1. Resumen

Vídeo : `https://youtu.be/U12NROXuCo0`

Nota 1. *A lo largo de este tema y en todos aquellos que tratemos el producto escalar o los conceptos asociados, trabajaremos exclusivamente sobre el cuerpo de los números reales.*

Definición 2. *Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos* **producto escalar** *de u y v y lo denotaremos $u \cdot v$ ó $\langle u, v\rangle$ al número real $u^\top v$.*

Es decir, si $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, entonces $u \cdot v = u^\top v = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

Proposición 3. *El producto escalar cumple las siguientes propiedades*

1. $(au + bv) \cdot w = a(u \cdot w) + b(v \cdot w)$ *para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $w \cdot (au + bv) = a(w \cdot u) + b(w \cdot v)$ *para todo* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$.
3. $u \cdot v = v \cdot u$ *para todo* $u, v \in \mathbb{R}^n$.
4. $u \cdot u \geq 0$ *para todo* $u \in \mathbb{R}^n$.
5. $u \cdot u = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son consecuencia de las propiedades del producto de matrices. Para ver la propiedad (3), únicamente tenemos que poner la definición y notar que el producto de números reales es conmutativo:

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n = v \cdot u.$$

La propiedad (4) es consecuencia de que el cuadrado de un número real siempre es positivo o 0, por lo tanto, $u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$. Para que ese valor sea 0, la única posibilidad es que u_i^2 sea 0 para todo i, porque si para alguno de los índices fuera positivo, la suma nunca podría ser 0 ya que los otros términos no podrían nunca restar valor a la suma total. □

Definición 4. *Vamos a definir el concepto de vectores y espacios ortogonales del siguiente modo:*

1. *Dados dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$, diremos que son* **vectores ortogonales** *y lo denotaremos $u \perp v$, si $u \cdot v = 0$.*
2. *Un vector $u \in \mathbb{R}^n$ diremos que es* **ortogonal a un espacio** *$V \leq \mathbb{R}^n$, y lo denotaremos $u \perp V$, si $u \cdot v = 0$ para todo $v \in V$.*
3. *Dos espacios $U, V \leq \mathbb{R}^n$ diremos que son* **espacios ortogonales** *y lo denotaremos $U \perp V$, si $u \cdot v = 0$ para todo $u \in U$ y $v \in V$.*

Proposición 5. *Sean $U = C(B)$ y $V = C(B')$ dos espacios vectoriales contenidos en $\mathbb{R}^n$ dados en términos de conjuntos generadores B y B'. Entonces U y V son espacios ortogonales si y solo si $B^\top B' = 0$.*

Demostración. Si $U \perp V$, entonces como las columnas de B son vectores de U y las de B' son vectores de V, tenemos que $u^\top v = u \cdot v = 0$ para toda columna u de B y toda columna v de B', eso prueba que $B^\top B' = 0$. Recíprocamente, supongamos que $B^\top B' = 0$, y tomemos vectores $u \in U = C(B)$ y $v \in V = C(B')$. El vector u lo podremos escribir como combinación lineal de las columnas de B, es decir, $u = Bx$ y el vector v como $B'y$ para ciertos vectores de parámetros x e y. Entonces $u \cdot v = (Bx)^\top B'y = x^\top B^\top B'y = 0$ porque $B^\top B' = 0$. □

Proposición 6. *Sean U y V dos espacios ortogonales, entonces $U \cap V = 0$.*

Demostración. Sea $u \in U \cap V$. Como $u \in U$ y $u \in V$, el vector u tiene que ser ortogonal a sí mismo, es decir, $u \cdot u = 0$, pero entonces $u = 0$ por la Proposición 3. □

Definición 7. *Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Llamaremos* **complemento ortogonal de** U *al conjunto*

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot v = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

Proposición 8. *El complemento ortogonal tiene las siguientes propiedades:*

1. $0^\perp = \mathbb{R}^n$.
2. $\mathbb{R}^{n\perp} = 0$.
3. $U \cap U^\perp = 0$.
4. *Si $U = C(B)$, entonces $U^\perp = N(B^\top)$.*
5. $\mathsf{dim}(U) + \mathsf{dim}(U^\perp) = n$.
6. $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$.
7. *Si $V = N(H)$, entonces $V^\perp = C(H^\top)$.*
8. $(U^\perp)^\perp = U$.
9. *$U \leq V$ si y solo si $V^\perp \leq U^\perp$.*
10. $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.
11. $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

Demostración.

1. Todos los vectores multiplicados por 0 dan 0 por lo que $0^\perp = \mathbb{R}^n$.
2. Sea $u \in (\mathbb{R}^n)^\perp$, entonces en particular $u \cdot u = 0$ y por lo tanto $u = 0$.
3. Esto es por la Proposición 6 ya que U y $U^\perp$ son espacios ortogonales.
4. Para que un vector v sea ortogonal a todos los vectores de U, basta con que lo sea a los vectores de un conjunto generador, o lo que es lo mismo $B^\top v = 0$, pero esa es precisamente la definición de que v esté en $N(B^\top)$.
5. Pongamos U en forma paramétrica, $U = C(B)$, entonces $\mathsf{dim}(U) = \mathsf{rango}(B)$, pero $\mathsf{dim}(U^\perp) = \mathsf{dim}(N(B^\top)) = n - \mathsf{rango}(B^\top) = n - \mathsf{rango}(B)$, por lo tanto, $\mathsf{dim}(U + U^\perp) = \mathsf{dim}(U) + \mathsf{dim}(U^\perp) - \mathsf{dim}(U \cap U^\perp) = \mathsf{rango}(B) + (n - \mathsf{rango}(B)) - 0 = n$.
6. $U + U^\perp$ es un subespacio de dimensión n contenido en $\mathbb{R}^n$, por lo que tiene que ser todo $\mathbb{R}^n$.
7. Supongamos que $u \in C(H^\top)$, entonces $u = H^\top x$ para algún vector de parámetros x y tomando traspuestas, $u^\top = x^\top H$. En estas condiciones, para cualquier $v \in N(H)$ se tendrá que $u \cdot v = u^\top v = x^\top H v = 0$ porque $Hv = 0$. Esto prueba que $u \in V^\perp$ y por lo tanto $C(H^\top) \leq V^\perp$. Para demostrar que ambos espacios son iguales, vamos a ver que su dimensión es la misma: Por un lado, la dimensión de $C(H^\top)$ sabemos que es igual al rango de H, por otro lado, la dimensión de $V = N(H)$ es igual a n menos el rango de H por lo que $\mathsf{dim}(V^\perp)$ es de nuevo el rango de H.
8. Tomando $U = C(B)$, $(U^\perp)^\perp = N(B^\top)^\perp = C((B^\top)^\top) = C(B) = U$.

9. Las siguientes condiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} U \leq V &\Leftrightarrow C(B) \leq N(H) \\ &\Leftrightarrow HB = 0 \\ &\Leftrightarrow B^\top H^\top = 0 \\ &\Leftrightarrow C(H^\top) \leq N(B^\top) \\ &\Leftrightarrow V^\perp \leq U^\perp \end{aligned}$$

10. Como $U \cap V \leq U$ tenemos que $U^\perp \leq (U \cap V)^\perp$ y por el mismo motivo, $V^\perp \leq (U \cap V)^\perp$. Esto prueba que $U^\perp + V^\perp \leq (U \cap V)^\perp$. Para completar la demostración, vamos a ver que $(U \cap V)^\perp$ es el espacio más pequeño con esta propiedad. Supongamos que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ tal que $U^\perp + V^\perp \leq W$, entonces $U^\perp \leq W$ y por lo tanto $W^\perp \leq U$. Lo mismo pasa con V, es decir, $W^\perp \leq V$, pero entonces $W^\perp \leq U \cap V$ y por lo tanto $(U \cap V)^\perp \leq W$.

11. La demostración es dual de la del apartado anterior.

$\square$

Definición 9. *Sea $U \leq \mathbb{R}^n$ y v un vector de $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$, el vector v se descompone de forma única como suma de un vector u de U y un u' de $U^\perp$. Llamaremos proyección de v en el espacio U, y la denotaremos, $\mathsf{proy}_U(v)$, al vector u y $\mathsf{proy}_{U^\perp}(v) = u'$.*

Proposición 10. *Sea $U = C(B) \leq \mathbb{R}^n$ con B base y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces*

1. *La matriz $A = (B^\top B)^{-1} B^\top$ es una matriz inversa por la izquierda de B.*

2. *$\mathsf{proy}_U(v) = BAv$.*

Demostración. 1. $AB = (B^\top B)^{-1} B^\top B = I$.

2. El vector BAv está claramente en U porque es de la forma Bx para el vector de parámetros $x = Av$. Tenemos que probar que $v - BAv$ está en $U^\perp$, es decir, que $B^\top(v - BAv) = 0$, pero eso es cierto porque $B^\top(v - B(B^\top B)^{-1} B^\top v) = B^\top v - \underbrace{B^\top B (B^\top B)^{-1}}_{=I} B^\top v = B^\top v - B^\top v = 0$.

$\square$

Definición 11. *Dada una base B de un espacio vectorial V, diremos que es una* **base ortogonal** *si dados dos vectores distintos de la base, siempre son ortogonales. Si B es la matriz de la base, eso es equivalente a decir que $B^\top B$ es una matriz diagonal.*

Teorema 12 (Método de Gram-Schmidt)**.** *Todo espacio $V \leq \mathbb{R}^n$ tiene una base ortogonal.*

Demostración. Partimos de una base cualquiera del espacio V, por ejemplo, $v_1, v_2, \cdots, v_k$. El método de Gram-Schmidt nos permite obtener a partir de ésta una base ortogonal $w_1, w_2, \cdots, w_k$, haciendo las correcciones necesarias en los vectores de forma que obtengamos una nueva base en la cual todos los vectores sean ortogonales entre sí.

1. El primer vector w_1 será v_1.

2. El segundo vector será $w_2 = v_2 - \alpha w_1$ donde buscaremos el valor de α para conseguir la ortogonalidad. Entonces $w_1 \cdot w_2 = 0$ implica que $w_1 \cdot v_2 - \alpha w_1 \cdot w_1 = 0$ y por lo tanto $\alpha = \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1}$. Sustituyendo obtenemos que
$$w_2 = v_2 - \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} w_1.$$

3. El tercer vector será $w_3 = v_3 - \lambda w_1 - \mu w_2$. Imponiendo las condiciones $w_3 \cdot w_1 = 0$ y $w_3 \cdot w_2 = 0$ obtenemos los valores de λ y μ que nos dan
$$w_3 = v_3 - \frac{w_1 \cdot v_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{w_2 \cdot v_3}{w_2 \cdot w_2} w_2.$$
4. Procediendo de esa forma, podemos obtener todos los vectores de la base de forma recursiva.

□

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios