Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
	Geometría Afín	Clase: 60 min.

1. Resumen

Vídeo : `https://youtu.be/FNMTnhav0yo`

Definición 1. *Una variedad afín L es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones compatible $AX = B$.*

Nota 2. *El sistema que define una variedad afín debe ser compatible, es decir, es fundamental que al menos tenga una solución. El conjunto vacío no se considera una variedad afín.*

Ejemplos de variedades afines podrían ser la recta $2x + y = 3$ en el plano $\mathbb{R}^2$ o la recta de $\mathbb{R}^3$ dada como intersección de dos planos

$$L = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 2, -x + y - 2z = 3 \right\}.$$

El espacio completo K^n es una variedad afín asociada al sistema de ecuaciones trivial $0 = 0$ y lo llamaremos **espacio afín de dimensión n, $\mathcal{A}^n(K)$**. Todas las variedades afines determinadas por sistemas de ecuaciones con n incógnitas, son subconjuntos no vacíos del espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$.

Definición 3. *Sea L una variedad afín dada como conjunto de soluciones del sistema $AX = B$. Entonces llamaremos:*

1. **puntos de** L *a los valores X tales del $AX = B$.*
2. **espacio vectorial asociado a** L *al conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. A este espacio también lo llamaremos* **espacio de direcciones de** L.
3. **dimensión de** L *a la dimensión del espacio vectorial asociado.*
4. *Dados dos puntos P y Q de L, llamaremos* **vector que une los puntos** P **y** Q *y lo denotaremos $\overrightarrow{PQ}$ al vector $Q - P$ que es un vector del espacio de direcciones porque $A(Q - P) = AQ - AP = B - B = 0$.*

En el caso del espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$, su espacio vectorial asociado estará formado por todos los vectores de K^n y por lo tanto tendrá dimensión n.

Proposición 4. *Sea L una variedad afín, entonces su espacio vectorial asociado no depende de la representación de L en forma de sistema de ecuaciones. Como únicamente depende de L, utilizaremos la notación $\overrightarrow{L}$ para representarlo.*

Demostración. Supongamos que L viene representado por $AX = B$ y por $A'X = B'$ y llamemos V y V' a los espacios vectoriales asociados, es decir,

$$L = \{X : AX = B\} = \{X : A'X = B'\} \quad V = N(A) \quad V' = N(A').$$

Tomaremos un punto $P \in L$, que existe porque L no es vacía. El punto P cumplirá las dos ecuaciones, es decir, $AP = B$ y $A'P = B'$.
Sea $v \in V$, entonces $A(P + v) = AP + Av = B + 0 = B$ por lo que $P + v \in L$ y por lo tanto ha de cumplir la ecuación $A'(P + v) = B'$, pero como $A'P = B'$ concluimos que $A'v = 0$. Esto prueba que $V \leq V'$.
Intercambiando el papel de A y B por el de A' y B' concluimos el contenido en el otro sentido. □

Definición 5. *Dos variedades afines se dicen* **paralelas** *si su espacio de direcciones es el mismo. En el caso en que uno de los espacios de direcciones esté contenido en el otro pero no sean iguales, diremos que son* **débilmente paralelas**. *A veces, abusando del lenguaje, utilizaremos la palabra paralelas aunque nos estemos refiriendo a débilmente paralelas, por ejemplo para hablar de una recta paralela a un plano.*

Proposición 6. *Sea $P \in K^n$ y $V \leq K^n$. Entonces el conjunto $L = \{P + v : v \in V\}$ es una variedad afín que tiene a V como espacio vectorial asociado. A esta variedad afín la denotaremos $P + V$.*

Demostración. Pongamos V en forma implícita como $V = N(A)$ y llamemos $B = AP$. Vamos a probar que L es el conjunto de soluciones de $AX = B$.
El punto P cumple la ecuación $AP = B$ por lo que $P \in L$ es no vacío. Sea $P + v \in L$, entonces $A(P + v) = AP + Av = B + 0 = 0$. Recíprocamente, sea X una solución de $AX = B$, entonces $\overrightarrow{PX} = X - P$ cumple que $A(X - P) = AX - AP = B - B = 0$ y por lo tanto $X - P \in N(A) = V$ y $X = P + \overrightarrow{PX} = P + (X - P) \in L$.
El espacio vectorial asociado es $N(A) = V$. □

Proposición 7. *Toda variedad afín L se puede poner como $L = P + V$ siendo V un espacio vectorial. El espacio V es su espacio vectorial asociado y por lo tanto es único, pero el punto P puede variar, de hecho puede ser cualquier punto de L.*

Demostración. Pongamos L como conjunto de soluciones del sistema $AX = B$, llamemos $V = N(A)$ y tomemos $P \in L$ cualquiera. Vamos a demostrar que $L = P + V$.
Sea $P + v \in P + V$. Este punto está en L porque $A(P + v) = AP + Av = B + 0 = B$. Recíprocamente, sea $Q \in L$, por estar el L tenemos que $AQ = B = AP$ y entonces $A(\overrightarrow{PQ}) = A(Q - P) = AQ - AP = B - B = 0$ por lo que $\overrightarrow{PQ} \in V$ y por lo tanto $Q = P + \overrightarrow{PQ} \in P + V$. □

Proposición 8. *Sean L y L' dos variedades afines. La intersección $L \cap L'$ es una variedad afín si y solo si es distinta del vacío (es decir, L y L' tienen al menos un punto en común). En ese caso, el espacio de direcciones de $L \cap L'$ es la intersección de los espacios de direcciones de ambas variedades afines, es decir, $\overrightarrow{L \cap L'} = \overrightarrow{L} \cap \overrightarrow{L'}$.*

Demostración. Claramente, si es vacía no puede ser una variedad afín por definición. Supongamos que L y L' tienen un punto en común P, entonces vamos a poner $L = P + \overrightarrow{L}$ y $L' = P + \overrightarrow{L'}$. Vamos a demostrar que $L \cap L' = P + (\overrightarrow{L} \cap \overrightarrow{L'})$ con lo que habremos demostrado que $L \cap L'$ es una variedad afín y que $\overrightarrow{L \cap L'} = \overrightarrow{L} \cap \overrightarrow{L'}$.
$Q \in L \cap L'$ si y solo si $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{L}$ y $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{L'}$, o lo que es lo mismo, $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{L} \cap \overrightarrow{L'}$ y eso es equivalente a que $Q \in P + (\overrightarrow{L} \cap \overrightarrow{L'})$. □

Proposición 9. *Sea L una variedad afín, $P_0, P_1, \cdots, P_k \in L$ y $w_0, w_1, \cdots, w_k \in K$ tales que $w_0 + w_1 + \cdots + w_k = 1$. Entonces $w_0P_0 + w_1P_1 + \cdots + w_kP_k \in L$.*

Demostración. Supongamos que L está determinado por el sistema de ecuaciones $AX = B$, entonces $AP_i = B$ para todo i. Vamos a ver que $w_0P_0 + w_1P_1 + \cdots + w_kP_k \in L$ comprobando que cumple el sistema de ecuaciones: $A(w_0P_0 + \cdots + w_kP_k) = w_0AP_0 + \cdots + w_kAP_k = w_0B + \cdots + w_kB = (w_0 + \cdots + w_k)B = B$. □

Definición 10. *Una combinación lineal del tipo $w_0P_0 + w_1P_1 + \cdots + w_kP_k$ con la condición adicional de que $w_0 + w_1 + \cdots + w_k = 1$ se llamará una combinación afín.*

Hemos probado que las variedades afines son cerradas para combinaciones afines, pero no necesariamente para combinaciones lineales porque si no serían espacios vectoriales. Para poder reducir el estudio de las combinaciones afines al caso de las combinaciones lineales usuales, podemos añadir una coordenada adicional igual a 1 que nos sirva para comprobar que la suma de los coeficientes es igual a 1.

Proposición 11. *El punto $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ es combinación afín de $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ si y solo si $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.*

Demostración. Para ver esto, simplemente notemos que $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ si y solo si $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ con la condición adicional de que los coeficientes cumplan que $1 = w_1 + w_2$ para ajustar la primera coordenada, y eso es precisamente la condición de combinación afín. □

Corolario 12. *La ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos del plano* $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ *y* $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ *es*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demostración. El punto $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ estará en la recta que pasa por $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ si y solo si es combinación afín de dichos puntos, y eso es equivalente a que las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

sean linealmente dependientes, y eso es equivalente a que el determinante de la matriz sea 0. □

Ejemplo 13. *La recta que pasa por los puntos* $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ *es* $0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 2x_1 + 2x_2$, *es decir,* $2x_1 + 2x_2 = 6$, *o lo que es lo mismo,* $x_1 + x_2 = 3$.

Esto que hemos hecho para el caso del plano, también lo podemos hacer en el espacio tridimensional y en cualquier otra dimensión. Los resultados son los siguientes:

Proposición 14. *El punto* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *es combinación afín de* $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ *y* $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ *si y solo si* $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *es combinación lineal de* $\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ *y* $\begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$.

Corolario 15. *Sean* $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ *tres puntos no alineados del espacio tridimensional. La ecuación del plano que pasa por dichos puntos es*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cuando añadimos la coordenada extra igual a 1, diremos que los puntos están en **coordenadas homogéneas**. Cuando restamos dos puntos P y Q para formar el vector $Q - P = \overrightarrow{PQ}$, si utilizamos coordenadas homogéneas, la primera coordenada se hará cero. De este modo diferenciaremos los puntos de una variedad afín de los vectores del espacio vectorial asociado.

Definición 16. *Un* **sistema de referencia afín** *R en una variedad afín L consiste en un punto $P \in L$ y una base B del espacio vectorial asociado. Lo representaremos mediante la matriz* $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline P & B \end{array}\right]$.

Ejemplo 17. *El espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$ tiene un sistema de referencia que llamaremos* **sistema de referencia canónico** *que tiene como punto base el origen de coordendadas y como base del espacio la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia canónico sea precisamente la matriz identidad de tamaño $n-1$.*

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones, lo que hacemos realmente es calcular un sistema de referencia para el conjunto de soluciones, veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo 18. *Calcula un sistema de referencia afín para la variedad afín definida por*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema reduciendo la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 7 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right]$$

Las soluciones del sistema son

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{4}{3} - a - \frac{1}{3}b \\ \frac{7}{3} + a - \frac{4}{3}b \\ a \\ b \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]}_{P} + a \underbrace{\left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]}_{v_1} + b \underbrace{\left[\begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]}_{v_2}$$

y el sistema de referencia obtenido de esta forma es

$$R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La base B está formada por dos vectores, v_1 y v_2 porque tenemos dos parámetros libres. Eso nos indica que la dimensión del espacio vectorial asociado es 2, o lo que es lo mismo, estamos ante un plano.

Las columnas correspondientes a la parte de B son linealmente independientes porque B es una base y también son linealmente independientes con la primera columna porque ésta tiene un 1 en la primera componente mientras que las otras columnas tienen ceros. Esto prueba que la matriz asociada a un sistema de referencia afín es una matriz de rango máximo por columnas y por lo tanto podemos calcular una matriz inversa por la izquierda S.

Hay una segunda forma de encontrar un sistema de referencia utilizando las coordenadas homogéneas. Para ello añadiremos una coordenada extra llamada x_0 y dejaremos el sistema de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1x_0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6x_0 \end{aligned}$$

y pasamos todas las variables al primer miembro, dejándolo en forma homogénea. Este proceso se llamará **homogenización del sistema de ecuaciones**.

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ -6x_0 + x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Esto nos convierte la variedad afín en un espacio vectorial con una coordenada extra x_0. Los puntos de la variedad afín serán las soluciones del sistema en las que x_0 tome el valor 1. Vamos a pasar la variedad a forma paramétrica reduciendo la matriz:

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

de donce obtenemos la base $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ y por tanto, el sistema de referencia $R' = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$.

Definición 19. *Sea* $R = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline P & B \end{array}\right]$ *un sistema de referencia afín de una variedad afín* L *y sea* Q *un punto de* L*. Llamaremos* **coordenadas homogéneas de Q en el sistema de referencia** R *a un vector* $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right]$ *tal que*

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline Q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline P & B \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right] = R \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right] \quad \text{o lo que es lo mismo } Q = P + BX.$$

Esta relación la representaremos como que Q *es el punto de coordenadas homogéneas* $\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline X \end{array}\right]_R$.

Definición 20. *Sean* R *y* R' *dos sistemas de referencia de la misma variedad afín* L*. Llamaremos* **matriz de cambio de sistema de referencia** *a la matriz* $M_{R'R}(\mathsf{id}) = P_{R'R} = SR'$ *siendo* S *cualquier inversa por la izquierda de la matriz* R*.*

Ejemplo 21. *Tenemos dos sistemas de referencia de la variedad afín definida por*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

$$R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad y \qquad R' = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Una inversa por la izquierda de R podría ser $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *y la matriz de cambio de sistema de referencia* $P_{R'R} = SR' = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$*. Para interpretar el significado de esta matriz de cambio de sistema de referencia en términos de los sistemas de referencia R y R' vamos a nombrar $R = (P; v_1, v_2)$ y $R' = (P'; v'_1, v'_2)$ a los puntos y vectores de cada uno de los sistemas de referencia.*

El valor de la primera columna de la matriz $P_{R'R}$ son las coordenadas homogéneas del punto P' en el sistema de referencia R, es decir,

$$P' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_R = R \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P + v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 7/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ *es la matriz de cambio de base de la base $B' = \{v'_1, v'_2\}$ a $B = \{v_1, v_2\}$ porque*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = v'_1 = -v_1 + 0v_2 = -\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = v'_2 = v_1 - 3v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios