumen

La forma más directa para comprobar que un espacio vectorial está contenido dentro de otro es cuando el pequeño nos o dan en paramétricas y el grande en implícitas.

Proposición 1. *Sean U y V dos espacios vectoriales, tales que $U = C(B)$ y $V = N(H)$ para ciertas matrices $B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $H \in \mathbf{M}_{p\times m}(K)$. Entonces*

$$C(B) \leq N(H) \Leftrightarrow HB = 0.$$

Demostración. Si $HB = 0$, como los vectores de $C(B)$ son los de la forma Bx y los de $N(H)$ son los y que cumplen que $Hy = 0$, tendremos que los vectores de la forma Bx cumplen que $H(Bx) = (HB)x = 0$.
Recíprocamente, si $C(B) \leq N(H)$, en particular, todas las columnas de B están en $C(B)$ y por lo tanto en $N(H)$. Al estar en $N(H)$ cumplirán las ecuaciones implícitas y tendremos $HB = 0$. □

Proposición 2. *De todo conjunto generador de un espacio vectorial V se puede extraer una base.*

Demostración. Si B es un conjunto generador de V, entonces $V = C(B)$ y tomando las columnas pivote, podemos obtener un subconjunto de columnas de B que sean generadoras y linealmente independientes. □

Proposición 3. *Todo conjunto de vectores linealmente independiente de un espacio vectorial V se puede extender a una base de V.*

Demostración. Sea B un conjunto linealmente independiente y consideremos B' una base de V. Si juntamos los dos conjuntos B y B', formamos un conjunto generador de V del que podemos extraer una base de V reduciendo la matriz $[B|B']$ y tomando las columnas pivote. En el proceso de reducción, todas las columnas de B serán pivotes porque son linealmente independientes, así que la base que extraeremos estará formada por los vectores de B y alguno o algunos nuevos tomados de B'. □

Estos dos resultados nos prueban que en un espacio de dimensión n, todos los conjuntos linealmente independientes tienen como máximo n elementos y todos los conjunto generadores tienen como mínimo n elementos. Además podemos deducir el siguiente teorema:

Teorema 4. *Sean U y V dos espacios vectoriales tales que $U \leq V$, entonces:*

1. $\mathsf{dim}(U) \leq \mathsf{dim}(V)$.
2. *Si* $\mathsf{dim}(U) = \mathsf{dim}(V)$ *entonces* $U = V$.

Demostración. Sea B una base de U con $\mathsf{dim}(U)$ elementos. Los vectores de B son linealmente independientes, y como están en V, el número de elementos de B es menor o igual que $\mathsf{dim}(V)$.
Si $\mathsf{dim}(U) = \mathsf{dim}(V)$ entonces la base de U se extiende a una base de V, pero como el número de elementos ya es el mismo que el las bases de V, entonces la bases de U también lo son de V y $U = V$. □

Proposición 5. *Sea $B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $V = C(B)$. Dado un vector $y \in K^m$ tenemos que $y \in V$ si y solo si al reducir la matriz $[B|y]$, la columna de y no es pivote.*

Demostración. El vector y está en $C(B)$ si y solo si el sistema de ecuacioens $Bx = y$ tiene solución y eso es equivalente a que la columna de y en la matriz $[B|y]$ no es pivote. □

Teorema 6. *Sean $B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $B' \in \mathbf{M}_{m\times p}(K)$, $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Entonces $U \leq V$ si y solo si al hacer la reducción por filas de la matriz $[B|B']$ ninguna de las columnas de la parte correspondiente a B' es columna pivote.*

Demostración. El espacio U estará contenido en V si y solo si todos los generadores de U están en V, es decir, todas las columnas de B' están en $V = C(B)$. Para comprobar eso, utilizamos la proposición anterior pero sobre todas las columnas de B' al mismo tiempo y concluimos el resultado. □

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Ejercicio 7. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 8. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 9. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 10. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 11. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 12. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+\frac{3}{7}(1)}} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{4}{7}(1)}} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 13. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}\right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 14. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -8 & 6 \\ -2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -8 & 6 \\ -2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 15. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-\frac{4}{3}(1)}} \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 16. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -4 \\ -4 & -7 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & -4 \\ -4 & -7 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+\frac{4}{5}(1)}} \begin{bmatrix} 5 & 9 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{5}(1)}} \begin{bmatrix} 5 & 9 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 5 & 9 & -4 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 17. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & -3 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & -3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 18. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 19. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & -3 & 4 \\ -1 & 7 & -4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 20. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 21. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 22. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 23. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & -9 & -8 \\ 4 & 8 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -5 & -9 & -8 \\ 4 & 8 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 11 & 22 \\ 4 & 8 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-8(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+11(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 24. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 25. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -8 \\ -1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -8 \\ -1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 26. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+6(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 27. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 28. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 29. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 30. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 31. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 32. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 33. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 34. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2,3)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 35. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 36. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 37. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 38. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 39. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 40. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 41. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 42. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 43. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 44. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 45. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 46. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 47. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 48. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 49. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(1,2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 50. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 51. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 52. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 53. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 54. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz original que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 55. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 56. *Consideremos el conjunto generador del espacio V dado por las columnas de la matriz B. Extrae una base de entre los vectores de ese conjunto, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, debemos encontrar el máximo número de columnas linealmente independientes. Para ello no es necesario reducir completamente por filas, basta con triangularizar para detectar los pivotes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A la vista de esta reducción, la columna pivote es la 1 por lo que esa es precisamente la columna de la matriz original que forma la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 57. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -6 & 4 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -8 & -9 \\ 2 & -2 & 0 & -7 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -14 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ -14 & 0 & 3 & -8 & -9 \\ -11 & 2 & -2 & 0 & -7 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -14 & 0 & 3 & -8 & -9 \\ -11 & 2 & -2 & 0 & -7 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{7}{3}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & \frac{44}{3} & -22 & \frac{1}{3} \\ -11 & 2 & -2 & 0 & -7 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{11}{6}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & \frac{44}{3} & -22 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{43}{6} & -11 & \frac{1}{3} \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & \frac{44}{3} & -22 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{43}{6} & -11 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 4 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+7(2)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{43}{6} & -11 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 4 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{7}{2}(2)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 4 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(2)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{4}(3)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & -3 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -14 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 58. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 9 \\ 2 & 2 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-5(3)}} \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 59. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ -6 & -2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-6(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{r|rr} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 60. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{3}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{5} & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{5} & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & -1 \\ 0 & -\frac{9}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{2}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{5} & 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & -1 \\ 0 & -\frac{9}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{9}{10}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{1}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{4}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(4)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 61. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 5 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{5}{2}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{5}(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{6}{5}(3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 62. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 3 \\ -3 & -7 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \\ 7 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & -1 & -5 & 3 \\ 7 & 0 & -3 & -7 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 7 & 2 & -1 & -5 & 3 \\ 7 & 0 & -3 & -7 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{7}{4}(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -12 & -\frac{25}{4} & -12 & -\frac{23}{4} \\ 7 & 0 & -3 & -7 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{7}{4}(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -12 & -\frac{25}{4} & -12 & -\frac{23}{4} \\ 0 & -14 & -\frac{33}{4} & -14 & -\frac{23}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+12(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -14 & -\frac{33}{4} & -14 & -\frac{23}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+14(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-5(3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 63. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & -4 \\ 1 & 6 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 6 & 1 & 6 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -2 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{2}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -2 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{5}{4}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{25}{4} & -12 & 12 \\ -2 & 0 & 1 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{25}{4} & -12 & 12 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{9}{2}(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 64. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -9 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 14 & -1 \\ -1 & 8 & -7 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & -9 & 10 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 14 & -1 & 2 & 2 & 3 & -9 & 8 \\ -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 1 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & -9 & 10 & 0 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 14 & -1 & 2 & 2 & 3 & -9 & 8 \\ 2 & 0 & 7 & 1 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & -9 & 10 & 0 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 14 & -1 & 2 & 2 & 3 & -9 & 8 \\ 0 & 16 & -7 & 1 & 1 & 4 & -11 & 4 \\ 1 & -9 & 10 & 0 & -1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & 14 & -1 & 2 & 2 & 3 & -9 & 8 \\ 0 & 16 & -7 & 1 & 1 & 4 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & -7 & 1 & 1 & 4 & -11 & 4 \\ 0 & 14 & -1 & 2 & 2 & 3 & -9 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+16(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 41 & 1 & 1 & 4 & 5 & 36 \\ 0 & 14 & -1 & 2 & 2 & 3 & -9 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+14(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 41 & 1 & 1 & 4 & 5 & 36 \\ 0 & 0 & 41 & 2 & 2 & 3 & 5 & 36 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 41 & 1 & 1 & 4 & 5 & 36 \\ 0 & 0 & 41 & 2 & 2 & 3 & 5 & 36 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & -1 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 41 & 1 & 1 & 4 & 5 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & -1 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{8}{41}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 41 & 1 & 1 & 4 & 5 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{33}{41} & -\frac{33}{41} & \frac{32}{41} & -\frac{1}{41} & \frac{1}{41} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{33}{41}(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 8 & -7 & 0 & 1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 41 & 1 & 1 & 4 & 5 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{41} & -\frac{1}{41} & \frac{1}{41} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 6] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 0 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

◊

Ejercicio 65. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -7 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -8 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} -5 & -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 7 & -1 & -1 & 1 & 1 & -7 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -8 & 2 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -1 & 1 & 1 & -7 & -5 \\ -5 & -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ -3 & -8 & 2 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-7(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -15 & 6 & 8 & -6 & -7 & 2 \\ -5 & -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ -3 & -8 & 2 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -15 & 6 & 8 & -6 & -7 & 2 \\ 0 & 9 & -4 & -5 & 4 & 4 & -1 \\ -3 & -8 & 2 & 3 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -15 & 6 & 8 & -6 & -7 & 2 \\ 0 & 9 & -4 & -5 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{3}{5}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -15 & 6 & 8 & -6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{15}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -15 & 6 & 8 & -6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{16}{15} & \frac{9}{5} & -\frac{16}{15} & \frac{11}{15} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{9}{2}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -15 & 6 & 8 & -6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 66. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & -7 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 6 & -7 & -5 \\ 6 & -5 & -2 \\ 8 & -8 & -4 \\ -7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 6 & -7 & -5 & -2 & -1 & 0 & -1 & -7 \\ 6 & -5 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 8 & -8 & -4 & -2 & -1 & 1 & -2 & -7 \\ -7 & 7 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 6 & -5 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 8 & -8 & -4 & -2 & -1 & 1 & -2 & -7 \\ -7 & 7 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & -1 & 3 & 4 & -5 & 8 \\ 8 & -8 & -4 & -2 & -1 & 1 & -2 & -7 \\ -7 & 7 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & -1 & 3 & 4 & -5 & 8 \\ 0 & 8 & 12 & -2 & 3 & 5 & -6 & 9 \\ -7 & 7 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{7}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & -1 & 3 & 4 & -5 & 8 \\ 0 & 8 & 12 & -2 & 3 & 5 & -6 & 9 \\ 0 & -7 & -11 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{7}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 8 & 12 & -2 & 3 & 5 & -6 & 9 \\ 0 & -7 & -11 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{8}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & -7 & -11 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{7}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{11}{10} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{11}{10} & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+6(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{4}{3}(4)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -5 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

$\Diamond$

Ejercicio 67. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -9 & -3 \\ -2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -2 & -2 \\ -5 & -2 & -9 & -3 \\ -10 & -2 & -1 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -9 & -3 \\ -10 & -2 & -1 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{5}{3}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrr} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -4 & \frac{1}{3} \\ -10 & -2 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{10}{3}(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -4 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & 9 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 9 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+7(3)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 68. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -2 \\ -2 & -7 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 2 & 10 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -7 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ -2 & -7 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ -2 & -7 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+6(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{7}{4}(3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{1}{2}(3)}}\left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(5)-2(4)}}\left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ -7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 69. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -5 & 5 & 9 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & -2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -8 & -3 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & 13 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & 3 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 13 & 2 & -4 & -5 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 13 & 2 & -4 & -2 & 4 & 9 \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(2)+\frac{3}{4}(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -3 & -6 & 13 & 2 & -4 & -5 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 13 & 2 & -4 & -2 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{8}(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{39}{8} & \frac{29}{2} & \frac{31}{8} & -7 & -\frac{31}{8} & \frac{23}{4} & \frac{15}{2} \\ 3 & 1 & 2 & 2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 13 & 2 & -4 & -2 & 4 & 9 \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4)+\frac{3}{8}(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{39}{8} & \frac{29}{2} & \frac{31}{8} & -7 & -\frac{31}{8} & \frac{23}{4} & \frac{15}{2} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 13 & 2 & -4 & -2 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{39}{14}(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{43}{7} & \frac{25}{14} & \frac{29}{7} & -\frac{25}{14} & \frac{61}{14} & \frac{72}{7} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -7 & 13 & 2 & -4 & -2 & 4 & 9 \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4)+\frac{1}{14}(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{43}{7} & \frac{25}{14} & \frac{29}{7} & -\frac{25}{14} & \frac{61}{14} & \frac{72}{7} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{4}{7} \\ 0 & -7 & 13 & 2 & -4 & -2 & 4 & 9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{43}{7} & \frac{25}{14} & \frac{29}{7} & -\frac{25}{14} & \frac{61}{14} & \frac{72}{7} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 12 & 1 & 2 & 13 \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3,5)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 12 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{43}{7} & \frac{25}{14} & \frac{29}{7} & -\frac{25}{14} & \frac{61}{14} & \frac{72}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{7}(3)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 12 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{22}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{22}{7} \\ 0 & 0 & \frac{43}{7} & \frac{25}{14} & \frac{29}{7} & -\frac{25}{14} & \frac{61}{14} & \frac{72}{7} \end{array}\right]\xrightarrow{E_{(5)-\frac{43}{7}(3)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 12 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{22}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{22}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{111}{14} & -\frac{487}{7} & -\frac{111}{14} & -\frac{111}{14} & -\frac{487}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{111}{5}(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -8 & -3 & -4 & -5 & 8 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{7}{4} & -3 & -\frac{3}{4} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 12 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{22}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{22}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 13 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$.

$\Diamond$

Ejercicio 70. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cc} -7 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{4}{7}(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} -7 & -2 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{7}(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} -7 & -2 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} -7 & -2 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 71. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cc} 4 & -2 & -4 \\ -5 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{5}{4}(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 4 & -2 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 6 & -3 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{2}(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 4 & -2 & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 72. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 7 \\ 2 & -2 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 5 & -6 & -1 & -1 & 5 \\ -6 & 7 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -7 & 9 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{6}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 5 & -6 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -7 & 9 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 5 & -6 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -1 \\ -7 & 9 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{7}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 5 & -6 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -1 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 5 & -6 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 5 & -6 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 5 & -6 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 73. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & -4 & -9 \\ -1 & 1 & 5 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & -2 \\ -3 & -16 & -12 & -7 \\ 3 & -12 & -7 & -3 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -16 & -12 & -7 & -3 & 0 & 4 & -4 & -9 \\ 3 & -12 & -7 & -3 & -1 & 1 & 5 & -2 & -6 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -16 & -12 & -7 & -3 & 0 & 4 & -4 & -9 \\ 3 & -12 & -7 & -3 & -1 & 1 & 5 & -2 & -6 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -3 & -16 & -12 & -7 & -3 & 0 & 4 & -4 & -9 \\ 3 & -12 & -7 & -3 & -1 & 1 & 5 & -2 & -6 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -12 & -7 & -3 & -1 & 1 & 5 & -2 & -6 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -24 & -16 & -9 & -4 & 1 & 8 & -5 & -12 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 0 & 1 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -24 & -16 & -9 & -4 & 1 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & -24 & -16 & -9 & -4 & 1 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 & -2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{5}{8}(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 & -2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{2} & -\frac{23}{8} & \frac{13}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{11}{8} & \frac{11}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 & -2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{2} & -\frac{23}{8} & \frac{13}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{11}{8} & \frac{11}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 & -2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{2} & -\frac{23}{8} & \frac{13}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{11}{8} & \frac{11}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{1}{8}(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 & -2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{8} & -\frac{7}{2} & \frac{15}{8} & 0 & \frac{13}{8} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{15}{4}(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} -1 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & -3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 & -2 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -16 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -12 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$\Diamond$

Ejercicio 74. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -5 \\ -1 & 5 & -4 & 6 \\ 1 & -6 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ -7 & -1 & 5 & -4 & 6 \\ 4 & 1 & -6 & 6 & -3 \\ -5 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 & 6 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{7}{6}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 4 & 1 & -6 & 6 & -3 \\ -5 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 & 6 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 4 & \frac{1}{3} \\ -5 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 & 6 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{5}{6}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ -5 & 0 & -4 & 6 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{5}{6}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{22}{3} & \frac{17}{2} & \frac{5}{6} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{22}{3} & \frac{17}{2} & \frac{5}{6} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{22}{3} & \frac{17}{2} & \frac{5}{6} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-5(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 11 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 11 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 11 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-9(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 75. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} -2 & 3 & -5 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -5 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 76. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -3 \\ 15 & -11 \\ 17 & -11 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{rr|rrr} 7 & -5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 15 & -11 & 2 & 4 & 9 \\ 17 & -11 & 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{4}{7}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 7 & -5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 15 & -11 & 2 & 4 & 9 \\ 17 & -11 & 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{15}{7}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 7 & -5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 17 & -11 & 4 & 6 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{17}{7}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 7 & -5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & \frac{8}{7} & \frac{11}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{19}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 7 & -5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{8}{7} & \frac{11}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{19}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+8(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrr} 7 & -5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 7 & -5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -11 \\ -11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 77. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. ◊

Ejercicio 78. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4\\4\\4\\4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\1\\3\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\4\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 79. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 4 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 3&4&1&3&0&0&3\\ 1&4&2&3&2&0&1\\ 4&3&4&0&0&1&2\\ 4&2&2&4&1&2&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&4&2&3&2&0&1\\ 3&4&1&3&0&0&3\\ 4&3&4&0&0&1&2\\ 4&2&2&4&1&2&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&4&2&3&2&0&1\\ 0&2&0&4&4&0&0\\ 4&3&4&0&0&1&2\\ 4&2&2&4&1&2&3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&4&2&3&2&0&1\\ 0&2&0&4&4&0&0\\ 0&2&1&3&2&1&3\\ 4&2&2&4&1&2&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&4&2&3&2&0&1\\ 0&2&0&4&4&0&0\\ 0&2&1&3&2&1&3\\ 0&1&4&2&3&2&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&4&2&3&2&0&1\\ 0&1&4&2&3&2&4\\ 0&2&1&3&2&1&3\\ 0&2&0&4&4&0&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&4&2&3&2&0&1\\ 0&1&4&2&3&2&4\\ 0&0&3&4&1&2&0\\ 0&2&0&4&4&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&4&2&3&2&0&1\\ 0&1&4&2&3&2&4\\ 0&0&3&4&1&2&0\\ 0&0&2&0&3&1&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&4&2&3&2&0&1\\ 0&1&4&2&3&2&4\\ 0&0&3&4&1&2&0\\ 0&0&0&4&4&3&2 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3\\1\\4\\4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\\4\\3\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\2\\4\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3\\3\\0\\4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 80. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 4\\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2&1&1&4&2\\ 1&4&0&1&0\\ 3&4&0&2&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1&4&0&1&0\\ 2&1&1&4&2\\ 3&4&0&2&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1&4&0&1&0\\ 0&3&1&2&2\\ 3&4&0&2&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 81. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 6] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1\\3\\2\\2\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\3\\4\\4\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\4\\1\\4\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\\0\\0\\3\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3\\2\\3\\3\\4 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 82. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1\\4\\1\\4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1\\2\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\\1\\1\\4 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 83. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 84. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 85. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 86. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 87. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 4\\4\\3\\1\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3\\1\\4\\0\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\1\\3\\4\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\3\\0\\2\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\4\\1\\0\\0 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 88. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3\\1\\0\\3\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1\\0\\0\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\2\\2\\2\\4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\4\\3\\4\\0 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 89. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 90. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 91. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son $[1, 2, 3, 5]$ por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 92. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 93. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cc} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 94. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 95. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 96. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 97. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 7] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 98. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 99. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. ♢

Ejercicio 100. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 8] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 101. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 102. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ◊

Ejercicio 103. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&2&1&0&1&2&2&2&1\\ 0&1&0&0&2&1&2&1&0\\ 0&0&1&2&2&0&0&1&1\\ 0&0&1&2&0&1&1&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&2&1&2&1&0\\ 0&2&1&0&1&2&2&2&1\\ 0&0&1&2&2&0&0&1&1\\ 0&0&1&2&0&1&1&0&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&2&1&2&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&2&2&0&0&1&1\\ 0&0&1&2&0&1&1&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&2&1&2&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&2&2&0&2&1&0\\ 0&0&1&2&0&1&1&0&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&2&1&2&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&2&2&0&2&1&0\\ 0&0&0&2&0&1&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&2&1&2&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&2&2&0&2&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&2&1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 104. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0&2&1&2&0\\ 1&2&0&2&0\\ 0&0&1&2&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&1&2&0&1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2&1&1\\ 1&2&2\\ 0&0&1\\ 0&0&2\\ 2&2&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2&1&1&0&2&1&2&0\\ 1&2&2&1&2&0&2&0\\ 0&0&1&0&0&1&2&0\\ 0&0&2&1&0&0&0&0\\ 2&2&0&1&1&2&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&2&2&1&2&0&2&0\\ 2&1&1&0&2&1&2&0\\ 0&0&1&0&0&1&2&0\\ 0&0&2&1&0&0&0&0\\ 2&2&0&1&1&2&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&2&2&1&2&0&2&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&2&0\\ 0&0&2&1&0&0&0&0\\ 2&2&0&1&1&2&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&2&2&1&2&0&2&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&2&0\\ 0&0&2&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&2&0&2&2&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&2&2&1&2&0&2&0\\ 0&1&2&2&0&2&2&1\\ 0&0&1&0&0&1&2&0\\ 0&0&2&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&2&2&1&2&0&2&0\\ 0&1&2&2&0&2&2&1\\ 0&0&1&0&0&1&2&0\\ 0&0&0&1&0&1&2&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 4, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 105. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son [1, 2, 3, 5] por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 106. *Sea V un espacio vectorial con base B y consideremos los vectores linealmente independientes de V dados por las columnas de B'. Extiende B' usando columnas de B para formar una base de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para encontrar la base que nos piden, consideraremos el conjunto generador de V dado por los vectores $[B'|B]$ y buscaremos las columnas pivote, para lo cual vamos a triangularizar:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 0&0&0&2&1&1&2&1&1\\ 0&2&0&1&1&2&0&2&0\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 2&2&2&2&0&1&1&2&0\\ 1&2&1&1&2&2&0&2&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&2&2&0&2&1\\ 0&2&0&1&1&2&0&2&0\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 2&2&2&2&0&1&1&2&0\\ 0&0&0&2&1&1&2&1&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&2&2&0&2&1\\ 0&2&0&1&1&2&0&2&0\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 0&1&0&0&2&0&1&1&1\\ 0&0&0&2&1&1&2&1&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&2&2&0&2&1\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 0&2&0&1&1&2&0&2&0\\ 0&1&0&0&2&0&1&1&1\\ 0&0&0&2&1&1&2&1&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&2&2&0&2&1\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 0&0&2&0&0&1&2&0&0\\ 0&1&0&0&2&0&1&1&1\\ 0&0&0&2&1&1&2&1&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&2&2&0&2&1\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 0&0&2&0&0&1&2&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&2&0&1\\ 0&0&0&2&1&1&2&1&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&2&2&0&2&1\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 0&0&1&1&0&1&2&0&1\\ 0&0&2&0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&2&1&1&2&1&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&2&2&0&2&1\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 0&0&1&1&0&1&2&0&1\\ 0&0&0&1&0&2&1&0&1\\ 0&0&0&2&1&1&2&1&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&2&2&0&2&1\\ 0&1&2&2&2&2&2&1&0\\ 0&0&1&1&0&1&2&0&1\\ 0&0&0&1&0&2&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, las columnas pivote son $[1, 2, 3, 4, 5]$ por lo que esas son precisamente las columnas de la matriz $[B'|B]$ que forman la base buscada: $\left\{ \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\2\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\2\\1\\2\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\2\\2\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\1\\2\\2\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1\\2\\0\\2 \end{bmatrix} \right\}$. $\Diamond$

Ejercicio 107. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1&3&4\\ 0&1&2\\ 0&2&4\\ -2&-4&-4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -3&0&7\\ -2&-1&3\\ -4&-2&6\\ 2&-2&-8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&4&-3&0&7\\ 0&1&2&-2&-1&3\\ 0&2&4&-4&-2&6\\ -2&-4&-4&2&-2&-8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&3&4&-3&0&7\\ 0&1&2&-2&-1&3\\ 0&2&4&-4&-2&6\\ 0&2&4&-4&-2&6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & -2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 108. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -9 & 3 \\ -11 & 4 \\ 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 8 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 9 & -11 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 8 & -8 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 2 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 8 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 9 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 8 & -8 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 2 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 9 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 8 & -8 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 2 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 8 & -8 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 2 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 2 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 2 & 0 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 109. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 8 \\ -2 & -6 & 3 \\ -3 & 7 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & -5 & -1 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & 3 & -6 & 2 & -2 & 8 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -2 & -6 & 3 \\ -2 & 6 & -1 & -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ -1 & 1 & 3 & -6 & 2 & -2 & 8 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -2 & -6 & 3 \\ -2 & 6 & -1 & -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & -7 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & -1 & 5 & -2 & -2 & -6 & 3 \\ -2 & 6 & -1 & -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & -7 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 2 & 4 & 7 \\ -2 & 6 & -1 & -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & -7 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 10 & -7 & -4 & 1 & 17 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{7}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & -4 & \frac{19}{7} & -\frac{9}{7} & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -4 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 10 & -7 & -4 & 1 & 17 & 14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{7}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & -4 & \frac{19}{7} & -\frac{9}{7} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & -1 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \\ 0 & 10 & -7 & -4 & 1 & 17 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{10}{7}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & -4 & \frac{19}{7} & -\frac{9}{7} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & -1 & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{7} & 6 & -\frac{23}{7} & \frac{19}{7} & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{9}(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & -4 & \frac{19}{7} & -\frac{9}{7} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{7} & 6 & -\frac{23}{7} & \frac{19}{7} & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{19}{9}(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & -4 & \frac{19}{7} & -\frac{9}{7} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{22}{9} & \frac{22}{9} & 0 & \frac{22}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-22(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -7 & 3 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & -4 & \frac{19}{7} & -\frac{9}{7} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 110. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -5 & 5 \\ 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \\ 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -6 & 5 & 6 \\ -5 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{5}{6}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{49}{6} & 10 \\ 4 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{49}{6} & 10 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -7 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{49}{6} & 10 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 111. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 2 \\ -4 & -3 & -8 & -6 \\ -5 & -7 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -6 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ -4 & -3 & -8 & -6 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ -5 & -7 & 3 & 0 & 3 & -1 & -8 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -6 & -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{4}{3}(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ -5 & -7 & 3 & 0 & 3 & -1 & -8 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -6 & -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{5}{3}(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{44}{3} & \frac{10}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{49}{3} & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -6 & -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{44}{3} & \frac{10}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{49}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & -1 \\ -2 & -1 & -6 & -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ 0 & -\frac{11}{3} & \frac{44}{3} & \frac{10}{3} & \frac{29}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{49}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-11(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & -49 & 1 & 24 & -35 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-5(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & -49 & 1 & 24 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -25 & 1 & 15 & -16 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & -49 & 1 & 24 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -25 & 1 & 15 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{8}(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & -49 & 1 & 24 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{53}{8} & \frac{5}{8} & 6 & -\frac{23}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+\frac{3}{40}(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 7 & 2 & 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & -49 & 1 & 24 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{53}{8} & \frac{5}{8} & 6 & -\frac{23}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{133}{40} & \frac{3}{40} & -\frac{11}{5} & -\frac{5}{8} \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 112. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -5 & 1 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & -4 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & -4 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & -4 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & -4 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & -4 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & -4 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ♢

Ejercicio 113. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 1 & -7 \\ -2 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -3 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & -2 & 5 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -4 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & -2 & -2 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -3 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -4 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & -2 & -2 & 0 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -3 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -4 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -3 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -4 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -3 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -3 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -3 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 114. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -3 \\ 2 & -8 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -7 & -2 \\ -4 & -2 \\ 4 & -1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ -2 & 5 & 7 & -7 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -8 & -8 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -8 & -8 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -8 & -8 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ◊

Ejercicio 115. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 4 \\ 0 & -4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & -8 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 116. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \qquad B' = \left[\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & -8 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 4 & 2 & 3 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -9 & 14 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 117. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 6 \\ -5 & -4 & -7 & 3 \\ -5 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \left[\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ -2 & -5 & -9 \\ -1 & -4 & -9 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & 2 & 4 & 7 \\ -5 & -4 & -7 & 3 & -2 & -5 & -9 \\ -5 & -2 & -1 & -1 & -1 & -4 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & 2 & 4 & 7 \\ -5 & -4 & -7 & 3 & -2 & -5 & -9 \\ -5 & -2 & -1 & -1 & -1 & -4 & -9 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_{(4)+5(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -7 & -10 & -9 \\ -5 & -2 & -1 & -1 & -1 & -4 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+5(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & 6 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -7 & -10 & -9 \\ 0 & 3 & 9 & -6 & -6 & -9 & -9 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -7 & -10 & -9 \\ 0 & 3 & 9 & -6 & -6 & -9 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 9 & -6 & -6 & -9 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -21 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 118. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 \\ -2 & -1 & -4 & -6 \\ -2 & -3 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \left[\begin{array}{rrrr} -1 & 1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & -8 & 0 \\ -1 & 2 & -6 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ -2 & -1 & -4 & -6 & -2 & 1 & -8 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 8 & -1 & 2 & -6 & -6 \\ 5 & 6 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{34}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{32}{3} & -2 \\ -2 & -3 & 5 & 8 & -1 & 2 & -6 & -6 \\ 5 & 6 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{34}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{32}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{26}{3} & -8 \\ 5 & 6 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{5}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{34}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{32}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{26}{3} & -8 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{25}{3} & \frac{46}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{34}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{32}{3} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{26}{3} & -8 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{25}{3} & \frac{46}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 10 & 3 & -2 & 11 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 10 & 3 & -2 & 11 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{26}{3} & -8 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{25}{3} & \frac{46}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{34}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{32}{3} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 10 & 3 & -2 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{37}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{25}{3} & \frac{46}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{20}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{34}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{32}{3} & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 10 & 3 & -2 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{37}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{26}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{34}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{32}{3} & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{5}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 10 & 3 & -2 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{37}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{26}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{23}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+13(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 10 & 3 & -2 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{37}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -34 & 44 & -161 & -124 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{23}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+8(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 4 & -5 & -8 & -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 10 & 3 & -2 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{37}{3} & -\frac{28}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -34 & 44 & -161 & -124 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19 & 25 & -91 & -70 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 119. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} -1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 120. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 6 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & -5 \\ -2 & -1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 6 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & -1 & -5 \\ 3 & 6 & -6 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -2 & 2 & -1 & -5 \\ -3 & -6 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -6 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -2 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -6 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -2 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -16 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -2 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 121. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ -2 & -7 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & 0 & -2 & -9 \\ -2 & -7 & 3 & -5 & 1 & -1 & -9 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & 0 & -2 & -9 \\ -2 & -7 & 3 & -5 & 1 & -1 & -9 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 2 & 0 & -5 \\ -2 & -7 & 3 & -5 & 1 & -1 & -9 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & -1 & -3 & -13 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-5(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 2 & -18 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrr} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 122. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \left[\begin{array}{rr} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -9 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -7 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -23 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 123. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & -5 & -7 \\ -2 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & -7 & -1 & 1 & -8 \\ -2 & 5 & 8 & 0 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -11 & -14 \\ -2 & 5 & 8 & 0 & -2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & -2 & 6 & 10 & 13 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & -2 & 6 & 10 & 13 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 & 9 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -10 & -13 & -26 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -10 & -23 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 124. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -2 & -7 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 9 & 5 \\ -2 & -6 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -8 \\ -6 & -1 & -10 \\ -6 & 2 & -4 \\ 6 & 3 & 14 \\ -6 & 0 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ -2 & -7 & -3 & -6 & -1 & -10 \\ -2 & -4 & 0 & -6 & 2 & -4 \\ 2 & 9 & 5 & 6 & 3 & 14 \\ -2 & -6 & -2 & -6 & 0 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & 0 & -6 & 2 & -4 \\ 2 & 9 & 5 & 6 & 3 & 14 \\ -2 & -6 & -2 & -6 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 9 & 5 & 6 & 3 & 14 \\ -2 & -6 & -2 & -6 & 0 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & -6 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+6(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & -3 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 125. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 5 \\ -2 & 7 \\ 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -5 & -6 & -4 & 1 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 7 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ -5 & -6 & -4 & 1 & -7 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 7 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-5(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ -1 & 5 & -1 & 7 & -2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}}\left[\begin{array}{rrrr|rr} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 10 & -6 & 8 \\ -2 & -1 & -3 & 6 & -7 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}}\left[\begin{array}{rrrr|rr} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 10 & -6 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{4}{11}(2)}}\left[\begin{array}{rrrr|rr} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{35}{11} & -\frac{105}{11} & \frac{105}{11} & -\frac{70}{11} \\ 0 & 4 & -2 & 10 & -6 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 3 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{4}{11}(2)}}\left[\begin{array}{rrrr|rr} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{35}{11} & -\frac{105}{11} & \frac{105}{11} & -\frac{70}{11} \\ 0 & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{3}{11}(2)}}\left[\begin{array}{rrrr|rr} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{35}{11} & -\frac{105}{11} & \frac{105}{11} & -\frac{70}{11} \\ 0 & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & \frac{21}{11} & -\frac{21}{11} & \frac{14}{11} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{35}(3)}}\left[\begin{array}{rrrr|rr} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{35}{11} & -\frac{105}{11} & \frac{105}{11} & -\frac{70}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{11} & \frac{21}{11} & -\frac{21}{11} & \frac{14}{11} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{1}{5}(3)}}\left[\begin{array}{rrrr|rr} -1 & 1 & -2 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -11 & 6 & -29 & 18 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{35}{11} & -\frac{105}{11} & \frac{105}{11} & -\frac{70}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 126. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B' = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ 4 & -4 \\ -6 & 9 \\ -10 & 11 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -4 & 7 & 6 & -11 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -6 & -6 & 9 \\ -2 & 3 & -8 & -10 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}}\left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -4 & 7 & 6 & -11 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & -15 \\ 0 & 3 & -6 & -6 & 9 \\ -2 & 3 & -8 & -10 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}}\left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -4 & 7 & 6 & -11 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & -15 \\ 0 & 3 & -6 & -6 & 9 \\ 0 & 11 & -22 & -22 & 33 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}}\left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -4 & 7 & 6 & -11 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & -15 \\ 0 & 3 & -6 & -6 & 9 \\ 0 & 11 & -22 & -22 & 33 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{3}{5}(2)}}\left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -4 & 7 & 6 & -11 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -22 & -22 & 33 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{11}{5}(2)}}\left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -4 & 7 & 6 & -11 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{3}{5}(2)}}\left[\begin{array}{rrr|rr} -1 & -4 & 7 & 6 & -11 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 127. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 128. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 4 & 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&2&1&0&4&4\\ 0&0&2&0&0&3\\ 0&3&0&2&2&2\\ 4&0&1&4&4&2\\ 0&2&4&4&3&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&2&1&0&4&4\\ 0&0&2&0&0&3\\ 0&3&0&2&2&2\\ 0&2&2&4&3&1\\ 0&2&4&4&3&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&2&1&0&4&4\\ 0&3&0&2&2&2\\ 0&0&2&0&0&3\\ 0&2&2&4&3&1\\ 0&2&4&4&3&4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&2&1&0&4&4\\ 0&3&0&2&2&2\\ 0&0&2&0&0&3\\ 0&0&2&1&0&3\\ 0&2&4&4&3&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&2&1&0&4&4\\ 0&3&0&2&2&2\\ 0&0&2&0&0&3\\ 0&0&2&1&0&3\\ 0&0&4&1&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&2&1&0&4&4\\ 0&3&0&2&2&2\\ 0&0&2&0&0&3\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&4&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&2&1&0&4&4\\ 0&3&0&2&2&2\\ 0&0&2&0&0&3\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&2&1&0&4&4\\ 0&3&0&2&2&2\\ 0&0&2&0&0&3\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 129. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1&0&0&2\\ 3&1&0&4\\ 4&2&0&4\\ 4&3&0&2\\ 1&0&0&2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4&3\\ 4&1\\ 0&1\\ 2&3\\ 4&3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&2&4&3\\ 3&1&0&4&4&1\\ 4&2&0&4&0&1\\ 4&3&0&2&2&3\\ 1&0&0&2&4&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&2&4&3\\ 0&1&0&3&2&2\\ 4&2&0&4&0&1\\ 4&3&0&2&2&3\\ 1&0&0&2&4&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&2&4&3\\ 0&1&0&3&2&2\\ 0&2&0&1&4&4\\ 4&3&0&2&2&3\\ 1&0&0&2&4&3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&2&4&3\\ 0&1&0&3&2&2\\ 0&2&0&1&4&4\\ 0&3&0&4&1&1\\ 1&0&0&2&4&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&2&4&3\\ 0&1&0&3&2&2\\ 0&2&0&1&4&4\\ 0&3&0&4&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&2&4&3\\ 0&1&0&3&2&2\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&3&0&4&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1&0&0&2&4&3\\ 0&1&0&3&2&2\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 130. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ♢

Ejercicio 131. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ♢

Ejercicio 132. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ♢

Ejercicio 133. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 134. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 135. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ◊

Ejercicio 136. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 137. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ◊

Ejercicio 138. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 139. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 140. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 141. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 3&1&3&1&2&2&4\\ 1&0&4&1&4&2&0\\ 1&1&4&2&2&1&1\\ 4&1&2&2&1&1&4\\ 4&2&2&3&3&4&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 3&1&3&1&2&2&4\\ 1&1&4&2&2&1&1\\ 4&1&2&2&1&1&4\\ 4&2&2&3&3&4&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 1&1&4&2&2&1&1\\ 4&1&2&2&1&1&4\\ 4&2&2&3&3&4&4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 0&1&0&1&3&4&1\\ 4&1&2&2&1&1&4\\ 4&2&2&3&3&4&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 0&1&0&1&3&4&1\\ 0&1&1&3&0&3&4\\ 4&2&2&3&3&4&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 0&1&0&1&3&4&1\\ 0&1&1&3&0&3&4\\ 0&2&1&4&2&1&4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 0&0&4&3&3&3&2\\ 0&1&1&3&0&3&4\\ 0&2&1&4&2&1&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 0&0&4&3&3&3&2\\ 0&0&0&0&0&2&0\\ 0&2&1&4&2&1&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 0&0&4&3&3&3&2\\ 0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&4&3&2&4&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 0&0&4&3&3&3&2\\ 0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&4&1&4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&4&1&4&2&0\\ 0&1&1&3&0&1&4\\ 0&0&4&3&3&3&2\\ 0&0&0&0&4&1&4\\ 0&0&0&0&0&2&0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 142. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1&3&3\\ 0&1&0\\ 3&1&4\\ 3&0&4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4&2\\ 1&0\\ 4&1\\ 3&1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1&3&3&4&2\\ 0&1&0&1&0\\ 3&1&4&4&1\\ 3&0&4&3&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1&3&3&4&2\\ 0&1&0&1&0\\ 0&2&0&2&0\\ 3&0&4&3&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1&3&3&4&2\\ 0&1&0&1&0\\ 0&2&0&2&0\\ 0&1&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1&3&3&4&2\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1&3&3&4&2\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ◊

Ejercicio 143. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 144. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 145. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 146. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad B' = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 147. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ◊

Ejercicio 148. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ◊

Ejercicio 149. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. ◊

Ejercicio 150. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. ♢

Ejercicio 151. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 152. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 153. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 154. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 155. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

A la vista de esta reducción, como ninguna columna de la parte de B' es pivote, concluimos que todos los vectores de B' están en V y por lo tanto $U \leq V$. $\Diamond$

Ejercicio 156. *Sea $V = C(B)$ y $U = C(B')$. Determina si el espacio U es un subespacio de V, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a reducir la matriz $[B|B']$ para ver si alguna de las columnas de B' es pivote:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A la vista de esta reducción, la parte de B' tiene columnas pivote, por lo que hay vectores de U que no están en V y por lo tanto $U \leq V$ es falso. $\Diamond$

Ejercicio 157. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & -5 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -11 & 8 & -6 & -2 & -13 \\ 12 & -9 & 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -11 & 8 & -6 & -2 & -13 \\ 12 & -9 & 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\diamondsuit$

Ejercicio 158. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 159. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & -9 & -9 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 12 & 12 & 4 \\ -10 & -5 & 15 & 15 & 5 \\ 4 & 2 & -6 & -6 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & -2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 12 & 12 & 4 \\ -10 & -5 & 15 & 15 & 5 \\ 4 & 2 & -6 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ◊

Ejercicio 160. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 & -3 & -1 \\ -5 & 7 & -8 & -9 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 & -3 & -1 \\ -5 & 7 & -8 & -9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 & -7 \\ -19 & -1 & 12 & -21 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 161. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & 6 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ -7 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ♢

Ejercicio 162. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -9 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 3 & -9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 15 & -5 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ♢

Ejercicio 163. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -7 & 0 & 7 & 7 \\ -3 & -1 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 5 & -2 & 4 \\ -5 & 9 & -9 & -4 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{6}{7}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{3}{7} & 5 \\ 0 & 4 \\ \frac{6}{7} & 4 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \left[\begin{array}{rrrrr} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 5 & -2 & 4 \\ -5 & 9 & -9 & -4 & -8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{3}{7} & 5 \\ 0 & 4 \\ \frac{6}{7} & 4 \\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr} \frac{15}{7} & 15 \\ -\frac{22}{7} & -24 \\ -\frac{32}{7} & -15 \end{array}\right]$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\lozenge$

Ejercicio 164. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 & -10 & -4 \\ 7 & 1 & -4 & 11 & 4 \\ -4 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 & -10 & -4 \\ 7 & 1 & -4 & 11 & 4 \\ -4 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 165. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+6(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} -1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 166. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -4 \\ -2 & -8 & 2 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 167. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & -5 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & 2 & -9 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 8 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & 2 & -9 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -8 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 168. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 \\ -6 & -8 & -3 & 7 \\ -6 & -8 & -3 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & -6 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -2 \\ -17 & -10 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ♢

Ejercicio 169. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -5 & -9 & 0 & 2 \\ -4 & -8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -7 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ♢

Ejercicio 170. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -7 & -2 \\ -3 & 7 & -2 & -9 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 7 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ -4 & 10 & -3 & -14 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 9 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & -9 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & -9 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 6 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+5(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 11 & -14 & 5 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 21 \\ 11 \\ -14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & -2 & -3 \\ -4 & 10 & -3 & -14 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 11 \\ -14 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 171. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 13 & -12 & -4 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 172. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -7 & 0 & -1 & 5 \\ -3 & -3 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 5 & -7 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -7 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-\frac{4}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{4}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{6}{7}(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{6}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{6}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 1 \\ 5 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 5 & -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 1 \\ 5 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 7 \\ 51 & -13 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 173. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & -4 & -2 & 2 \\ -6 & 6 & 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -8 & -2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -5 & 8 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+5(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -13 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{7}{13}(2)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{3}{13}(2)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{46}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{3}{13}(2)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{46}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{20}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+46(3)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -14 & 46 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{20}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-20(3)}}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 24 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{4}{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -14 & 46 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 6 & -20 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 25 & -11 \\ -14 & 6 \\ 46 & -20 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -8 & -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & -11 \\ -14 & 6 \\ 46 & -20 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 44 \\ -228 & 107 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 174. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -5 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & -8 & -8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -7 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -2 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -2 & -6 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ -6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \le U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \le N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -7 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ -6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -36 \\ -81 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 175. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \le U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \le N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \le U$. $\Diamond$

Ejercicio 176. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 & 2 & -7 \\ -7 & 0 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 4 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 12 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 12 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -9 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 12 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -9 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 12 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -9 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -13 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 12 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -13 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 12 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -13 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrr} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 12 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 4 & -10 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 12 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -7 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 & 2 & -7 \\ -7 & 0 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ◊

Ejercicio 177. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 178. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 179. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 180. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3&4&4&1&0&0&0&0\\ 4&4&4&0&1&0&0&0\\ 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&2&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 4&4&4&0&1&0&0&0\\ 3&4&4&1&0&0&0&0\\ 1&1&2&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&4&0&1&1&0&0\\ 3&4&4&1&0&0&0&0\\ 1&1&2&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&4&0&1&1&0&0\\ 0&0&4&1&0&2&0&0\\ 1&1&2&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&4&0&1&1&0&0\\ 0&0&4&1&0&2&0&0\\ 0&3&2&0&0&4&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&4&1&0&2&0&0\\ 0&3&2&0&0&4&1&0\\ 0&2&4&0&1&1&0&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&4&1&0&2&0&0\\ 0&0&4&0&0&4&1&2\\ 0&2&4&0&1&1&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&4&1&0&2&0&0\\ 0&0&4&0&0&4&1&2\\ 0&0&2&0&1&1&0&3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&4&1&0&2&0&0\\ 0&0&0&4&0&2&1&2\\ 0&0&2&0&1&1&0&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&3&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&4&1&0&2&0&0\\ 0&0&0&4&0&2&1&2\\ 0&0&0&2&1&0&0&3 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 4&2\\ 0&1\\ 2&0\\ 1&0\\ 2&3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2&1&2&3&0\\ 3&0&3&1&3\\ 0&1&1&2&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4&2\\ 0&1\\ 2&0\\ 1&0\\ 2&3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0\\ 0&0\\ 0&0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ◊

Ejercicio 181. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1&1&1&2&2\\ 4&0&3&1&4\\ 2&2&3&0&0\\ 1&1&3&0&4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2&2&3&2&3\\ 1&4&4&0&3\\ 2&4&4&4&3\\ 2&1&0&2&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&2&1&0&1&0&0&0\\ 1&3&3&3&0&0&1&0&0\\ 2&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 2&4&0&4&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 1&3&3&3&0&0&1&0&0\\ 2&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 2&4&0&4&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&4&1&2&4&0&1&0&0\\ 2&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 2&4&0&4&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&4&1&2&4&0&1&0&0\\ 0&3&1&3&3&0&0&1&0\\ 2&4&0&4&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&4&1&2&4&0&1&0&0\\ 0&3&1&3&3&0&0&1&0\\ 0&1&1&2&3&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&3&1&1&0&0\\ 0&3&1&3&3&0&0&1&0\\ 0&1&1&2&3&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&3&1&1&0&0\\ 0&0&1&3&1&2&0&1&0\\ 0&1&1&2&3&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&3&1&1&0&0\\ 0&0&1&3&1&2&0&1&0\\ 0&0&1&2&4&4&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&3&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&3&1&4&1&0\\ 0&0&1&2&4&4&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&4&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&3&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&3&1&4&1&0\\ 0&0&0&0&1&3&4&0&1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1\\3\\4\\0\\1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2&2&3&2&3\\ 1&4&4&0&3\\ 2&4&4&4&3\\ 2&1&0&2&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\3\\4\\0\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\\2\\3\\0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 182. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 4&3&1&0&1\\ 2&0&3&2&3\\ 1&4&1&3&2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0&2&3&0&2\\ 2&4&4&2&2\\ 4&4&0&0&2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ◊

Ejercicio 183. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ◊

Ejercicio 184. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 185. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 186. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 187. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 188. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 189. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 190. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 191. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ♢

Ejercicio 192. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 193. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 194. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 195. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 2 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. ◊

Ejercicio 196. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 197. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\diamond$

Ejercicio 198. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ♢

Ejercicio 199. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&2&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 2&2&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 0&0&1&2\\ 0&1&2&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2&2&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&2&1\\ 1&2&2 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 200. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1\\ 2&0&1&2&2\\ 1&1&1&1&2\\ 1&2&0&1&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0&0&2&2&2\\ 1&0&1&0&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&2&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&2&2&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&2&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&2&2&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&2&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&1&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&2&2&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&2&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&2&1&0&0\\ 0&2&1&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&2&2&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&2&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&2&1&0&0\\ 0&0&1&2&2&1&0&1&0\\ 0&0&1&2&2&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&2&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&2&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&2&2&1&0\\ 0&0&1&2&2&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 201. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 202. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. ◊

Ejercicio 203. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 204. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&2&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&2&0&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&2&0&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0&0\\ 0&0&2&0&2&1&0&0&0\\ 0&2&0&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0&0\\ 0&0&2&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&2&2&0&0&0&1&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&2&2&1&1&0&0\\ 0&0&2&2&0&0&0&1&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&2&2&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&2&2&1&1&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&2&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&2&1&2&1&1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 2\\1\\2\\1\\1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 1}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2&0&2&2&2\\ 1&2&0&0&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\\1\\2\\1\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$

Ejercicio 205. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 1&2&1&1\\ 1&2&1&1\\ 1&2&1&1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1&2&1&0\\ 0&1&1&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&1&1&1&0&0&0\\ 2&2&2&0&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&2&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 3}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado no es 0, concluimos que V no está contenido en U. $\Diamond$

Ejercicio 206. *Sea $V = N(H)$ y $U = N(H')$. Determina si el espacio V es un subespacio de U, siendo*

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = C(B)$, siendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

Para determinar si $V \leq U$, o lo que es lo mismo, si $C(B) \leq N(H')$ tenemos que multiplicar

$$H'B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el resultado es 0, concluimos que $V \leq U$. $\Diamond$