Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 20 min.
	Normas, Distancias y Ángulos	Clase: 45 min.

Vídeo : `https://youtu.be/p8GVKK4LkwU`

1. Resumen

Definición 1. *Llamaremos* **norma** *de un vector u y la denotaremos $\|u\|$ a la raiz cuadrada positiva del producto escalar de u por u, es decir, $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.*

Proposición 2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Para todo $u, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.*

Demostración. Si $v = 0$ es cierta la igualdad. Supongamos que $v \neq 0$, entonces para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$0 \leq (u - \lambda v) \cdot (u - \lambda v) = u \cdot u - 2\lambda u \cdot v + \lambda^2 v \cdot v = \|u\|^2 - 2\lambda u \cdot v + \lambda^2 \|v\|^2.$$

Si tomamos el valor $\lambda = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}$ concluimos que

$$0 \leq \|u\|^2 - 2\frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^2} + \frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|u \cdot v|^2}{\|v\|^2} \leq \|u\|^2 \quad \Rightarrow \quad |u \cdot v|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

y por lo tanto $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ tomando raíces cuadradas. □

Proposición 3. *La norma tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$.*
2. *$\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.*
3. *$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad Triangular).*
4. *$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y solo si $u \cdot v = 0$ (Teorema de Pitágoras).*

Demostración.

1. Tomemos $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$. Entonces $\|u\| = 0$ si y solo si $\|u\|^2 = 0$ y eso es equivalente a $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = 0$. Como u_i^2 es siempre un número mayor o igual que 0, entonces la suma será 0 si y solo si todos los u_i son 0 y por tanto $u = 0$.
2. $\|\lambda u\|^2 = (\lambda u) \cdot (\lambda u) = \lambda^2 (u \cdot u) = \lambda^2 \|u\|^2 = (|\lambda| \cdot \|u\|)^2$ y tomando raíces cuadradas, $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.
3. $$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) \\ &= (u \cdot u) + 2(u \cdot v) + (v \cdot v) \\ &= \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|u \cdot v| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 && \text{(Usando Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. && \text{(Porque } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\text{)} \end{aligned}$$

   Tomando raices cuadradas, obtenemos la desigualdad que buscamos.
4. Esto es consecuencia de que $\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = 2u \cdot v$ tal y como hemos visto en el apartado anterior.

□

Definición 4. *Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos* **distancia** *entre u y v y la denotaremos $d(u, v)$ a $\|u - v\|$.*

Proposición 5. *La distancia tiene las siguientes propiedades:*

1. $d(u, v) \geq 0$.
2. $d(u, v) = 0$ *si y solo si* $u = v$.
3. $d(u, v) = d(v, u)$.
4. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ *para cualesquiera* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. *(Desigualdad triangular)*

Demostración. Todas estas propiedades se deducen fácilmente de las propiedades de la norma. □

Definición 6. *Sea* $U \leq \mathbb{R}^n$ *y* $v \in \mathbb{R}^n$. *Llamaremos* **distancia de** v **al espacio** U *a*

$$d(v, U) = \mathsf{min}\{d(v, u) \ : \ u \in U\}.$$

Proposición 7. *Sea* $U \leq \mathbb{R}^n$ *y* $v \in \mathbb{R}^n$. *Entonces* $d(v, U) = d(v, \mathsf{proy}_U(v))$.

Demostración. Para simplificar la notación, denotemos por $p = \mathsf{proy}_U(v) \in U$ y $q = v - p$ que será un vector de $U^\perp$. El vector p está en U, por lo tanto $d(v, U) \leq d(v, p)$. Por otro lado, supongamos que u es cualquier vector de U. Como $q \in U^\perp$ tendremos que $q \cdot (p - u) = 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
d(u, v)^2 &= \|v - u\|^2 && \text{(definición de distancia)} \\
&= \|(q + p) - u\|^2 && \text{(porque } v = p + q\text{)} \\
&= \|q + (p - u)\|^2 && \text{(reagrupando paréntesis)} \\
&= \|q\|^2 + \|p - u\|^2 && \text{(porque } q \perp (p - u) \text{ y podemos usar el Teorema de Pitágoras)} \\
&\geq \|q\|^2 && \text{(porque } \|p - u\| \geq 0\text{)} \\
&= \|v - p\|^2 && \text{(porque } v = p + q\text{)} \\
&= d(p, v)^2 && \text{(definición de distancia)}
\end{aligned}$$

de donde concluimos que $d(u, v) \geq d(p, v)$ y por lo tanto la distancia mínima se alcanza en p. □

Definición 8. *Dados un espacio vectorial* $V \leq \mathbb{R}^n$ *y una base* B *de* V, *diremos que* B *es una base ortonormal si es ortogonal y todos los vectores de la base son unitarios, es decir, tienen norma* 1.

Proposición 9. *Todo espacio vectorial* $V \leq \mathbb{R}^n$ *tiene una base ortonormal.*

Demostración. Utilizando el método de Gram-Schmidt, podemos encontrar una base ortogonal. Para convertirla en ortonormal, únicamente tenemos que dividir todos los vectores por su norma para hacerlos unitarios. □

Sea B la matriz correspondiente a una base ortonormal, entonces $B^\top B = I$, es decir, $B^\top = B^{-1}$. El recíproco también es cierto, una base es ortonormal si la inversa y la traspuesta de la matriz asociada a la base coinciden. Las matrices que cumplen esta propiedad se llaman matrices ortogonales y cumplen también la propiedad de que

$$1 = |I| = |B^{-1}B| = |B^\top B| = |B^\top| \cdot |B| = |B|^2$$

y por lo tanto $|B|$ sólo puede valer 1 ó -1. Cuando este determinante valga 1, diremos que la base B está orientada positivamente y cuando sea -1 diremos que la base está orientada negativamente.

Definición 10. *Sean* u *y* v *dos vectores de* $\mathbb{R}^n$ *no nulos. Entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\| \text{ y dividiendo por } \|u\| \cdot \|v\|, \quad -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Este valor numérico se llamará coseno del ángulo formado por los vectores u *y* v, *es decir*

$$\cos(\measuredangle(u, v)) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad \text{y por lo tanto} \quad u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\measuredangle(u, v))$$