Vídeo : `https://youtu.be/E1J0qTECcL8`

1. Resumen

Definición 1. *Sean U y V dos subespacios vectoriales contenidos en K^m.*

1. *Llamaremos* **interesección de** U **y** V*, y la denotaremos $U \cap V$ al subespacio*

$$U \cap V = \{w \in K^m | w \in U \text{ y } w \in V\}.$$

2. *Llamaremos* **suma de** U **y** V*, y la denotaremos $U + V$ al subespacio*

$$U + V = \{w \in K^m | w = u + v \text{ para algún } u \in U \text{ y } v \in V\}.$$

3. *Si la intersección de los espacios U y V es $\{0\}$, diremos que la suma $U + V$ es una* **suma directa** *y la denotaremos $U \oplus V$.*

4. *Si la intersección de los espacios U y V es $\{0\}$ y su suma es todo K^m, diremos que son* **espacios complementarios***.*

Proposición 2. *Sean U y V dos subespacios de K^m con intersección $\{0\}$. Entonces para todo $w \in U \oplus V$, la descomposición $w = u + v$ con $u \in U$ y $v \in V$ es única.*

Demostración. Supongamos que w se puede poner de dos formas diferentes, $w = u + v = u' + v'$, entonces el la igualdad $u + v = u' + v'$ podemos pasar los elementos de U a un lado y los de V a otro y deducir que $u - u' = v' - v \in U \cap V = \{0\}$ y por lo tanto $u = u'$ y $v = v'$. □

Para calcular la suma y la intersección de espacios vectoriales, la forma más sencilla es cuando nos los dan en paramétricas para la suma y en implícitas para la intersección.

Proposición 3. *Sean $B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $B' \in \mathbf{M}_{m\times p}(K)$ tales que $U = C(B')$ y $V = C(B)$. Entonces $U + V = C([B|B'])$.*

Demostración. Si tenemos dos espacios dados en términos de generadores, las sumas de combinaciones de ellos serán combinaciones linales de la unión de los generadores, que son las columnas de la matriz $[B|B']$. □

Proposición 4. *Sean $H \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$ y $H' \in \mathbf{M}_{p\times n}(K)$ tales que $U = N(H')$ y $V = N(H)$. Entonces $U \cap V = N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$.*

Demostración. Los vectores de U son los vectores de K^n que cumplen las restricciones impuestas por las ecuaciones de H' y los de V son los que cumplen las restricciones de H. Para calcular los elementos que están en los dos al mismo tiempo (la intersección) tendremos que buscar los vectores de K^n que cumplen todas las restricciones al mismo tiempo y para juntas las ecuaciones de H y las de H' tenemos que ponerlos uno encima del otro, $U \cap V = N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$. □

Usando estas dos proposiciones y los cambios de paramétricas a implícitas y viceversa, podemos calcular cualquier suma e intersección de espacios que nos pidan, pasando por un posible cambio en su representación si es necesario.

Teorema 5 (Fórmula de Grassmann)**.** *Sean U y V subespacios de K^m. Entonces*

$$\mathsf{dim}(U) + \mathsf{dim}(V) = \mathsf{dim}(U \cap V) + \mathsf{dim}(U + V).$$

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Ejercicio 6. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & 9 \\ -3 & 2 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & -4 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} -2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-5(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 6 & -11 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ -1 & -11 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & -4 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 9 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & -9 & -1 & -11 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 7. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -2 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{r|rr} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 8. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & -5 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 2 & -8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -12 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -12 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -12 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 12 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -12 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 12 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 12 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 12 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-7(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 & 13 & 16 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 & 13 & 16 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 4 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-4(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 & 13 & 16 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 4 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 7 & 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{5}{16}(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 & 13 & 16 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 7 & 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-\frac{9}{16}(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 1 & 13 & 16 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{16} & -\frac{5}{16} & -2 & -\frac{1}{16} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} -\frac{5}{16} & -\frac{9}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{5}{16} \\ 0 & -2 \\ \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U+V = C\left(\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3 & 0 & -\frac{5}{16} & -\frac{9}{16} \\ 3 & 1 & -9 & -\frac{1}{16} & -\frac{5}{16} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ 2 & -4 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 9. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U+V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-5(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U+V = C\left(\left[\begin{array}{r|rr} 0 & 3 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 10. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U+V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \left[\begin{array}{rr} -1 & -3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{r|rr} -9 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 11. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{r} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \left[\begin{array}{rrrr} 6 & 5 & 2 & -4 \\ 7 & 6 & 6 & -8 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{5}{6}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{2}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-22(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -22 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+20(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -22 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 20 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 18 & -16 \\ -22 & 20 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 7 & 18 & -16 \\ 4 & -22 & 20 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 12. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 8 \\ -2 & -2 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & -1 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & -6 & -7 & -8 & -7 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-5(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -31 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -31 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-5(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -31 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & -32 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-4(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -31 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & -32 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -29 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -31 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & -32 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -29 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 17 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & -32 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -29 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 17 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & -32 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -29 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 17 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 16 & -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -29 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-4(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 17 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 16 & -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 19 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 17 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 16 & -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 19 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(3)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 16 & -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 19 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-3(3)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 19 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-4(3)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(4)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -4 & -1 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-3(4)}}\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -12 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & -4 & -1 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & -3 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 16 & 11 \\ -4 & -3 \\ -1 & 0 \\ 13 & 8 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -3 & 16 & 11 \\ -1 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 13 & 8 \\ 0 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -9 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 13. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \\ -2 & 8 \\ -4 & 7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & -2 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{8}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{7}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{7}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{12}{7}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{29}{7} & -\frac{12}{7} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{29}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{12}{7} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{rr|rr} -3 & 4 & -\frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ 1 & -2 & -\frac{6}{7} & -\frac{29}{7} \\ -2 & 8 & -\frac{2}{7} & -\frac{12}{7} \\ -4 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 14. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -9 \\ 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & -6 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -10 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -10 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 11 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -10 & 11 \\ 5 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & -4 & 3 \\ -2 & -9 & -10 & 11 \\ 1 & 6 & 5 & -5 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

◊

Ejercicio 15. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{r|rr} -4 & 10 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 16. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ -2 & 9 \\ -1 & 7 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & -9 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -20 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -20 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & -33 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -20 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & -33 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & -26 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{6}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & -10 & -33 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & -26 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{10}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{7} & 1 & \frac{10}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & -8 & -26 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{8}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{7} & 1 & \frac{10}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 & \frac{8}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{29}{16}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{29}{16} & -\frac{17}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & 0 & \frac{8}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{13}{8}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -3 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 26 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} & 0 & \frac{6}{7} & 1 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{29}{16} & -\frac{17}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{8} & -\frac{9}{8} & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{29}{16} & -\frac{13}{8} \\ -\frac{17}{16} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -2 & 9 & -\frac{29}{16} & -\frac{13}{8} \\ -1 & 7 & -\frac{17}{16} & -\frac{9}{8} \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 17. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ -5 & 3 & 7 & -7 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 7 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{rr|rr} 3 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -1 & -2 \\ -1 & -6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\diamond$

Ejercicio 18. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -7 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -8 & -4 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & 7 & -5 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-5(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{5}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -5 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{13}{5}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{5} & 0 & \frac{13}{5} & \frac{21}{5} & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & \frac{27}{5} \\ 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{21}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -6 & \frac{12}{5} & \frac{27}{5} \\ 2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ 2 & -3 & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 19. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -9 \\ 1 & 9 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+5(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-6(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 17 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+17(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 17 & 0 & -29 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 17 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 17 & -6 \\ 0 & 1 \\ -29 & 10 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{rr|rr} -1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -9 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 17 & -6 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -29 & 10 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 20. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -1 & -1 & -3 \\ 7 & 6 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -3 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \left[\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 21. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \left[\begin{array}{rrrrrr} 4 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & -1 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & -9 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 4 & -3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & -21 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & -21 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -5 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-4(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & -21 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & -21 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -15 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+5(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 & -3 & 10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{4}{3}(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 1 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 & -3 & 10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+\frac{8}{3}(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 1 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{8}{3} & 0 & -3 & -\frac{34}{3} & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \\ -\frac{10}{3} & -\frac{34}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 1 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 8 & -\frac{10}{3} & -\frac{34}{3} \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 22. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 9 \\ 0 & -2 \\ 1 & 6 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -9 & -8 & 2 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} -2 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{4}{5}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{3}{5}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{41}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{41}{5}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & 5 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{33}{5} & \frac{41}{5} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{33}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{41}{5} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 8 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 2 & 9 & \frac{4}{5} & -\frac{33}{5} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{5} & \frac{41}{5} \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 23. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & -4 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & 0 & -7 & -7 & -7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrr} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -8 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -8 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -8 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+5(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 14 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 14 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 16 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 16 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 & -6 & -9 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} -10 & -20 \\ -3 & -6 \\ -3 & -9 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & -6 & -10 & -20 \\ -1 & 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -9 \\ -1 & 0 & -7 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 24. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \\ 4 & 6 \\ -2 & -4 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ -3 & -5 & 1 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 9 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 9 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 9 & 1 \\ -5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & -14 & 0 \\ -1 & -1 & 9 & 1 \\ 4 & 6 & -5 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ -5 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 25. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 1 & -8 \\ -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & -5 & -8 & 7 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -24 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 23 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 11 & 23 \\ -2 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R})$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 3 & 4 & 10 \\ 1 & -4 & 11 & 23 \\ 1 & -8 & -2 & -5 \\ -2 & 9 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 26. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrr} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrr} 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 27. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 28. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 29. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U+V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 30. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 31. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,6)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]\right)$$

◊

Ejercicio 32. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 33. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 34. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 4 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 35. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

◊

Ejercicio 36. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 37. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 38. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 39. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

◊

Ejercicio 40. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 41. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 42. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 43. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 3&0&1&1&0&0&0&0\\ 3&3&1&0&1&0&0&0\\ 3&4&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&3&0&0&0&1&0\\ 1&4&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 3&3&1&0&1&0&0&0\\ 3&4&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&3&0&0&0&1&0\\ 3&0&1&1&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 3&4&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&3&0&0&0&1&0\\ 3&0&1&1&0&0&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 0&2&2&0&0&1&0&2\\ 0&2&3&0&0&0&1&0\\ 3&0&1&1&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 0&2&2&0&0&1&0&2\\ 0&2&3&0&0&0&1&0\\ 0&3&3&1&0&0&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 0&0&1&0&3&1&0&3\\ 0&2&3&0&0&0&1&0\\ 0&3&3&1&0&0&0&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 0&0&1&0&3&1&0&3\\ 0&0&2&0&3&0&1&1\\ 0&3&3&1&0&0&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 0&0&1&0&3&1&0&3\\ 0&0&2&0&3&0&1&1\\ 0&0&4&1&2&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 0&0&1&0&3&1&0&3\\ 0&0&0&0&2&3&1&0\\ 0&0&4&1&2&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 0&0&1&0&3&1&0&3\\ 0&0&0&0&2&3&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&4&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&3&0&1&0&0&2\\ 0&0&1&0&3&1&0&3\\ 0&0&0&1&0&1&0&4\\ 0&0&0&0&2&3&1&0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1&0\\ 0&2\\ 1&3\\ 0&1\\ 4&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 2&2&1&0\\ 1&4&0&2\\ 0&2&1&3\\ 2&2&0&1\\ 2&2&4&0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 44. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 45. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 46. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 47. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 2&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 2&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&2&1&0&0&0&1&0\\ 2&2&1&1&0&0&0&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&1&0&1\\ 0&2&1&0&0&0&1&0\\ 2&2&1&1&0&0&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0&1&0&1\\ 0&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&2&2&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&1&0&1\\ 0&2&1&0&0&0&1&0\\ 0&2&2&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&1&0&1\\ 0&0&2&0&1&0&1&0\\ 0&2&2&1&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&1&0&1\\ 0&0&2&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&2&1&2\\ 0&0&0&1&1&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&2&1&2 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1&0\\ 1&0\\ 0&2\\ 0&1\\ 1&2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U+V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 0&2&1&0\\ 2&0&1&0\\ 2&0&0&2\\ 2&1&0&1\\ 2&1&1&2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 48. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U+V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1&1\\ 1&1\\ 0&1\\ 2&2\\ 2&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&0\\ 1&1&1&0&0\\ 2&2&2&0&2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&2&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0\\ 1&1&2&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&2&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&2&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&1&0&0\\ 0&2&1&2&0&0&1&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&2&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&1&0&0\\ 0&0&0&2&1&0&1&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1&1&2&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&2&1&0&1&0\\ 0&0&0&2&0&1&0&0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 2&2\\ 1&0\\ 0&1\\ 1&0\\ 0&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 1&1&2&2\\ 1&1&1&0\\ 0&1&0&1\\ 2&2&1&0\\ 2&0&0&0 \end{array}\right]\right)$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 49. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1&0&1\\ 2&1&0\\ 1&2&1\\ 1&1&2\\ 2&1&1\\ 0&0&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0&2&1&1&1&0\\ 0&1&2&0&0&2\\ 2&0&1&0&1&1\\ 0&2&0&0&0&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 0&0&2&0&1&0&0&0&0&0\\ 2&1&0&2&0&1&0&0&0&0\\ 1&2&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&2&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&2&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 2&1&0&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&2&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U+V=C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&1&0\\2&1&0&0&0\\1&2&1&0&2\\1&1&2&2&1\\2&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 50. *Sea $V=C(B)$ y $U=N(H')$. Determina el espacio $U+V$ en paramétricas, siendo*

$$B=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\\1&0\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\in\mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)\qquad H'=\begin{bmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&1&0&1\\1&2&1&1&0\end{bmatrix}\in\mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0&0\\2&0&1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0&0&0\\0&1&0&2&0&1&0&0\\2&0&1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0&0&0\\0&1&0&2&0&1&0&0\\0&0&2&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0&0&0\\0&0&1&2&2&1&0&0\\0&0&2&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0&0&0\\0&0&1&2&2&1&0&0\\0&0&2&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0&0&0\\0&0&1&2&2&1&0&0\\0&0&0&0&2&1&1&0\\0&0&1&0&2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0&0&0\\0&0&1&2&2&1&0&0\\0&0&0&0&2&1&1&0\\0&0&0&1&0&2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4,5)}}\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&2&0&1&0&0&0\\0&0&1&2&2&1&0&0\\0&0&0&1&0&2&0&1\\0&0&0&0&2&1&1&0\end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $U=C(B')$, siendo

$$B'=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\\2&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\in\mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U+V=C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 51. *Sea $V=C(B)$ y $U=N(H')$. Determina el espacio $U+V$ en paramétricas, siendo*

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3) \qquad H'=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U=C(B')$, siendo

$$B'=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U+V=C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 52. *Sea $V=C(B)$ y $U=N(H')$. Determina el espacio $U+V$ en paramétricas, siendo*

$$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_3) \qquad H'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U=C(B')$, siendo

$$B'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U+V=C\left(\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 53. *Sea $V=C(B)$ y $U=N(H')$. Determina el espacio $U+V$ en paramétricas, siendo*

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad H'=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 0&2&0&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&1&2&0&0&0&0&1&0\\ 2&1&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&2&0&2&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&2&0&0&0&0&1&0\\ 2&1&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&2&0&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&2&1&0\\ 2&1&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&2&0&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&2&1&0\\ 0&2&1&2&0&0&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&2&0&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&2&1&0\\ 0&2&1&2&0&0&0&1&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&2&1&0\\ 0&2&1&2&0&0&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&2&1&0\\ 0&0&2&2&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&2&2&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&2&1&0\\ 0&0&2&2&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&2&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&2&1&0\\ 0&0&2&2&0&1&0&1&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&2&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&2&1&0\\ 0&0&0&2&0&0&1&1&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&2&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&2&2&1&0\\ 0&0&0&0&2&1&2&1&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5,6)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1&1&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&1&2&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&2&1&2&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&2&2&1&0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 2&0\\ 1&1\\ 2&2\\ 1&2\\ 0&1\\ 1&0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 54. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 55. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U + V$ en paramétricas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar U a paramétricas, para ellos vamos a reducir la matriz $[H'^T|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $U = C(B')$, siendo

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3)$$

El conjunto generador de la suma será el formado por las columnas de $[B|B']$, es decir,

$$U + V = C\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 56. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 9 \\ 0 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -4 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -9 & 8 & 5 & 2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-7(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 9 & 4 & -4 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -9 & 8 & 5 & 2 & 9 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 57. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 9 & 2 & 0 & -2 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{2}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-\frac{3}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{4}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{3}{5}(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{3}{17}(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{17} & \frac{3}{17} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{34}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{17} & \frac{3}{17} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{8}{17}(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{17} & \frac{3}{17} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{17} & -\frac{8}{17} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{17} & \frac{3}{17} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{17} & -\frac{8}{17} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{9}{17} & \frac{3}{17} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{17} & -\frac{8}{17} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} -\frac{9}{17} & \frac{3}{17} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{17} & -\frac{8}{17} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 9 & 2 & 0 & -2 & 9 \end{array}\right]\right)$$

$\lozenge$

Ejercicio 58. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-5(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -2 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 59. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & -7 & 7 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-8(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-3(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & -7 & 7 & -5 \end{array}\right]\right)$$

◊

Ejercicio 60. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 5 & 7 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 & 8 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 6 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & -2 & -8 & -3 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-5(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -9 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & -22 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -89 & -22 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -29 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -89 & -22 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -29 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} -89 & -22 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -29 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 1 & 8 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 6 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & -2 & -8 & -3 & -5 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 61. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 2 \\ -7 & 7 & 4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{r|rrrr} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{2}{7}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{2}{7}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{7}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrr} -\frac{2}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 \\ \hline 5 & -2 & 0 & 2 \\ -7 & 7 & 4 & -2 \end{array}\right]\right)$$

◊

Ejercicio 62. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & -9 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 8 & 5 & -9 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccccccc} -1 & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -10 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 13 & -10 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 13 & -10 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -6 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 8 & 5 & -9 & -2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 63. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ 2 & 9 \\ -2 & -8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -4 & 4 \\ 8 & -3 & -1 & -7 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-19(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 34 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 34 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+6(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 34 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 34 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 34 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 6 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -4 & 4 \\ 8 & -3 & -1 & -7 & 9 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 64. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & -8 & -4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-5(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+5(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & -8 & -4 & -1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 65. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 6 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-8(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+6(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+8(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-8(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 3 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrrrr} -6 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 6 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 4 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 66. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -5 & -5 \\ -6 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrr} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 6 & -3 & -5 & -5 \\ -6 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 67. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -8 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 6 & 5 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -5 & -4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 3 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -8 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 6 & 5 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -5 & -4 & 2 & -3 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 68. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -2 & -2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -8 & -9 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 69. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & 1 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{3}{8}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{4}(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrr} -\frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & 1 & -8 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 70. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 9 & 8 & -3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-5(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 13 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 13 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 9 & 8 & -3 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 71. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \\ -2 & 7 \\ 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 9 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+7(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 9 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 72. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \\ -1 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 8 \\ -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ -8 & -5 & 3 & -3 & 3 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 2 & -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{4}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{7} & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{2}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{7} & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+\frac{6}{7}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{29}{7} & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{30}{7} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{29}{28}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{28} & -\frac{13}{28} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{30}{7} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{6}{7}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{28} & -\frac{13}{28} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{30}{7} & 0 & \frac{6}{7} & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-\frac{15}{14}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} -1 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{28} & -\frac{13}{28} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{14} & \frac{27}{14} & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} \frac{29}{28} & -\frac{13}{28} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{15}{14} & \frac{27}{14} & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrrrr} \frac{29}{28} & -\frac{13}{28} & \frac{1}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{15}{14} & \frac{27}{14} & \frac{5}{7} & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ -8 & -5 & 3 & -3 & 3 & -8 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 73. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -9 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & -1 & 8 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -8 & 4 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5,6)}} \left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrrrr} -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & -1 & 8 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -8 & 4 & -9 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 74. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -1 & 2 \\ -4 & 7 \\ 3 & -8 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 4 & 3 & -6 \\ -3 & 2 & 0 & -7 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} -8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-8(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-4(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-3(1)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 1 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-14(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 48 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 48 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-5(2)}} \left[\begin{array}{rr|rrrrr} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 48 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 48 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 48 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -2 & 3 & 2 & -4 \\ 6 & -3 & 4 & 3 & -6 \\ -3 & 2 & 0 & -7 & 9 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 75. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & -1 \\ -2 & -9 & -9 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{4}{5}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-\frac{4}{5}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{2}{5}(1)}} \left[\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{rrrr} -\frac{4}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 5 & -1 \\ -2 & -9 & -9 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 76. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 77. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,6)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,6)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 78. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 79. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 80. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 81. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 82. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 83. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 84. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 85. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 86. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 87. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 88. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 89. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&0&1&0&0&0&0\\0&3&2&1&0&0&0\\0&2&3&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&4&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(2,4)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&2&3&0&1&0&0\\0&3&2&1&0&0&0\\0&4&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&3&0&1&3&0\\0&3&2&1&0&0&0\\0&4&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&3&0&1&3&0\\0&0&2&1&0&2&0\\0&4&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&3&0&1&3&0\\0&0&2&1&0&2&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(3,5)}}\left[\begin{array}{cc|ccccc}1&0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&2&1&0&2&0\\0&0&3&0&1&3&0\end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\2&1&0&2&0\\3&0&1&3&0\end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times5}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&1&1\\2&1&0&2&0\\3&0&1&3&0\\\hline 1&2&0&0&3\\1&3&4&0&0\\4&4&0&1&0\end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 90. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix}3\\1\\4\\4\end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix}1&0&0&3\\2&1&4&1\end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc}3&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\4&0&0&1&0\\4&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(1,2)}}\left[\begin{array}{c|cccc}1&0&1&0&0\\3&1&0&0&0\\4&0&0&1&0\\4&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(2)+2(1)}}\left[\begin{array}{c|cccc}1&0&1&0&0\\0&1&2&0&0\\4&0&0&1&0\\4&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}}\left[\begin{array}{c|cccc}1&0&1&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&1&0\\4&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}}\left[\begin{array}{c|cccc}1&0&1&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times4}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 91. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \left[\begin{array}{cccc} 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \left[\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 92. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&1&0&0&0\\ 4&4&2&0&0&0&1&0&0\\ 2&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 3&0&4&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&1&0&0\\ 2&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 3&0&4&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&1&0&0\\ 0&3&0&2&0&0&0&1&0\\ 3&0&4&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&3&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&1&0&0\\ 0&3&0&2&0&0&0&1&0\\ 0&2&0&3&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&1&0&0\\ 0&3&0&2&0&0&0&1&0\\ 0&2&0&3&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&1&0&0\\ 0&0&4&2&2&0&0&1&0\\ 0&2&0&3&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&1&0&0\\ 0&0&4&2&2&0&0&1&0\\ 0&0&1&3&3&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&2&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&3&3&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 4&4&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&1&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&2&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&3&4&4&0&0&1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 4&0&0&1&0&0\\ 2&1&1&0&1&0\\ 3&4&4&0&0&1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 4&0&0&1&0&0\\ 2&1&1&0&1&0\\ 3&4&4&0&0&1\\ \hline 1&3&0&1&1&2\\ 2&1&3&1&0&1\\ 0&3&1&3&3&4\\ 3&1&2&0&3&1 \end{array}\right]\right)$$

◊

Ejercicio 93. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 94. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 95. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_5) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_5)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 96. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
Facultad Informática Universidad Murcia	**Álgebra y Matemática Discreta**	Previo: 30 min.
	Cálculo de Sumas e Intersecciones de Subespacios	Clase: 30 min.

Ejercicio 97. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5,6)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 98. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 99. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

.

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 100. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 2&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&0&0\\ 2&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0\\ 0&1&2&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&0&0\\ 0&0&1&2&0&1&0\\ 0&1&2&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&1&0&0\\ 0&0&1&2&0&1&0\\ 0&0&2&2&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&2&0&1&0\\ 0&0&2&0&1&0&0\\ 0&0&2&2&0&0&1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1&2&0&1&0\\ 2&0&1&0&0\\ 2&2&0&0&1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1&2&0&1&0\\ 2&0&1&0&0\\ 2&2&0&0&1\\ \hline 0&1&0&1&2\\ 1&0&0&0&2\\ 2&1&1&0&1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 101. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0&2&2\\ 1&0&0\\ 0&1&2\\ 2&0&2\\ 1&1&0\\ 2&1&1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1&2&0&1&1&2\\ 1&0&0&0&2&1\\ 1&0&1&2&1&0\\ 1&1&1&2&1&1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 0&2&2&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&1&0&0&0\\ 2&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 2&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&2&2&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&1&0&0&0\\ 2&0&2&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 2&1&1&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(6)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5,6)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 102. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{6\times 3}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,6)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(6)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,6)}} \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 6}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 103. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 104. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{2\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$

Ejercicio 105. *Sea $V = C(B)$ y $U = N(H')$. Determina el espacio $U \cap V$ en implícitas, siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{5\times 2}(\mathbb{Z}_3) \qquad H' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Solución: Para determinarlo, vamos a pasar V a implícitas, para ellos vamos a reducir la matriz $[B|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esto nos dice que $V = N(H)$, siendo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 5}(\mathbb{Z}_3)$$

Las ecuaciones implícitas de $U \cap V$ serán $N\left(\left[\frac{H}{H'}\right]\right)$, es decir,

$$U \cap V = N\left(\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\right)$$

$\Diamond$