

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad de Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

1. Resumen

Vídeo : <https://youtu.be/IK8Fehxmgmo>

Definición 1. Una aplicación $f : \mathcal{A}^n(K) \rightarrow \mathcal{A}^m(K)$ diremos que es una **aplicación afín** si existe una matriz $A \in M_{m \times n}(K)$ y un $B \in K^m$ tal que $f(P) = AP + B$. Si utilizamos coordenadas homogéneas, esta relación se puede escribir como $\begin{bmatrix} 1 \\ f(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix}$.

Dada una aplicación afín de esta forma, definiremos los siguientes elementos:

1. A la aplicación lineal representada por A la llamaremos **aplicación lineal asociada a f** y la denotaremos $\vec{f}$.
2. Al punto B lo llamaremos **desplazamiento del origen**, de hecho, $\begin{bmatrix} 1 \\ f(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}$.

Usando esta notación, podemos decir que la **matriz de f** es $M(f) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ f(0) & M(\vec{f}) \end{array} \right]$.

Proposición 2. La composición de aplicaciones afines es una aplicación afín. La aplicación lineal asociada es la composición de las aplicaciones lineales asociadas.

Demostración. Sean $f : \mathcal{A}^n(K) \rightarrow \mathcal{A}^m(K)$ y $g : \mathcal{A}^p(K) \rightarrow \mathcal{A}^n(K)$ aplicaciones afines, entonces

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ (f \circ g)(P) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ f(g(P)) \end{bmatrix} && \text{(Definición de composición de aplicaciones)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f(0) & M(\vec{f}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ g(P) \end{bmatrix} && (f \text{ es afín}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f(0) & M(\vec{f}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g(0) & M(\vec{g}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} && (g \text{ es afín}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f(0) + M(\vec{f})g(0) & M(\vec{f})M(\vec{g}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} && \text{(Producto de matrices en bloques)}
\end{aligned}$$

Esto prueba que efectivamente existe una matriz de la forma que hemos indicado en la definición que representa a la función compuesta $f \circ g$. $\square$

Definición 3. Una aplicación $t : \mathcal{A}^n(K) \rightarrow \mathcal{A}^n(K)$ se llama una **traslación** si la aplicación lineal asociada es la aplicación identidad.

Proposición 4. Una aplicación $t : \mathcal{A}^n(K) \rightarrow \mathcal{A}^n(K)$ es una traslación si y solo si se puede poner como $t(P) = P + v$ para un vector constante que llamaremos desplazamiento.

Demostración. Para calcular el desplazamiento, en realidad lo único que tenemos que ver es donde va el origen, $v = t(0)$, porque como la matriz tiene que tener la forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & I \end{bmatrix}$ entonces, para todo punto P

$$\text{tendremos que } \begin{bmatrix} 1 \\ t(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ P + v \end{bmatrix}. \quad \square$$

Las aplicaciones lineales se pueden considerar como aplicaciones afines que dejan fijo el origen de coordenadas. Para transformar la matriz de una aplicación lineal $M(f)$ en la matriz de una aplicación afín únicamente

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

tenemos que añadir una primera fila y columna que tenga un uno en la diagonal y cero en el resto de las posiciones, es decir, $M(f)$ se transformará en $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M(f) \end{array} \right]$.

Cualquier aplicación afín se puede poner como composición de una aplicación lineal y una traslación, ya que

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) & M(f) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline f(0) & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M(f) \end{array} \right].$$

Tal y como sucedía en el caso de los espacios vectoriales, podemos extender el concepto de aplicación afín y de matriz asociada a una aplicación afín utilizando sistemas de referencia. Si L una variedad afín de dimensión n y R un sistema de referencia afín de L . Entonces tenemos una biyección entre el espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$ y la variedad afín L que a cada $\left[\frac{1}{X} \right] \in \mathcal{A}^n(K)$ le asigna $\left[\frac{1}{X} \right]_R = R \left[\frac{1}{X} \right] \in L$. Vamos a denotar φ_R a esta biyección para hacer la siguiente definición:

Definición 5. Sean L y L' dos variedades afines de dimensiones n y n' con sistemas de referencia R y R' . Una aplicación $f : L' \rightarrow L$ diremos que es una aplicación afín si la composición

$$\mathcal{A}^{n'}(K) \xrightarrow{\varphi_{R'}} L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{\varphi_R^{-1}} \mathcal{A}^n(K)$$

es una aplicación afín. En caso de que lo sea, la matriz de esta aplicación afín la llamaremos matriz asociada a f en los sistemas de referencia R' y R y la denotaremos $M_{R'R}(f)$.

En realidad, la propiedad de que f sea una aplicación afín no depende de la elección de los sistemas de referencia puesto que las matrices de cambio de sistema de referencia tienen la misma estructura que las de las aplicaciones afines y su producto también tiene la misma estructura.

Vamos a ver una serie de ejemplos de cómo utilizar los sistemas de referencia para construir aplicaciones afines:

Ejemplo 6. Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 30° alrededor del punto $P = \left[\frac{1}{2} \right]$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es

$\left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right]$, que convertida en transformación afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a

obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R & \xrightarrow{g_{30}} & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\ & & & \searrow & \nearrow & & \\ & & & & g_{30} & & \end{array}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y la de la proyección $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Poniendo estas matrices en formato afín nos da

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p,s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{p,s}$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

◇

Ejemplo 9. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Si hacemos el cálculo de la homotecia vectorial centrada en el origen de factor reductor $\frac{1}{2}$, la matriz asociada

es $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, y si hacemos su versión afín, tenemos que $M_{RR}(h_{\frac{1}{2}}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejemplo 10. *Calcula las matrices de las transformaciones afines que corresponden a la simetría y la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para

obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos el sistema de referencia

$$R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

Las matrices de la proyección y la simetría en el sistema de referencia R son

$$M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Micaela	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p,s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p,s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

◇

Ejemplo 11. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos

hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Este vector no tiene la misma longitud que v_2 ya que v_2 tiene longitud $\sqrt{2}$ y este vector tiene longitud $\sqrt{6}$. Para conseguir que tengan la misma longitud, debemos tomar

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Esto nos da el sistema de referencia $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3}\sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Usando que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{60^\circ}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{60^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 g_{60°

$$\begin{aligned}
M(s) &= M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{60^\circ})M_{CR}(\text{id}) = \\
&\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3}\sqrt{3} & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{60^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]}_{R^{-1}} \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{6}\sqrt{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

◇

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Ejercicio 12. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 120° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{120}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Ahora vamos a obtener la transformación

en base canónica:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{120}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 g_{120}

$$\begin{aligned}
M(g_{120}) &= M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{120})M_{CR}(\text{id}) = \\
&\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{120})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 13. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 60° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro

en formato afín nos da $M_{RR}(g_{60}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en

base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{60}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} g_{60}
 \end{array}$$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{60})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{60})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 14. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 30° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro

en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base

canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} g_{30}
 \end{array}$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}-4 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 15. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 60° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro

en formato afín nos da $M_{RR}(g_{60}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en

base canónica:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{60}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 g_{60}

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{60})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{60})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 16. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 150° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación

en base canónica:

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{150}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 g_{150}

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3}-4 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 17. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 30° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 g_{30}

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{9}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 18. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 135° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(135^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(135^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{135}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{135}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
\searrow \hspace{10em} \nearrow \\
\hspace{10em} g_{135}
\end{array}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{135})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{135})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{2}-3 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 19. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 45° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{45}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{45}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
\searrow \hspace{10em} \nearrow \\
\hspace{10em} g_{45}
\end{array}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{45})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{45})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}-3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2}-2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 20. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 150° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sen(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{150}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} g_{150}
 \end{array}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 21. Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 120° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\sen(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{120}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{120}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} g_{120}
 \end{array}$$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{120})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{120})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} - \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - 3 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

◇

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Ejercicio 22. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 150° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación

en base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{150}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad g_{150}
 \end{array}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{7}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 23. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 45° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{45}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación

en base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{45}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad g_{45}
 \end{array}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{45})M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{45})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2}-3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 24. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 60° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro

en formato afín nos da $M_{RR}(g_{60}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en

base canónica:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{60}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 g_{60}

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{60})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{60})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 25. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 135° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(135^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(135^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{135}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación

en base canónica:

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{135}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 g_{135}

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{135})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{135})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}-1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 26. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 30° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 g_{30}

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 27. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 150° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{150}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
\searrow \hspace{10em} \nearrow \\
\hspace{15em} g_{150}
\end{array}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 28. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 30° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{c}
\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
\searrow \hspace{10em} \nearrow \\
\hspace{15em} g_{30}
\end{array}$$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} - \frac{7}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} - 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 29. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 150° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
		Álgebra y Matemática Discreta	
		Aplicaciones Afines	

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{150}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} g_{150}
 \end{array}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 30. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 45° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{45}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{45}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} g_{45}
 \end{array}$$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{45})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{45})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

◇

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Ejercicio 31. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 150° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{150}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Ahora vamos a obtener la transformación

en base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{150}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} g_{150}
 \end{array}$$

$$M(g_{150}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{150})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{150})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} - \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 32. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 135° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(135^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(135^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{135}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Ahora vamos a obtener la transformación

en base canónica:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{135}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} g_{135}
 \end{array}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{135})M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{135})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}-1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}-2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 33. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 30° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro

en formato afín nos da $M_{RR}(g_{30}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación en base

canónica:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 g_{30}

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30})} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 34. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 120° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la

más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del

giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{120}) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a obtener la transformación

en base canónica:

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{120}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

g_{120}

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{120})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{120})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 35. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 45° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza alrededor del origen, en tal caso, teniendo en cuenta que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro en formato afín nos da $M_{RR}(g_{45}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Ahora vamos a obtener la transformación en base canónica:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{45}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

g_{45}

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{45})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(g_{45})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} - 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 36. *Calcula la matriz de la transformación afín correspondiente al giro de ángulo 60° alrededor del punto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer un giro alrededor de un punto tomaremos un sistema de referencia que tenga dicho punto como origen y los vectores de la base puede ser cualquier base ortonormal orientada positivamente, la más sencilla es la base canónica. Esto hace que el sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvamos el problema considerando que estamos en un espacio vectorial y que el giro se realiza

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 42. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Leandro Marin Facultad de Ingeniería y Arquitectura Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$$

$$h_{\frac{1}{3}}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 45. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$$

$$h_{\frac{2}{3}}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 46. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$. Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 47. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

Leandro Marin Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{3}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 48. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$$

$$h_{\frac{2}{3}}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 49. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{1}{4}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 50. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 51. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{4}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 52. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 $h_{\frac{1}{4}}$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 53. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 $h_{\frac{1}{4}}$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 54. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{3}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{3}{4}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 55. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{3}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{3}{4}}
 \end{array}$$

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 56. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{3}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{h_{\frac{3}{4}}}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 57. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 58. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto $\left[\begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right]$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{3}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{3}{4}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 59. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{3}{4}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{3}{4}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 60. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

Leandro Marín Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 $h_{\frac{1}{3}}$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 61. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Ahora

vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 $h_{\frac{1}{3}}$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 62. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 63. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 64. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 65. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{16}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 67. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{24}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 68. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 70. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 71. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 73. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 74. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 76. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 77. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 79. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 80. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 82. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 83. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 85. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 86. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto a la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la simetría en formato afín es

$$M_{RR}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -16 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 87. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Leandro Marin Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 88. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 89. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 90. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Leandro Marín 	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 91. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 92. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 93. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Leandro Marin Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 94. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 95. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 96. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Leandro Marin Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 2 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 97. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 98. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marin Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 100. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El sistema

de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 101. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 102. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Leandro Marín 	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{5}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{5}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 103. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 \quad \quad \quad p
 \end{array}$$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 104. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ -5 & -5 & -5 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 105. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 108. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Leandro Marín Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 109. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 110. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_p$

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 111. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para tomar el sistema de referencia tomaremos como base un punto cualquiera de la recta, puede ser A , B o cualquier otro que queramos. Tomaremos por ejemplo $P = A$. El primer vector de la base lo tomaremos sobre la recta, por ejemplo podemos tomar el vector $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El segundo vector debe ser perpendicular al anterior, por ejemplo podemos tomar $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. El

sistema de referencia que tomaremos es $R = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{array} \right]$.

Ahora resolvemos el problema considerando que nuestros ejes vienen dados por los vectores v_1 y v_2 como si fueran el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En tal caso, la matriz de la proyección en formato afín es

$$M_{RR}(p) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Para poner las transformaciones en bases canónicas, compondremos con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R})_C$$

p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 112. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$h_{\frac{1}{4}}$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

◇

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Ejercicio 113. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{4}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 114. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 115. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 116. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 $h_{\frac{1}{2}}$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 117. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 118. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$.

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 119. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 120. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 $h_{\frac{2}{3}}$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 121. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 122. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 123. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$$

$$h_{\frac{1}{4}}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 124. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Leandro Marín 	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{3}{4}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{3}{4}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 125. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$.

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 126. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 127. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 $h_{\frac{2}{3}}$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 128. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 129. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{3}{4}$ y con centro en el punto $\left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ -2 \end{array} \right]$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{3}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{3}{4}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{3}{4}}
 \end{array}$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

$$M(h_{\frac{3}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{3}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 130. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{2}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{2}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{2}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$$

$$h_{\frac{2}{3}}$$

$$M(h_{\frac{2}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{2}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 131. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 132. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$.

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

◇

Ejercicio 133. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 134. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{4}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la

homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{4}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{4}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} h_{\frac{1}{4}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{4}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{4}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 135. *Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{2}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{2}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$M(h_{\frac{1}{2}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{2}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 136. Calcula la matriz de la homotecia con factor reductor $\frac{1}{3}$ y con centro en el punto $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Para hacer una homotecia con centro en un punto, pondremos el origen del sistema de referencia en el centro de la homotecia. Como hacemos el mismo factor reductor en todas las direcciones, la base puede tomarse cualquiera, así que tomaremos la base canónica. Esto hace que la matriz del sistema de referencia

sea $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. El inverso de un sistema de referencia como éste es muy fácil de calcular porque

únicamente tenemos que reducir la primera columna y obtenemos $R^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la homotecia afín centrada en el origen y de factor reductor $\frac{1}{3}$, tiene como matriz asociada $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$.

Ahora vamos a calcular la matriz en el sistema de referencia canónico componiendo con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{h_{\frac{1}{3}}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} h_{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$M(h_{\frac{1}{3}}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]}_{M_{RR}(h_{\frac{1}{3}})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 137. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para

obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{21}{29} & -\frac{11}{29} & -\frac{7}{29} & -\frac{2}{29} \\ -\frac{11}{29} & \frac{3}{29} & -\frac{6}{29} & -\frac{10}{29} \\ \frac{29}{29} & \frac{29}{29} & -\frac{29}{29} & \frac{29}{29} \\ \frac{12}{29} & \frac{2}{29} & -\frac{4}{29} & \frac{3}{29} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{48}{29} & \frac{21}{29} & \frac{16}{29} & -\frac{12}{29} \\ \frac{29}{96} & \frac{29}{16} & -\frac{3}{29} & \frac{24}{29} \\ \frac{29}{29} & \frac{29}{29} & -\frac{29}{29} & \frac{29}{29} \\ -\frac{72}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{24}{29} & \frac{11}{29} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 138. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 139. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{48}{35} & \frac{8}{35} & -\frac{11}{35} & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{35} & \frac{13}{35} & \frac{4}{35} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{35}{35} & \frac{35}{35} & \frac{35}{35} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{6}{35} & \frac{1}{35} & \frac{3}{35} & \frac{1}{7} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{12}{7} & \frac{33}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{35}{7} & \frac{35}{7} & -\frac{35}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{35}{7} & -\frac{35}{7} & \frac{35}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{12}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 140. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 141. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{14} & -\frac{5}{28} & -\frac{3}{28} & \frac{3}{14} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{1}{14} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 142. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{33}{53} & -\frac{13}{53} & \frac{7}{53} & -\frac{10}{53} \\ \frac{21}{53} & -\frac{11}{53} & \frac{10}{53} & \frac{16}{53} \\ \frac{53}{53} & \frac{4}{53} & \frac{6}{53} & -\frac{1}{53} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{16}{53} & \frac{21}{53} & -\frac{48}{53} & \frac{8}{53} \\ -\frac{24}{53} & -\frac{48}{53} & -\frac{19}{53} & \frac{12}{53} \\ -\frac{53}{53} & \frac{4}{53} & \frac{12}{53} & \frac{51}{53} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 143. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{18}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{6}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{7}{11} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 144. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12}{3} & \frac{12}{3} & -\frac{12}{3} & -\frac{12}{3} \\ \frac{12}{3} & -\frac{12}{3} & -\frac{12}{3} & -\frac{12}{3} \\ \frac{12}{3} & -\frac{12}{3} & -\frac{12}{3} & \frac{12}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 145. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{21}{65} & \frac{22}{65} & -\frac{1}{65} & \frac{2}{13} \\ \frac{31}{65} & -\frac{17}{65} & -\frac{14}{65} & \frac{2}{13} \\ \frac{65}{65} & \frac{2}{65} & -\frac{6}{65} & -\frac{13}{13} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{16}{13} & \frac{57}{13} & \frac{24}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{65}{48} & \frac{65}{24} & \frac{65}{7} & -\frac{13}{12} \\ \frac{65}{8} & \frac{65}{4} & -\frac{65}{12} & \frac{13}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 146. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{13} & \frac{7}{26} & \frac{5}{26} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{11}{52} & -\frac{7}{52} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{26} & -\frac{1}{52} & \frac{3}{52} & -\frac{1}{13} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{13} & \frac{12}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{4}{13} \\ \frac{18}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{24}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{3}{13} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 147. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{17}{29} & -\frac{7}{29} & \frac{2}{29} & \frac{11}{29} \\ \frac{2}{29} & \frac{6}{29} & \frac{10}{29} & \frac{3}{29} \\ \frac{29}{29} & \frac{29}{29} & -\frac{29}{29} & \frac{29}{29} \\ \frac{11}{29} & \frac{4}{29} & \frac{3}{29} & \frac{2}{29} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{88}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{24}{29} & -\frac{16}{29} \\ -\frac{29}{29} & -\frac{29}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{29}{29} \\ -\frac{29}{29} & -\frac{29}{29} & \frac{29}{29} & -\frac{29}{29} \\ -\frac{44}{29} & -\frac{16}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{21}{29} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 148. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{13}{29} & -\frac{6}{29} & \frac{10}{29} & -\frac{3}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{7}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{11}{29} \\ \frac{29}{29} & \frac{29}{29} & -\frac{29}{29} & -\frac{29}{29} \\ \frac{1}{29} & -\frac{4}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{2}{29} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{24}{29} & -\frac{16}{29} \\ \frac{6}{29} & -\frac{24}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{12}{29} \\ \frac{4}{29} & -\frac{16}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{21}{29} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 149. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & -\frac{7}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{3}{21} \\ \frac{1}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{21} & \frac{19}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{21} \\ \frac{8}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{11}{21} & -\frac{16}{21} \\ \frac{21}{21} & \frac{21}{21} & -\frac{16}{21} & \frac{13}{21} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 150. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 152. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{11}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 153. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{14} & -\frac{5}{28} & \frac{3}{14} & \frac{3}{28} \\ -\frac{9}{7} & \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{5}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{28} & \frac{1}{14} & \frac{1}{28} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 154. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -5 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{66}{65} & -\frac{1}{65} & \frac{22}{65} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{14}{65} & \frac{14}{65} & \frac{17}{65} & \frac{2}{13} \\ -\frac{6}{65} & \frac{6}{65} & -\frac{2}{65} & -\frac{1}{13} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{72}{65} & -\frac{7}{65} & \frac{24}{65} & \frac{12}{13} \\ -\frac{24}{65} & \frac{24}{65} & \frac{57}{65} & -\frac{4}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{3}{13} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 155. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 156. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín 	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 157. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R

es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\searrow \quad \quad \quad \nearrow$
 s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{13} & \frac{2}{13} & \frac{22}{65} & \frac{1}{65} \\ -\frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{17}{65} & -\frac{14}{65} \\ -\frac{13}{13} & -\frac{13}{13} & \frac{65}{65} & -\frac{65}{65} \\ -\frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{2}{65} & \frac{6}{65} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{20}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{4}{13} & \frac{57}{65} & -\frac{24}{65} \\ \frac{13}{13} & \frac{12}{13} & \frac{65}{65} & -\frac{65}{65} \\ \frac{24}{13} & \frac{12}{13} & -\frac{24}{65} & -\frac{7}{65} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 158. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 159. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{14} \\ -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{14} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ 2 & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 160. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{15em} s
 \end{array}$$

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{6} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 161. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la simetría ortogonal con respecto al plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right]$. La matriz de la simetría en el sistema de referencia

R es $M(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{s} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

s

$$M(s) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(s)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(s)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{25}{53} & \frac{11}{53} & -\frac{10}{53} & \frac{16}{53} \\ \frac{9}{53} & -\frac{13}{53} & \frac{7}{53} & \frac{10}{53} \\ \frac{53}{53} & -\frac{53}{53} & \frac{53}{53} & \frac{53}{53} \\ \frac{15}{53} & -\frac{4}{53} & -\frac{6}{53} & -\frac{1}{53} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{120}{53} & \frac{21}{53} & -\frac{48}{53} & -\frac{8}{53} \\ \frac{180}{53} & -\frac{48}{53} & \frac{19}{53} & -\frac{12}{53} \\ \frac{53}{53} & -\frac{53}{53} & \frac{53}{53} & \frac{53}{53} \\ \frac{30}{53} & -\frac{8}{53} & -\frac{12}{53} & \frac{51}{53} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 162. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{22}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{10}{29} & \frac{6}{29} \\ -\frac{6}{29} & -\frac{14}{29} & -\frac{8}{29} & -\frac{1}{29} \\ \frac{5}{29} & \frac{2}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{4}{29} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{10}{29} & \frac{25}{29} & \frac{6}{29} & \frac{8}{29} \\ \frac{15}{29} & \frac{6}{29} & \frac{20}{29} & -\frac{12}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{8}{29} & -\frac{12}{29} & \frac{13}{29} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 163. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad de Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{13} & -\frac{7}{52} & -\frac{2}{13} & \frac{11}{52} \\ \frac{13}{13} & \frac{26}{13} & \frac{13}{13} & \frac{26}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{52}{13} & \frac{1}{13} & \frac{52}{13} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{18}{13} & \frac{17}{26} & \frac{6}{13} & \frac{3}{26} \\ -\frac{13}{13} & \frac{13}{26} & \frac{13}{13} & -\frac{13}{26} \\ -\frac{6}{13} & \frac{3}{26} & -\frac{1}{13} & \frac{25}{26} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 164. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{28} & -\frac{3}{28} & \frac{3}{14} & \frac{5}{28} \\ \frac{9}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{1}{14} & -\frac{3}{28} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9}{14} & \frac{13}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{9}{7} & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{27}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{3}{7} & \frac{5}{14} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 165. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 166. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{13} & -\frac{7}{26} & \frac{1}{13} & \frac{5}{26} \\ -\frac{19}{26} & -\frac{11}{52} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{52} \\ -\frac{3}{26} & \frac{1}{52} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{52} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{13} & \frac{25}{26} & \frac{2}{13} & -\frac{3}{26} \\ -\frac{12}{13} & \frac{2}{5} & \frac{1}{13} & \frac{6}{13} \\ -\frac{13}{9} & -\frac{3}{26} & \frac{13}{6} & \frac{17}{26} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 167. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{8}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{5}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{17}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{8}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} & \frac{2}{21} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 168. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{8}{27} & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{16}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{9}{16} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{9}{9} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 169. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{9}{9} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 170. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 171. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{18} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 172. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{21} & -\frac{4}{21} & \frac{2}{21} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ -\frac{4}{7} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ \frac{2}{7} & -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 173. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 174. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{27}{35} & \frac{1}{7} & \frac{13}{35} & -\frac{4}{35} \\ -\frac{13}{35} & \frac{1}{7} & -\frac{8}{35} & -\frac{11}{35} \\ \frac{6}{35} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{35} & -\frac{3}{35} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{6}{35} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{3}{35} \\ -\frac{18}{35} & \frac{1}{7} & \frac{34}{35} & \frac{3}{35} \\ \frac{1}{35} & -\frac{3}{7} & \frac{3}{35} & \frac{26}{35} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 175. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{24} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 176. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 177. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 178. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{18} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 179. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre

el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{16}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{16}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{16}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 180. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad de Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 181. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 182. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 183. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

Leandro Marin Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{13}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{7}{29} & -\frac{2}{29} \\ -\frac{7}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{29}{29} & -\frac{10}{29} \\ -\frac{29}{29} & -\frac{29}{29} & \frac{4}{29} & -\frac{29}{29} \\ -\frac{5}{29} & \frac{2}{29} & \frac{29}{29} & -\frac{29}{29} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{29} & \frac{25}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{6}{29} \\ \frac{29}{29} & -\frac{29}{29} & \frac{29}{29} & \frac{29}{29} \\ -\frac{15}{29} & \frac{6}{29} & \frac{12}{29} & \frac{20}{29} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 184. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 185. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.*

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones

correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\curvearrowright$
 p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{9}{5} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 186. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponde a la proyección ortogonal sobre el plano que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.*

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución: En este caso, vamos a tomar el punto base de nuestro sistema de referencia sobre el plano. Puede ser cualquiera, así que tomaremos por ejemplo $P = A$. Para construir la base, necesitamos dos vectores que sean base del espacio vectorial asociado y un tercer vector perpendicular a ellos. Los de la base del plano vectorial pueden ser por ejemplo $v_1 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para obtener un tercer vector perpendicular a los dos podemos tomar $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Con esto tenemos

el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right]$. La matriz de la proyección en el sistema de referencia

R es $M(p) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. Para pasar al sistema de referencia canónico, hacemos las composiciones correspondientes con las matrices de cambio de sistema de referencia:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{p} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

p

$$M(p) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(p)M_{CR}(\text{id}) = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]}_{M_{RR}(p)} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{20}{29} & -\frac{3}{29} & -\frac{10}{29} & -\frac{6}{29} \\ \frac{33}{29} & \frac{11}{29} & -\frac{2}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{29}{29} & \frac{2}{29} & -\frac{3}{29} & \frac{4}{29} \\ \frac{6}{29} & \frac{2}{29} & -\frac{3}{29} & \frac{4}{29} \end{array} \right]}_{R^{-1}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{29} & \frac{25}{29} & \frac{6}{29} & -\frac{8}{29} \\ \frac{18}{29} & \frac{6}{29} & \frac{20}{29} & \frac{12}{29} \\ -\frac{24}{29} & -\frac{8}{29} & \frac{12}{29} & \frac{13}{29} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 187. Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{120^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{120^\circ}}$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{120^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{120^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{10} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} - 3 & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 189. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(135^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(135^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{135^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{135^\circ}}$

$$\begin{aligned} M(g_{135}) &= M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{135^\circ})M_{CR}(\text{id}) = \\ &= \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{135^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} \\ &= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 190. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g_{30^\circ}}$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2 & \frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 191. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{45^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{45^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{45^\circ}}$

$$M(g_{45}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{45^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{45^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 192. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B.*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{60^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{60^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{60^\circ}}$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{60^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{60^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} + \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 193. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad de Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(150^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{150^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{150^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{150^\circ}}$

$$\begin{aligned}
M(g_{150}) &= M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{150^\circ})M_{CR}(\text{id}) = \\
&= \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{150^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}+1 & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}-1 & \frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 194. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

Leandro Marín 	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{g_{30^\circ}}$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{10}\sqrt{3} - \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 195. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{30^\circ}}$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 196. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{60^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{60^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{60^\circ}}$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{60^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{60^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} - \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} + 1 & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 198. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

Leandro Marín 	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{120^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{120^\circ}}$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{120^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{120^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} \\ 3 & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{7}{10} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 199. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(135^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(135^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{135^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{135^\circ}}$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{135^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{135^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 200. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ y $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{60^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{60^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{60^\circ}}$

$$M(g_{60}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{60^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{60^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} - \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 201. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{45^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{45^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{45^\circ}}$

$$\begin{aligned}
M(g_{45}) &= M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{45^\circ})M_{CR}(\text{id}) = \\
&= \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{45^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 202. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad de Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{120^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{120^\circ}}$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{120^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{120^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} \\ \frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} - \frac{9}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5}\sqrt{3} & \frac{7}{10} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 203. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{30^\circ}}$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & \frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2 & \frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} - \frac{4}{5}\sqrt{3} + \frac{8}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 204. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(135^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(135^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{135^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{135^\circ}}$

$$\begin{aligned}
M(g_{135}) &= M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{135^\circ})M_{CR}(\text{id}) = \\
&= \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{135^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 205. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

de norma 1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{ de donde obtenemos el sistema de referencia } R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$$

Usando que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g_{30^\circ}}$

$$\begin{aligned}
M(g_{30}) &= M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30^\circ})M_{CR}(\text{id}) = \\
&= \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 206. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{45^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{45^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{45^\circ}}$

$$\begin{aligned}
M(g_{45}) &= M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{45^\circ})M_{CR}(\text{id}) = \\
&= \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{45^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}} \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 207. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(135^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sin(135^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{135^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{135^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \\
 \searrow \hspace{10em} \nearrow \\
 \hspace{10em} g_{135^\circ}
 \end{array}$$

$$M(g_{135}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{135^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{135^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{5}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{5}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 208. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática			Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{120^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{120^\circ}}$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{120^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{120^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 209. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemáticas Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$ y $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{120^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{120^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{120^\circ}}$

$$M(g_{120}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{120^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{120^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} \\ -3 & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 211. *Calcula la matriz de la transformación afín que corresponden al giro de ángulo 60° alrededor de la recta que pasa por los puntos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Consideraremos sentido positivo del giro el que va de A a B .*

Solución: Tomaremos como punto base $P = A$ y como vector $v_3 = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Los vectores v_1 y v_2 tienen que ser del mismo módulo, perpendiculares y también perpendiculares a v_3 . Para sacar v_2 podemos buscar cualquiera que sea perpendicular, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y para obtener el primero podemos hacer el producto vectorial $v_2 \times v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para hacerlos todos de la misma longitud, los vamos a hacer de norma

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería y Matemática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

1, así tendremos una base ortonormal. Esto nos da la base $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix}$,

de donde obtenemos el sistema de referencia $R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]$

Usando que $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$, la matriz del giro es $M_{RR}(g_{30^\circ}) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$.

Combinándolo todo, tenemos el giro que buscamos:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{g_{30^\circ}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_R \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R})_C$$

$\xrightarrow{g_{30^\circ}}$

$$M(g_{30}) = M_{RC}(\text{id})M_{RR}(g_{30^\circ})M_{CR}(\text{id}) =$$

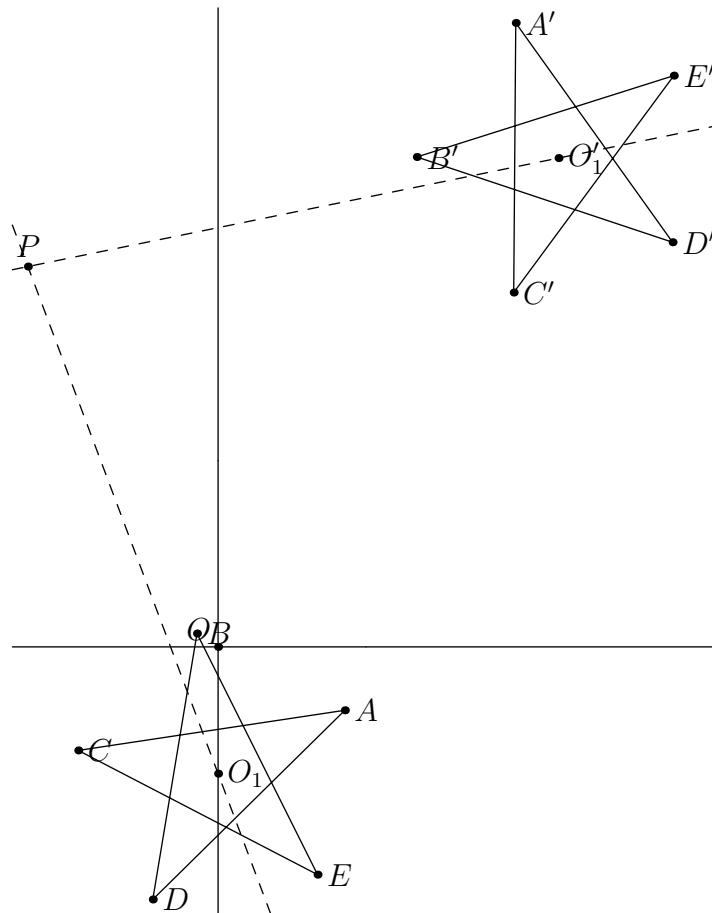
$$= \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_R \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{M_{RR}(g_{30^\circ})} \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{array} \right]}_{R^{-1}}$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{4}{5} & \frac{2}{5}\sqrt{3} + \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{10}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{3} + \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\sqrt{3} - \frac{2}{5} & -\frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{10}\sqrt{3} + \frac{4}{5} \end{array} \right]$$

◇

Ejercicio 212. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, -2)$ y con el vértice $A = (2, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 81° alrededor del punto $P = (-3, 6)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad de Ingeniería Universidad de Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

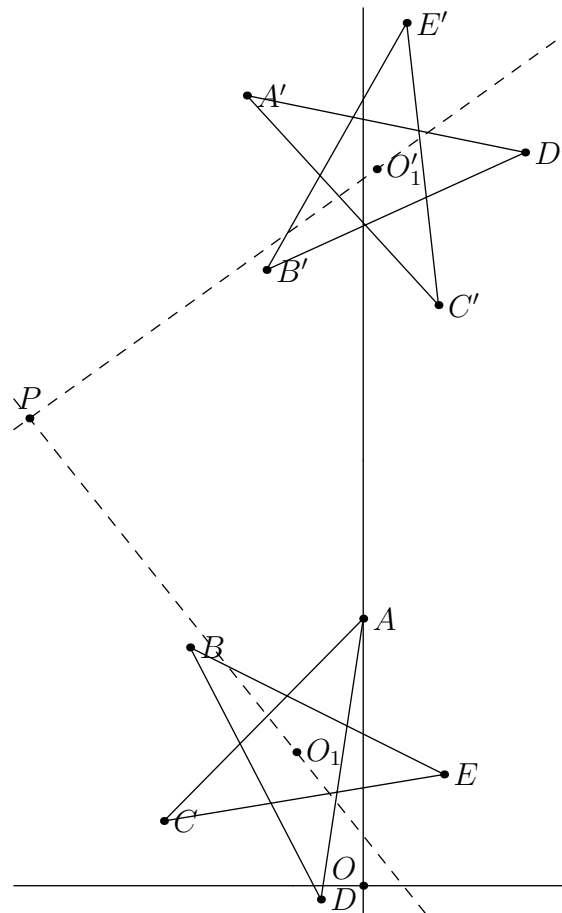
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (2, -1) \\
 B &= (-0,333022527545259, 0,211130026965255) \\
 C &= (-2,20581924104237, -1,63344648979000) \\
 D &= (-1,03024873645742, -3,98458749895989) \\
 E &= (1,56909050504505, -3,59309603821536) \\
 A' &= (4,69599070936712, 9,84340044769407) \\
 B' &= (3,13480657176551, 7,72856377675429) \\
 C' &= (4,66370333869525, 5,59026895790392) \\
 D' &= (7,16979764354926, 6,38356675282638) \\
 E' &= (7,18975233603184, 9,01214657213917)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 213. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-1, 2)$ y con el vértice $A = (0, 4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 87° alrededor del punto $P = (-5, 7)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

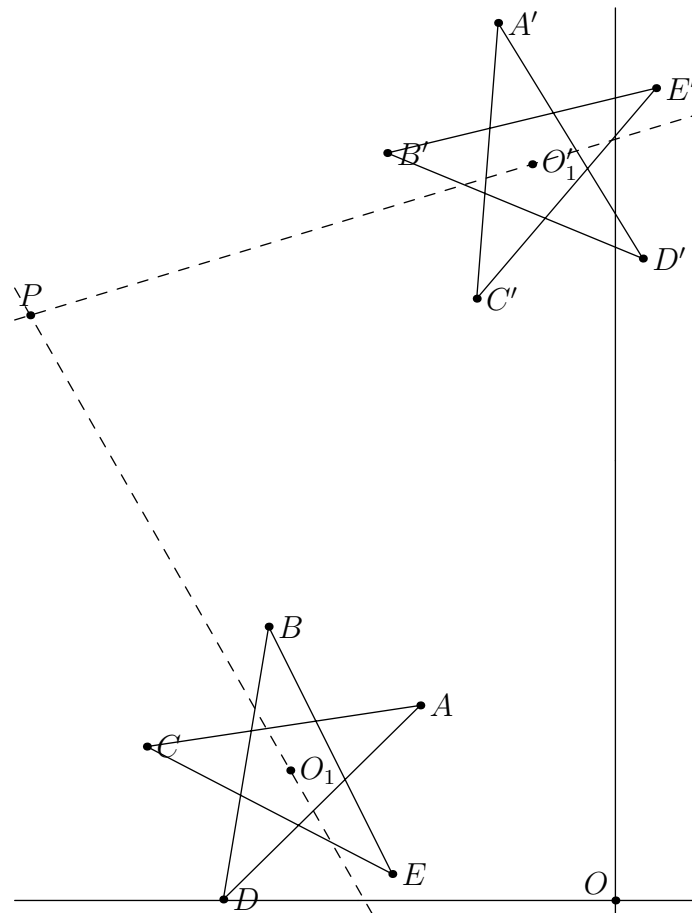
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, 4) \\
 B &= (-2,59309603821536, 3,56909050504505) \\
 C &= (-2,98458749895989, 0,969751263542578) \\
 D &= (-0,633446489790001, -0,205819241042368) \\
 E &= (1,21113002696525, 1,66697747245474) \\
 A' &= (-1,74243161452156, 11,8361398050440) \\
 B' &= (-1,44782482684316, 9,22404545435447) \\
 C' &= (1,12746303060875, 8,69705161424693) \\
 D' &= (2,42447166965052, 10,9834458598882) \\
 E' &= (0,650779234828672, 12,9235090554842)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 214. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-5, 2)$ y con el vértice $A = (-3, 3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 77° alrededor del punto $P = (-9, 9)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

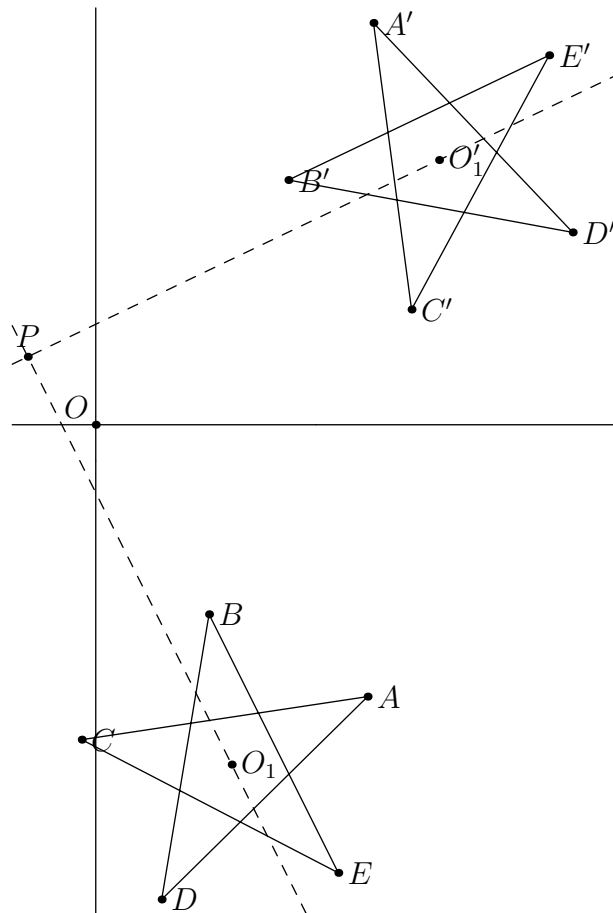
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-3, 3) \\
 B &= (-5,33302252754526, 4,21113002696525) \\
 C &= (-7,20581924104237, 2,36655351021000) \\
 D &= (-6,03024873645742, 0,0154125010401067) \\
 E &= (-3,43090949495495, 0,406903961784640) \\
 A' &= (-1,80407328522540, 13,4965140626482) \\
 B' &= (-3,50897800544217, 11,4957317278519) \\
 C' &= (-2,13296546058293, 9,25599524053010) \\
 D' &= (0,422361781303094, 9,87254430031828) \\
 E' &= (0,625628324307940, 12,4933290623209)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 215. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, -5)$ y con el vértice $A = (4, -4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 89° alrededor del punto $P = (-1, 1)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

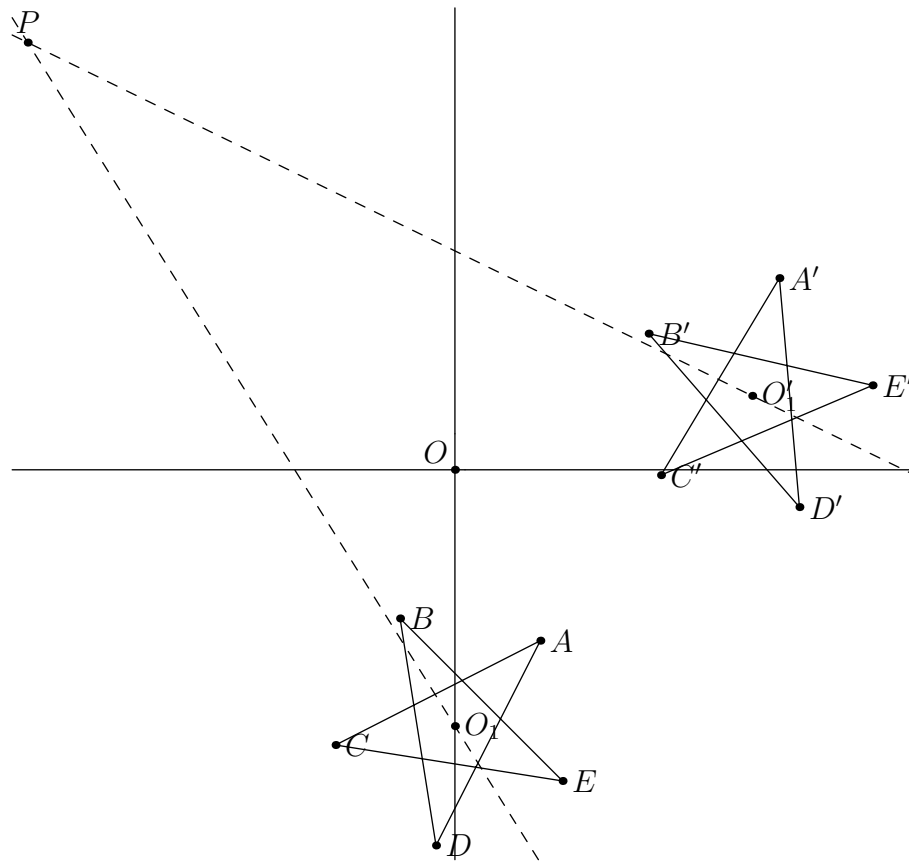
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (4, -4) \\
 B &= (1,66697747245474, -2,78886997303475) \\
 C &= (-0,205819241042367, -4,63344648979000) \\
 D &= (0,969751263542578, -6,98458749895989) \\
 E &= (3,56909050504505, -6,59309603821536) \\
 A' &= (4,08650050796837, 5,91197644359554) \\
 B' &= (2,83483808459441, 3,60044638016047) \\
 C' &= (4,64644885399339, 1,69574260359884) \\
 D' &= (7,01774830724128, 2,83010099461853) \\
 E' &= (6,67168119745353, 5,43587681225398)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 216. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, -3)$ y con el vértice $A = (1, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 32° alrededor del punto $P = (-5, 5)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

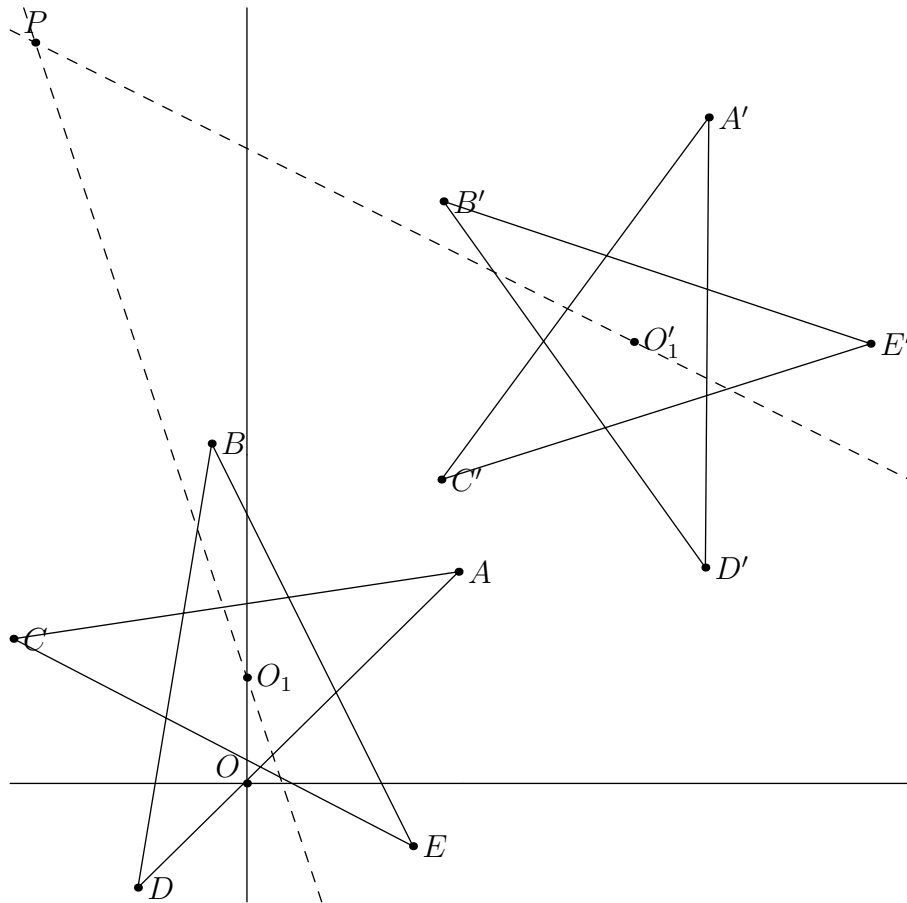
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, -2) \\
 B &= (-0,642039521920206, -1,73992648932990) \\
 C &= (-1,39680224666742, -3,22123174208247) \\
 D &= (-0,221231742082474, -4,39680224666742) \\
 E &= (1,26007351067010, -3,64203952192021) \\
 A' &= (3,79772342657099, 2,24317891230425) \\
 B' &= (2,26737697277210, 1,59358538259095) \\
 C' &= (2,41227407064382, -0,0625960246010822) \\
 D' &= (4,03217185579864, -0,436578896068083) \\
 E' &= (4,88842664745329, 0,988468385347056)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 217. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, 1)$ y con el vértice $A = (2, 2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 45° alrededor del punto $P = (-2, 7)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

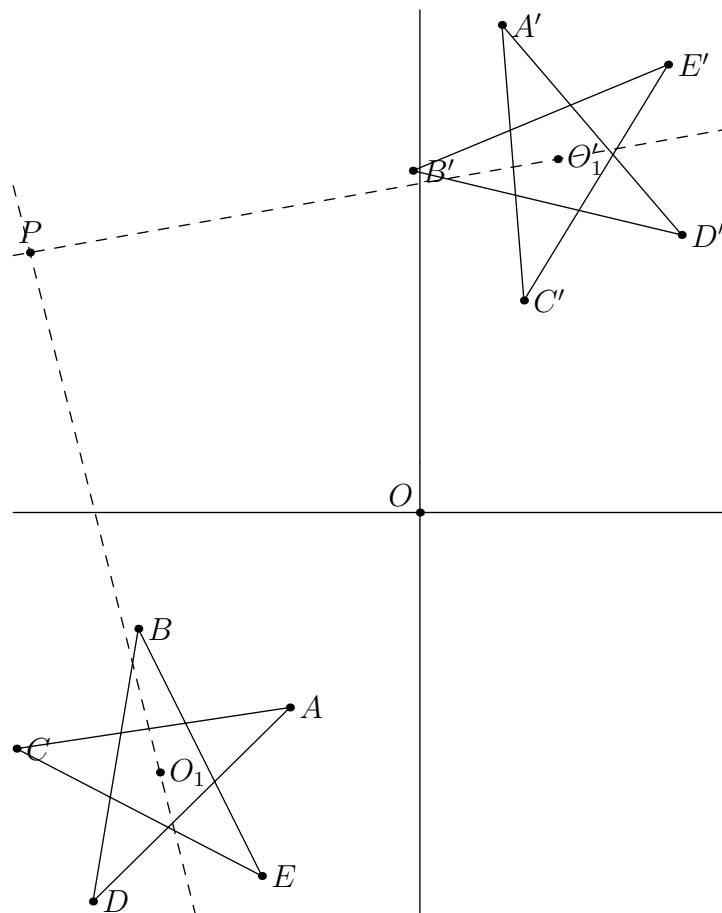
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (2, 2) \\
 B &= (-0,333022527545259, 3,21113002696525) \\
 C &= (-2,20581924104237, 1,36655351021000) \\
 D &= (-1,03024873645742, -0,984587498959894) \\
 E &= (1,56909050504505, -0,593096038215360) \\
 A' &= (4,36396103067893, 6,29289321881345) \\
 B' &= (1,85786672582492, 5,49959542389100) \\
 C' &= (1,83791203334234, 2,87101560457821) \\
 D' &= (4,33167366000706, 2,03976172902330) \\
 E' &= (5,89285779760866, 4,15459839996308)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 218. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-4, -4)$ y con el vértice $A = (-2, -3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 86° alrededor del punto $P = (-6, 4)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

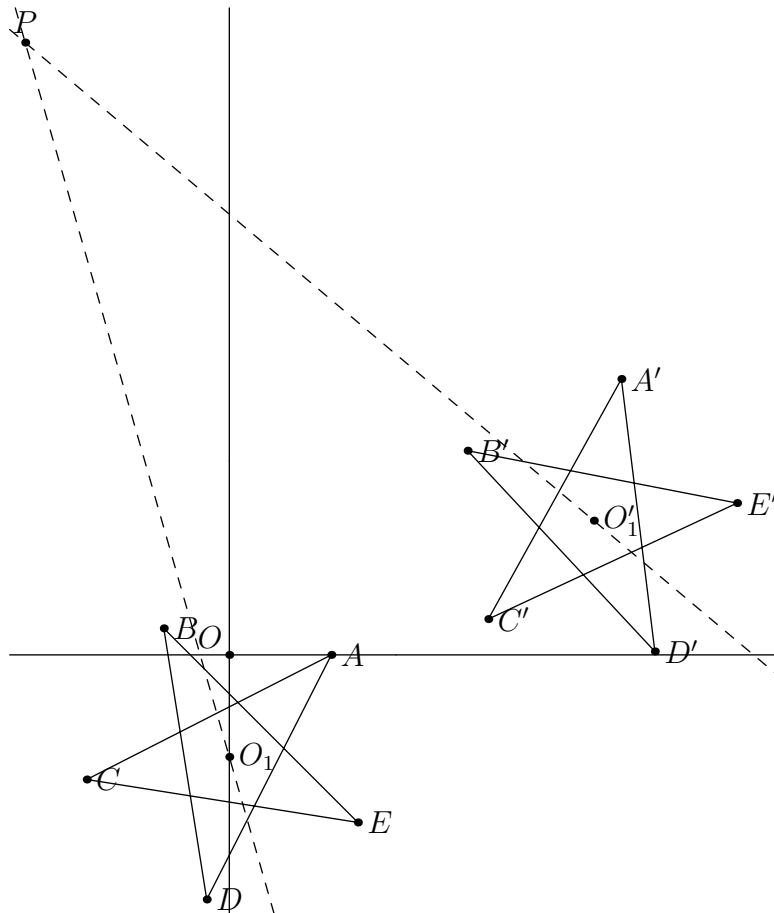
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2, -3) \\
 B &= (-4,33302252754526, -1,78886997303475) \\
 C &= (-6,20581924104237, -3,63344648979000) \\
 D &= (-5,03024873645742, -5,98458749895989) \\
 E &= (-2,43090949495495, -5,59309603821536) \\
 A' &= (1,26197424679527, 7,50196088483042) \\
 B' &= (-0,108948952982643, 5,25910564283168) \\
 C' &= (1,60049457331274, 3,26219981464215) \\
 D' &= (4,02791197418968, 4,27089938248700) \\
 E' &= (3,81869490651917, 6,89121582804198)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 219. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, -1)$ y con el vértice $A = (1, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 34° alrededor del punto $P = (-2, 6)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

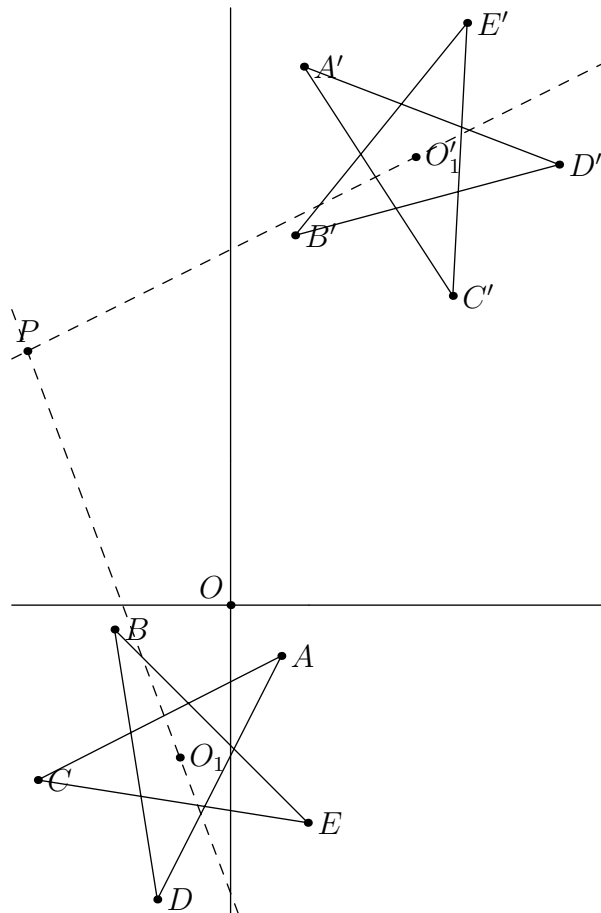
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, 0) \\
 B &= (-0,642039521920206, 0,260073510670101) \\
 C &= (-1,39680224666742, -1,22123174208247) \\
 D &= (-0,221231742082475, -2,39680224666742) \\
 E &= (1,26007351067010, -1,64203952192021) \\
 A' &= (3,84227013848961, 2,70335327508199) \\
 B' &= (2,33552641764999, 2,00074713917752) \\
 C' &= (2,53813514568371, 0,350631468739606) \\
 D' &= (4,17009794686555, 0,0334100349446231) \\
 E' &= (4,97609769833769, 1,48747207733726)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 220. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-1, -3)$ y con el vértice $A = (1, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 96° alrededor del punto $P = (-4, 5)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

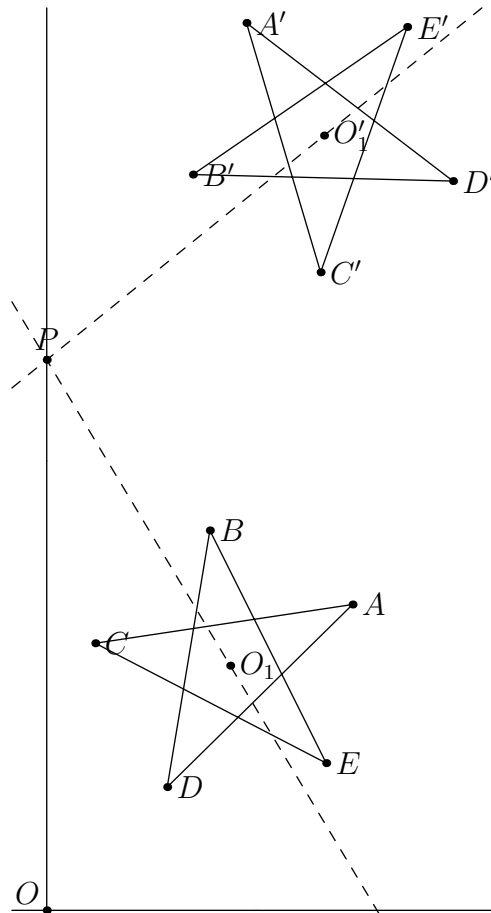
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, -1) \\
 B &= (-2,28407904384041, -0,479852978659798) \\
 C &= (-3,79360449333484, -3,44246348416495) \\
 D &= (-1,44246348416495, -5,79360449333484) \\
 E &= (1,52014702134020, -4,28407904384041) \\
 A' &= (1,44448905587137, 10,5997802564473) \\
 B' &= (1,27047119004010, 7,27932157241396) \\
 C' &= (4,37464058071210, 6,08774258467717) \\
 D' &= (6,46714063681573, 8,67176495400897) \\
 E' &= (4,65620740227683, 11,4603575936828)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 221. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (3, 4)$ y con el vértice $A = (5, 5)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 98° alrededor del punto $P = (0, 9)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

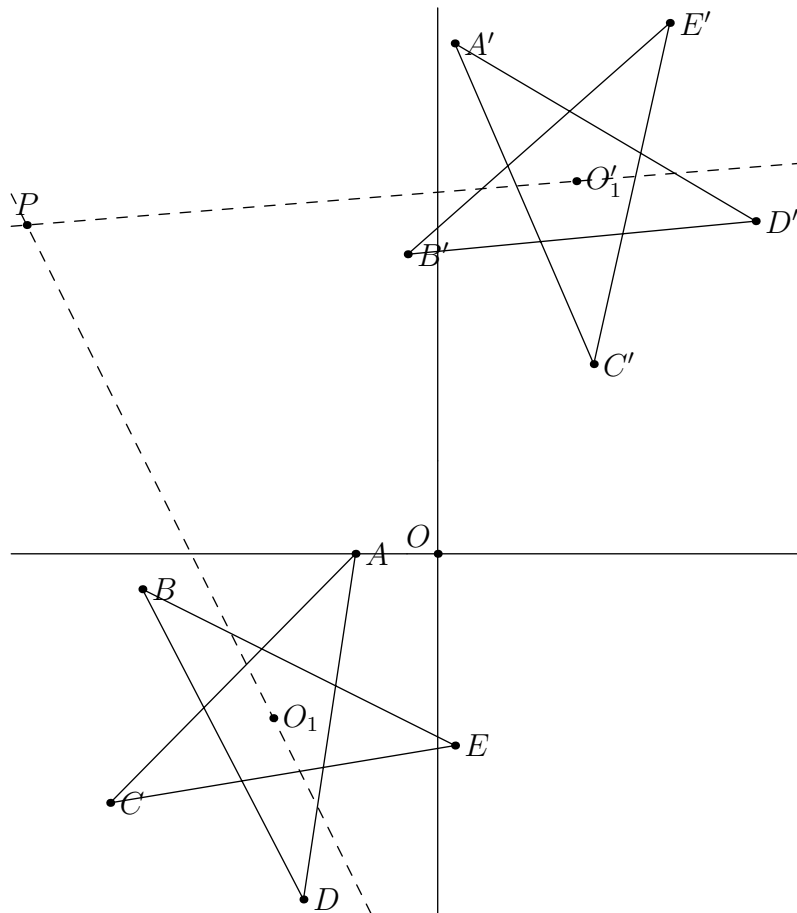
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (5, 5) \\
 B &= (2,66697747245474, 6,21113002696525) \\
 C &= (0,794180758957632, 4,36655351021000) \\
 D &= (1,96975126354258, 2,01541250104011) \\
 E &= (4,56909050504505, 2,40690396178464) \\
 A' &= (3,26520677016596, 14,5080327475481) \\
 B' &= (2,39055735713631, 12,0291583133467) \\
 C' &= (4,47782550811480, 10,4313029625213) \\
 D' &= (6,64247758208430, 11,9226484808067) \\
 E' &= (5,89303798663691, 14,4422060509024)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 222. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-2, -2)$ y con el vértice $A = (-1, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 68° alrededor del punto $P = (-5, 4)$ en sentido positivo.

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

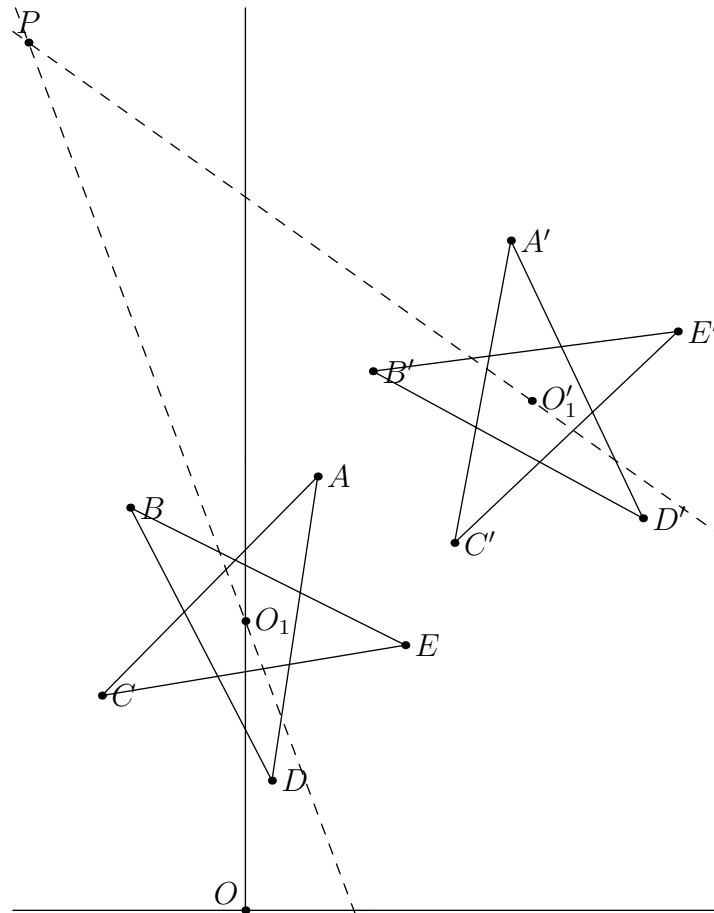
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-1, 0) \\
 B &= (-3,59309603821536, -0,430909494954952) \\
 C &= (-3,98458749895989, -3,03024873645742) \\
 D &= (-1,63344648979000, -4,20581924104237) \\
 E &= (0,211130026965254, -2,33302252754526) \\
 A' &= (0,207161791930798, 6,21030904460350) \\
 B' &= (-0,364696754843597, 3,64461072665347) \\
 C' &= (1,89871333995844, 2,30789654665883) \\
 D' &= (3,86943625580012, 4,04746006812823) \\
 E' &= (2,82399990539654, 6,45928362998041)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 223. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, 4)$ y con el vértice $A = (1, 6)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 34° alrededor del punto $P = (-3, 12)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

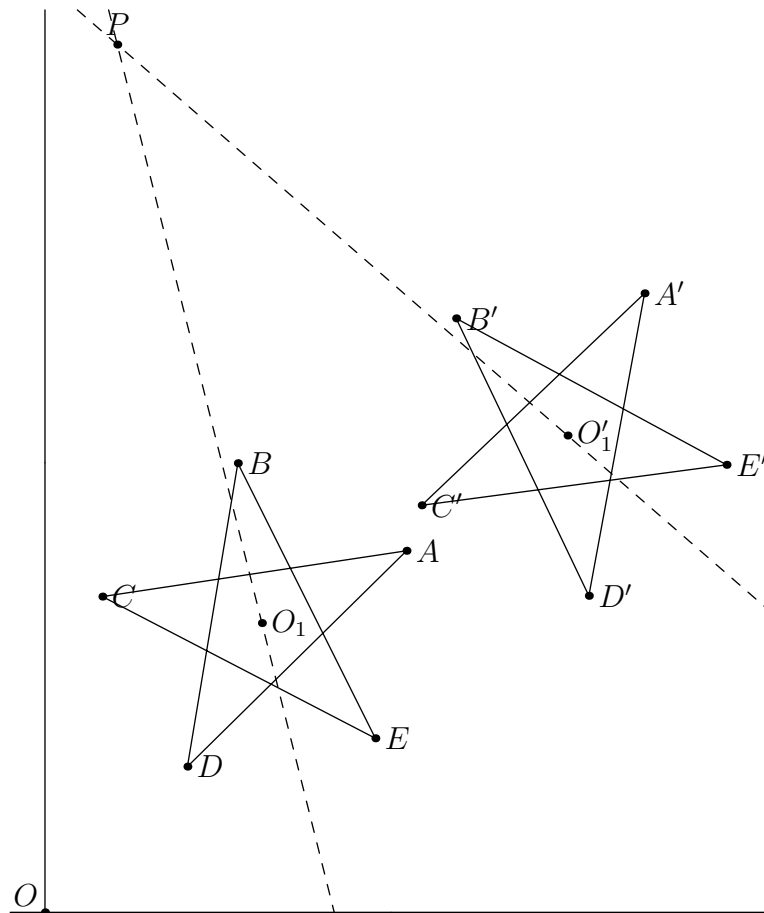
Solución:

$A = (1, 6)$
 $B = (-1,59309603821536, 5,56909050504505)$
 $C = (-1,98458749895989, 2,96975126354258)$
 $D = (0,366553510209998, 1,79418075895763)$
 $E = (2,21113002696525, 3,66697747245474)$
 $A' = (3,67130771104465, 9,26254617855274)$
 $B' = (1,76249519773746, 7,45526511427623)$
 $C' = (2,89146612500700, 5,08139597263622)$
 $D' = (5,49802104367725, 5,42154522253466)$
 $E' = (5,97998964968914, 8,00563816185969)$

◇

Ejercicio 224. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (3, 4)$ y con el vértice $A = (5, 5)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 35° alrededor del punto $P = (1, 12)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

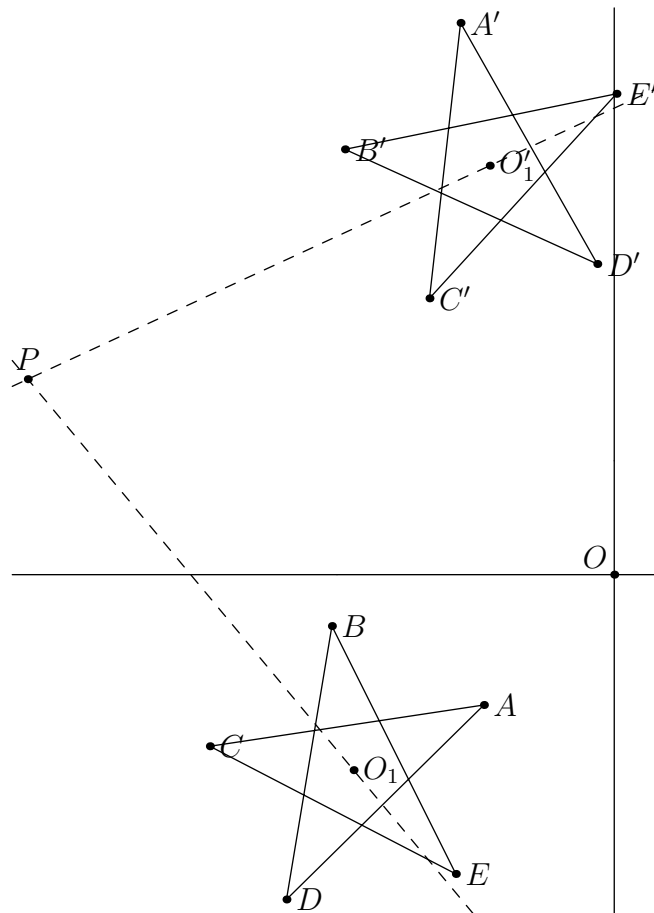
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (5, 5) \\
 B &= (2,66697747245474, 6,21113002696525) \\
 C &= (0,794180758957632, 4,36655351021000) \\
 D &= (1,96975126354258, 2,01541250104011) \\
 E &= (4,56909050504505, 2,40690396178464) \\
 A' &= (8,29164323161329, 8,56024143538124) \\
 B' &= (5,68586741397784, 8,21417432559349) \\
 C' &= (5,20976778263629, 5,62899363610833) \\
 D' &= (7,52129784607136, 4,37733121273437) \\
 E' &= (9,42600162263298, 6,18894198213335)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 225. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-4, -3)$ y con el vértice $A = (-2, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 75° alrededor del punto $P = (-9, 3)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

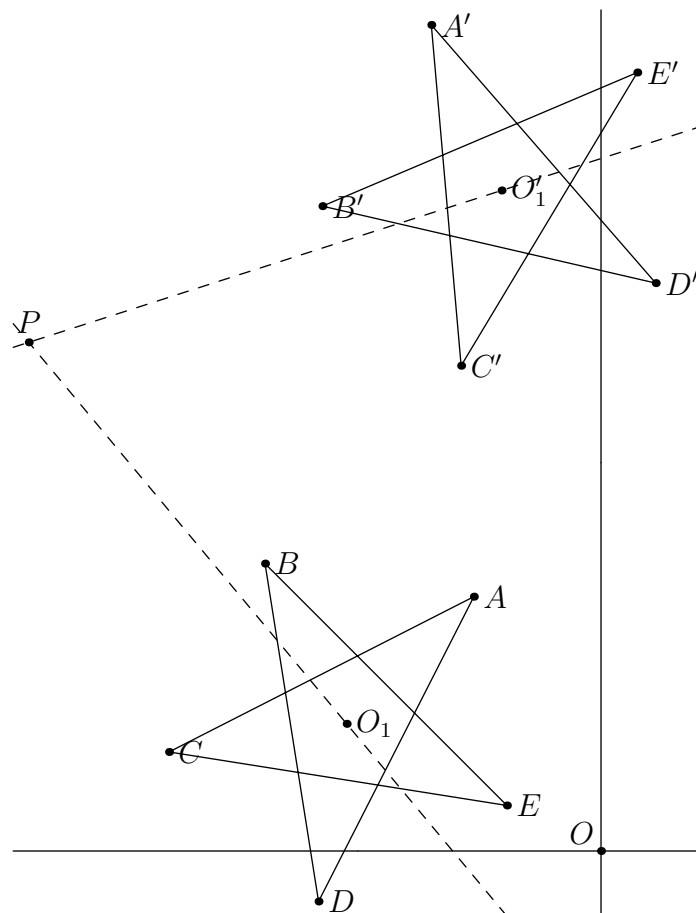
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2, -2) \\
 B &= (-4,33302252754526, -0,788869973034745) \\
 C &= (-6,20581924104237, -2,63344648979000) \\
 D &= (-5,03024873645742, -4,98458749895989) \\
 E &= (-2,43090949495495, -4,59309603821536) \\
 A' &= (-2,35863755283701, 8,46738555851088) \\
 B' &= (-4,13232998765886, 6,52732236291485) \\
 C' &= (-2,83532134861709, 4,24092811727357) \\
 D' &= (-0,260033491165185, 4,76792195738111) \\
 E' &= (0,0345732965132175, 7,38001630807068)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 226. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-4, 2)$ y con el vértice $A = (-2, 4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 68° alrededor del punto $P = (-9, 8)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad de Ingeniería y Arquitectura Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

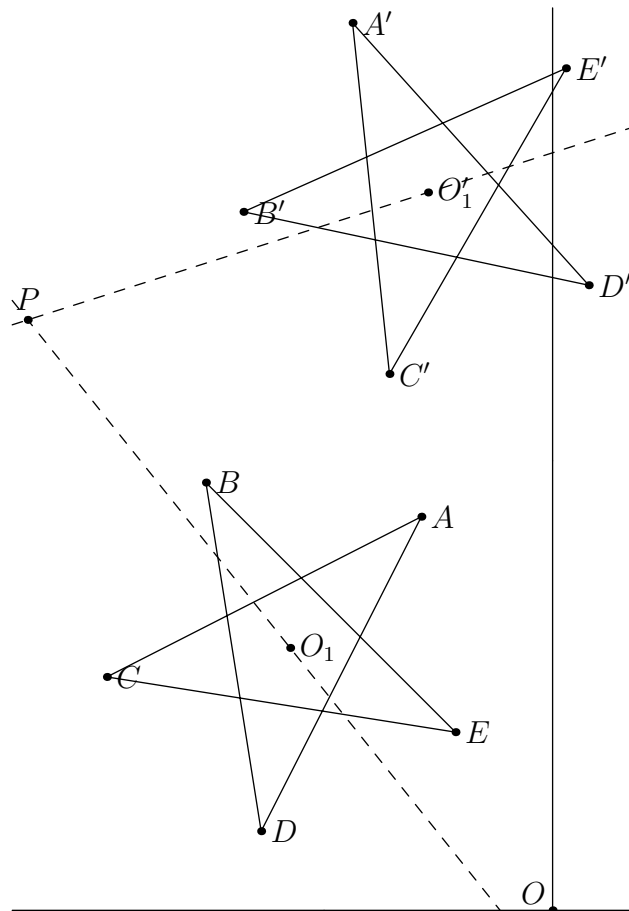
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2, 4) \\
 B &= (-5,28407904384041, 4,52014702134020) \\
 C &= (-6,79360449333484, 1,55753651583505) \\
 D &= (-4,44246348416495, -0,793604493334841) \\
 E &= (-1,47985297865980, 0,715920956159586) \\
 A' &= (-2,66901842782147, 12,9918606083039) \\
 B' &= (-4,38152801113075, 10,1417660454736) \\
 C' &= (-2,20012156936616, 7,63234499155920) \\
 D' &= (0,860571338231612, 8,93153205098580) \\
 E' &= (0,570777142488185, 12,2438948653699)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 227. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-4, 4)$ y con el vértice $A = (-2, 6)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 69° alrededor del punto $P = (-8, 9)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

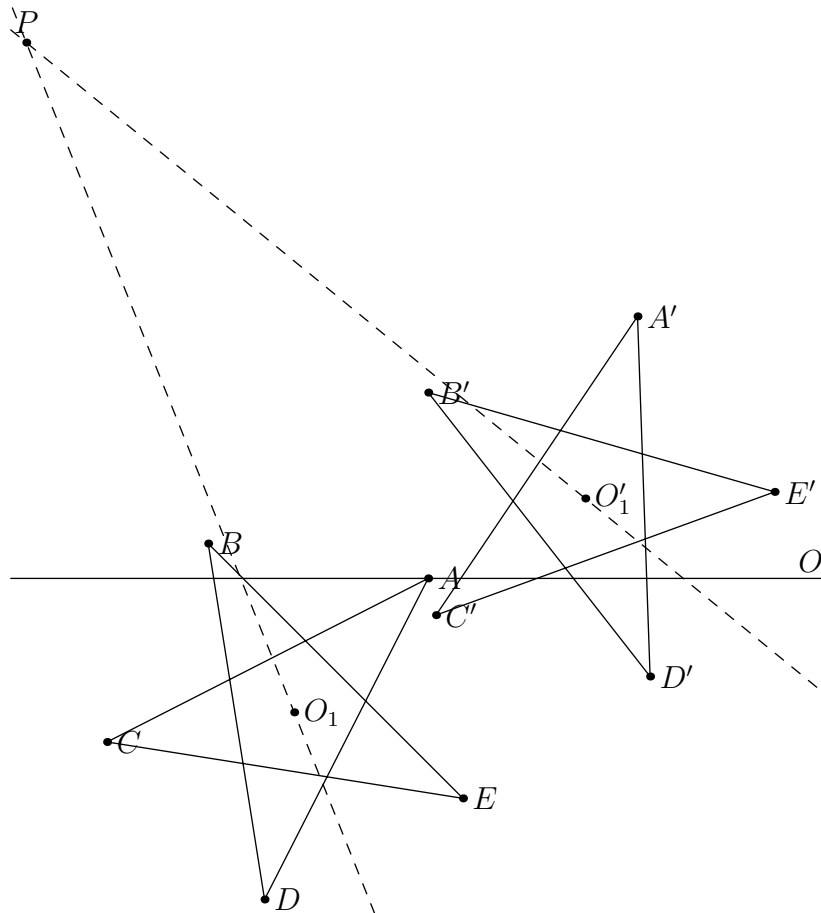
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2, 6) \\
 B &= (-5, 28407904384041, 6, 52014702134020) \\
 C &= (-6, 79360449333484, 3, 55753651583505) \\
 D &= (-4, 44246348416495, 1, 20639550666516) \\
 E &= (-1, 47985297865980, 2, 71592095615959) \\
 A' &= (-3, 04905102323659, 13, 5263787103473) \\
 B' &= (-4, 71155877434641, 10, 6468308174480) \\
 C' &= (-2, 48668913519358, 8, 17586275234140) \\
 D' &= (0, 550863673450387, 9, 52826839588921) \\
 E' &= (0, 203304912662244, 12, 8350691152856)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 228. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-4, -1)$ y con el vértice $A = (-3, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 29° alrededor del punto $P = (-6, 4)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

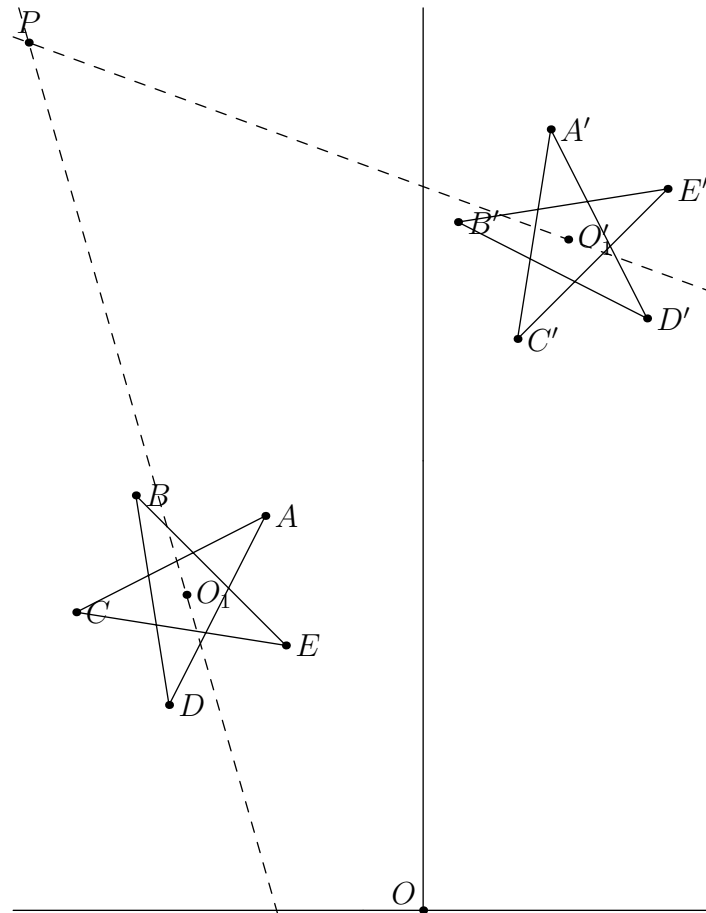
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-3, 0) \\
 B &= (-4,64203952192021, 0,260073510670101) \\
 C &= (-5,39680224666742, -1,22123174208247) \\
 D &= (-4,22123174208247, -2,39680224666742) \\
 E &= (-2,73992648932990, -1,64203952192021) \\
 A' &= (-1,43690239759646, 1,95595003218143) \\
 B' &= (-2,99914866331373, 1,38733889286681) \\
 C' &= (-2,94112797953599, -0,274156103440479) \\
 D' &= (-1,34302295919357, -0,732405343981655) \\
 E' &= (-0,413360422807854, 0,645876046352367)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 229. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, 4)$ y con el vértice $A = (-2, 5)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 54° alrededor del punto $P = (-5, 11)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

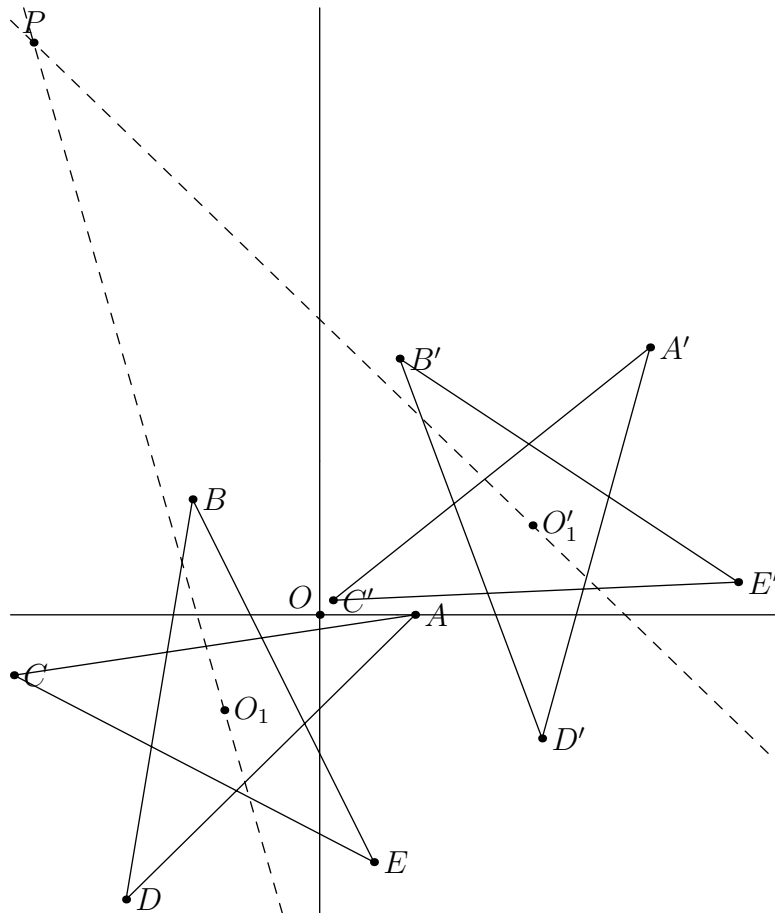
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2, 5) \\
 B &= (-3,64203952192021, 5,26007351067010) \\
 C &= (-4,39680224666742, 3,77876825791753) \\
 D &= (-3,22123174208247, 2,60319775333258) \\
 E &= (-1,73992648932990, 3,35796047807979) \\
 A' &= (1,61745772312711, 9,90033946937000) \\
 B' &= (0,441887218542159, 8,72476896478506) \\
 C' &= (1,19664994328937, 7,24346371203248) \\
 D' &= (2,83868946520958, 7,50353722270258) \\
 E' &= (3,09876297587968, 9,14557674462279)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 230. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-1, -1)$ y con el vértice $A = (1, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 30° alrededor del punto $P = (-3, 6)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

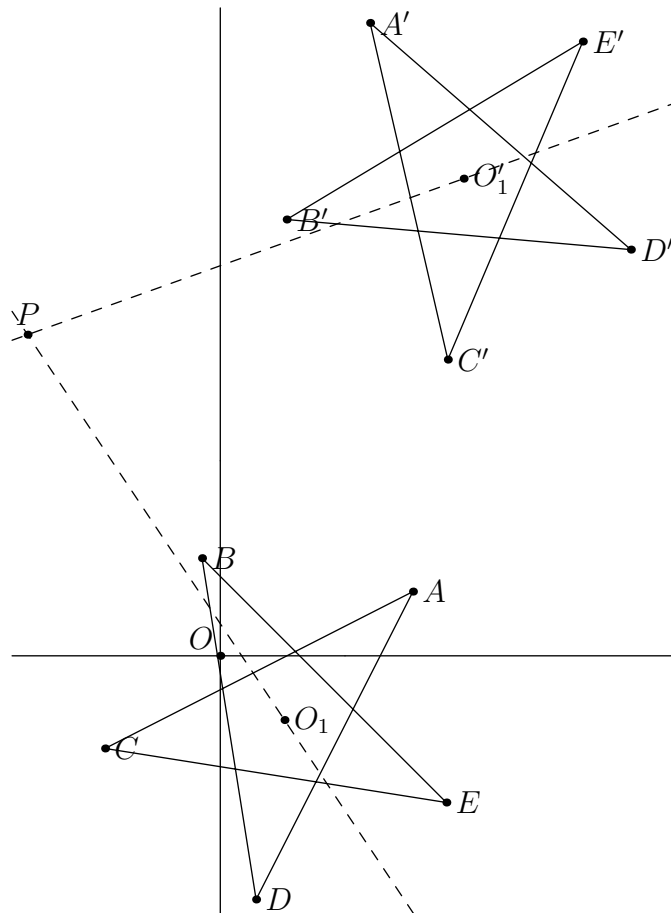
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, 0) \\
 B &= (-1,33302252754526, 1,21113002696525) \\
 C &= (-3,20581924104237, -0,633446489790001) \\
 D &= (-2,03024873645742, -2,98458749895989) \\
 E &= (0,569090505045048, -2,59309603821536) \\
 A' &= (3,46410161513775, 2,80384757729337) \\
 B' &= (0,838079825199553, 2,68620568415878) \\
 C' &= (0,138478553564677, 0,152357204675963) \\
 D' &= (2,33212297905988, -1,29600538485207) \\
 E' &= (4,38747106488252, 0,342705786268607)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 231. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (1, -1)$ y con el vértice $A = (3, 1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 76° alrededor del punto $P = (-3, 5)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

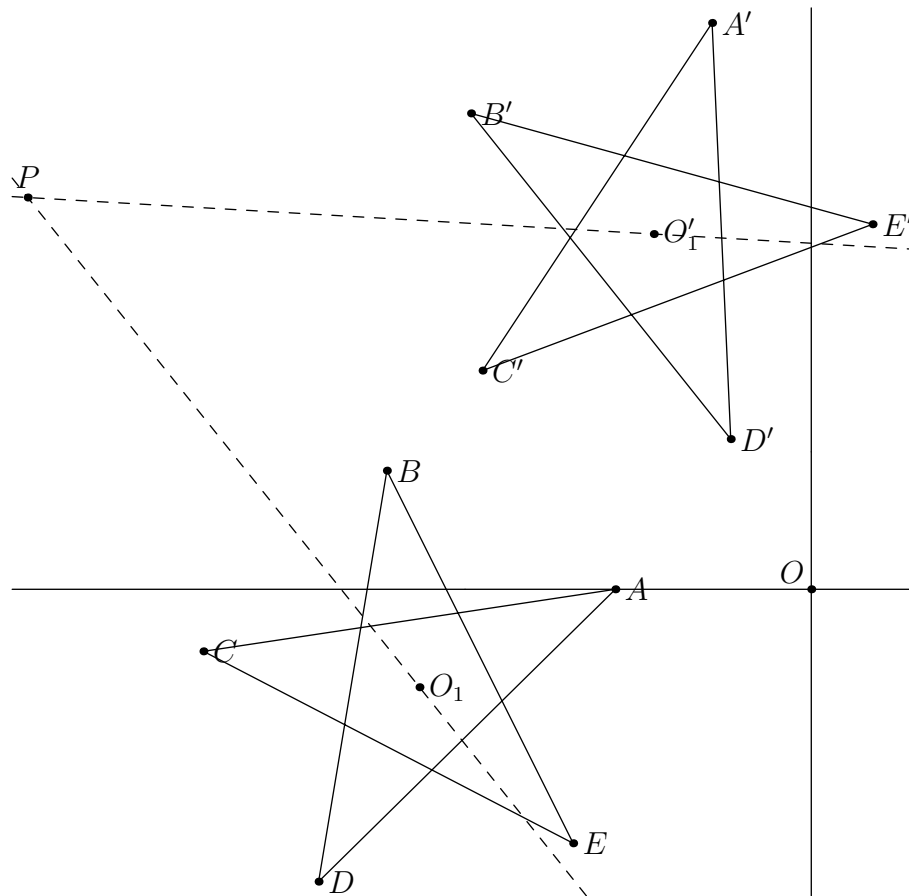
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (3, 1) \\
 B &= (-0,284079043840412, 1,52014702134020) \\
 C &= (-1,79360449333484, -1,44246348416495) \\
 D &= (0,557536515835051, -3,79360449333484) \\
 E &= (3,52014702134020, -2,28407904384041) \\
 A' &= (2,33271427870199, 9,85408677525731) \\
 B' &= (1,03352721927539, 6,79339386765954) \\
 C' &= (3,54294827318977, 4,61198742589495) \\
 D' &= (6,39304283602005, 6,32449700920423) \\
 E' &= (5,64507709308605, 9,56429257951388)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 232. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-4, -1)$ y con el vértice $A = (-2, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 48° alrededor del punto $P = (-8, 4)$ en sentido positivo.

Leandro Marín  Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

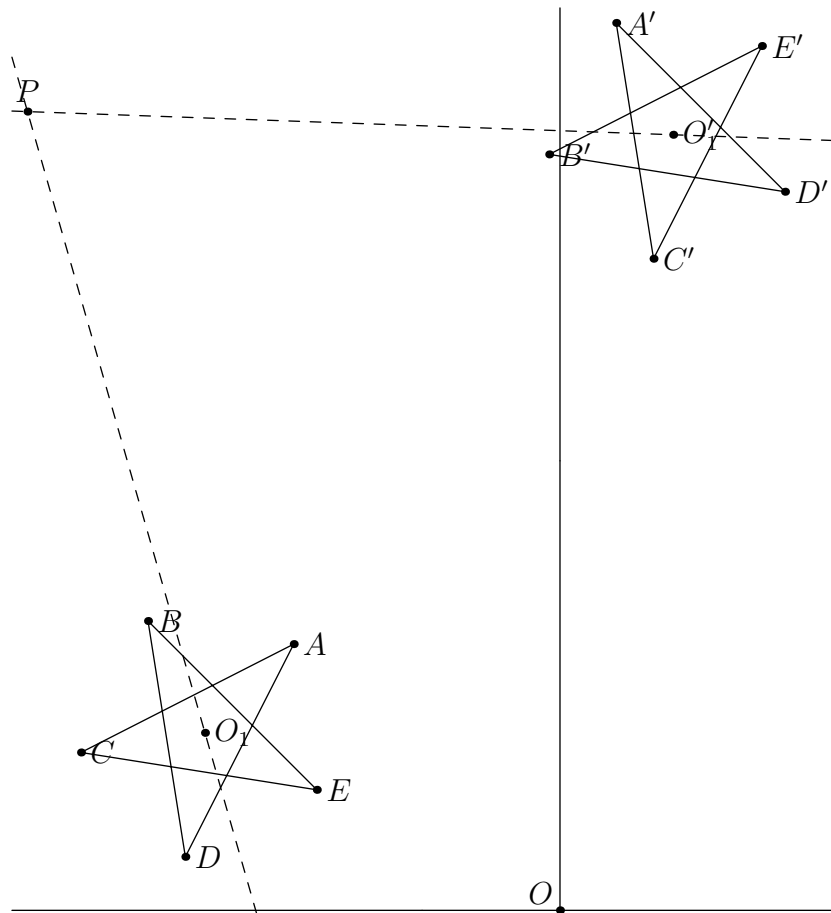
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2, 0) \\
 B &= (-4,33302252754526, 1,21113002696525) \\
 C &= (-6,20581924104237, -0,633446489790001) \\
 D &= (-5,03024873645742, -2,98458749895989) \\
 E &= (-2,43090949495495, -2,59309603821536) \\
 A' &= (-1,01263705993727, 5,78234652742893) \\
 B' &= (-3,47377885096203, 4,85897707768416) \\
 C' &= (-3,35613695782745, 2,23295528774596) \\
 D' &= (-0,822288478344630, 1,53335401611108) \\
 E' &= (0,626074111183405, 3,72699844160628)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 233. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-4, 2)$ y con el vértice $A = (-3, 3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 72° alrededor del punto $P = (-6, 9)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

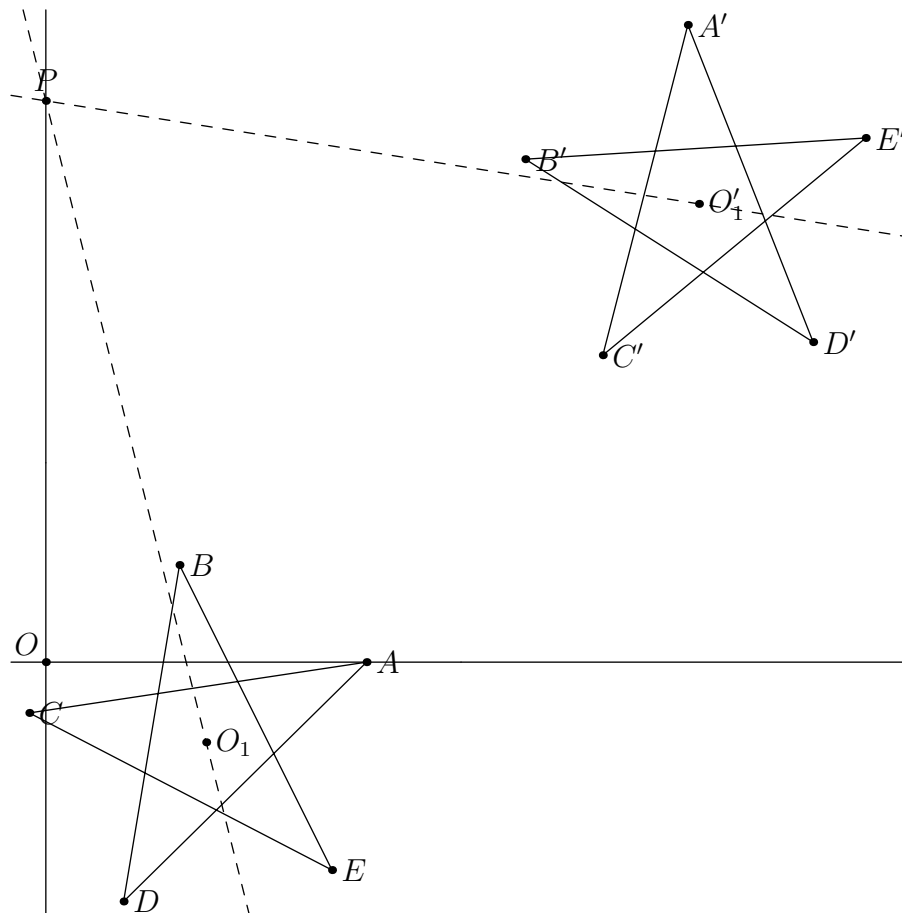
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-3, 3) \\
 B &= (-4,64203952192021, 3,26007351067010) \\
 C &= (-5,39680224666742, 1,77876825791753) \\
 D &= (-4,22123174208247, 0,603197753332579) \\
 E &= (-2,73992648932990, 1,35796047807979) \\
 A' &= (0,633390080895763, 9,99906758263578) \\
 B' &= (-0,121372643851452, 8,51776232988320) \\
 C' &= (1,05419786073349, 7,34219182529826) \\
 D' &= (2,53550311348607, 8,09695455004547) \\
 E' &= (2,27542960281597, 9,73899407196568)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 234. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, -1)$ y con el vértice $A = (4, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 67° alrededor del punto $P = (0, 7)$ en sentido positivo.

Leandro Marín Facultad de Ingeniería y Arquitectura Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

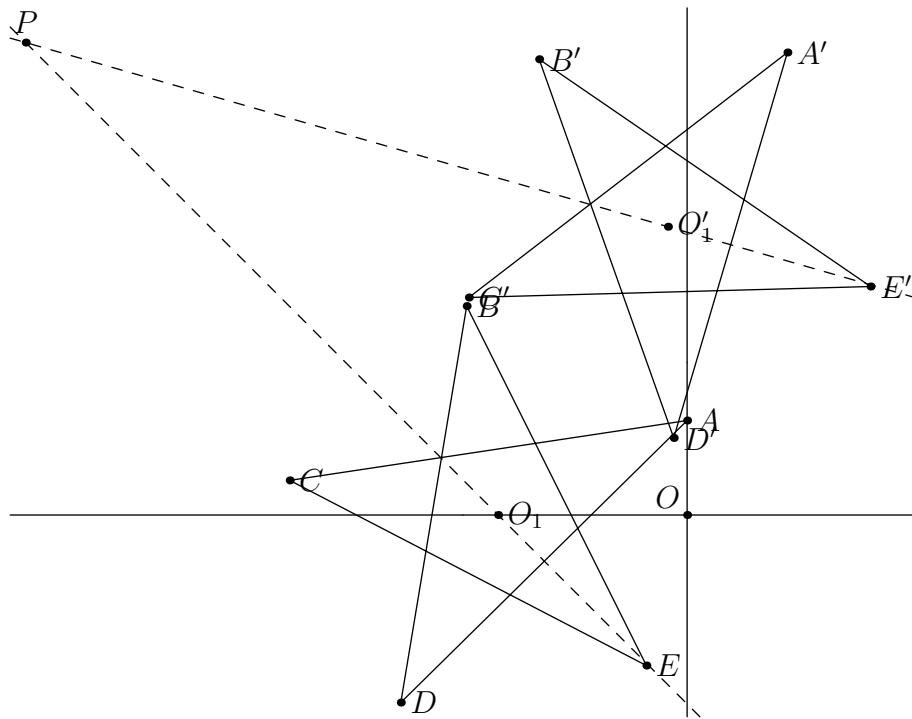
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (4, 0) \\
 B &= (1,66697747245474, 1,21113002696525) \\
 C &= (-0,205819241042368, -0,633446489790001) \\
 D &= (0,969751263542579, -2,98458749895989) \\
 E &= (3,56909050504505, -2,59309603821536) \\
 A' &= (8,00645848812418, 7,94690151438485) \\
 B' &= (5,98002289516202, 6,27256915674893) \\
 C' &= (6,94620455810390, 3,82791722846847) \\
 D' &= (9,56977325807104, 3,99137160376409) \\
 E' &= (10,2250462235292, 6,53704389158712)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 235. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-2, 0)$ y con el vértice $A = (0, 1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 29° alrededor del punto $P = (-7, 5)$ en sentido positivo.

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

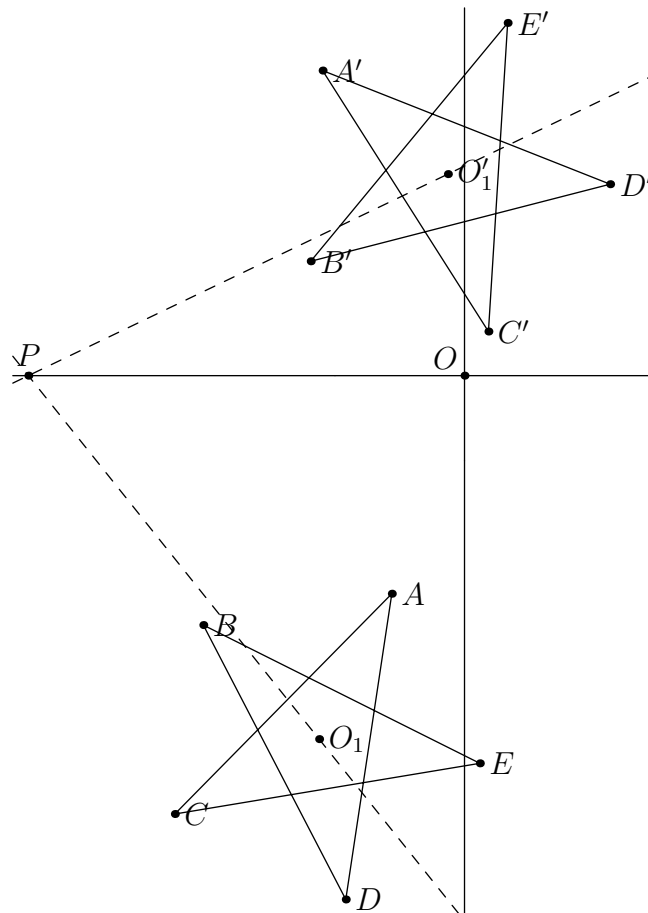
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, 1) \\
 B &= (-2,33302252754526, 2,21113002696525) \\
 C &= (-4,20581924104237, 0,366553510209999) \\
 D &= (-3,03024873645742, -1,98458749895989) \\
 E &= (-0,430909494954951, -1,59309603821536) \\
 A' &= (1,06157643096112, 4,89518851316678) \\
 B' &= (-1,56609853727209, 4,82339493705349) \\
 C' &= (-2,30981500975913, 2,30214210070368) \\
 D' &= (-0,141782099516085, 0,815715729720707) \\
 E' &= (1,94185240022950, 2,41830654702888)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 236. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-2, -5)$ y con el vértice $A = (-1, -3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se gira la estrella un ángulo de 77° alrededor del punto $P = (-6, 0)$ en sentido positivo.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

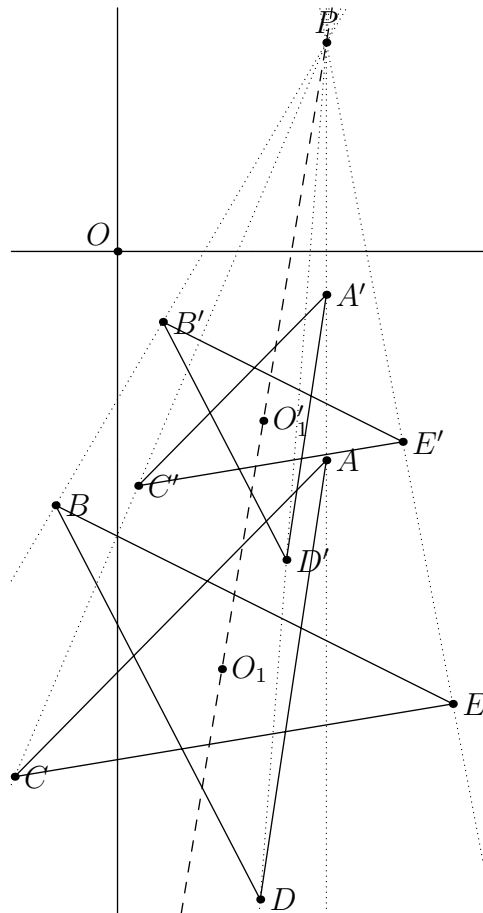
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-1, -3) \\
 B &= (-3,59309603821536, -3,43090949495495) \\
 C &= (-3,98458749895989, -6,03024873645742) \\
 D &= (-1,63344648979000, -7,20581924104237) \\
 E &= (0,211130026965254, -5,33302252754526) \\
 A' &= (-1,95213453392497, 4,19699716089458) \\
 B' &= (-2,11558890922058, 1,57342846092745) \\
 C' &= (0,329063019059880, 0,607246797985564) \\
 D' &= (2,00339537669579, 2,63368239094772) \\
 E' &= (0,593537753898065, 4,85227012635276)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 237. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (1, -4)$ y con el vértice $A = (2, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,603694515235052$ centrada en el punto $P = (2, 2)$.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

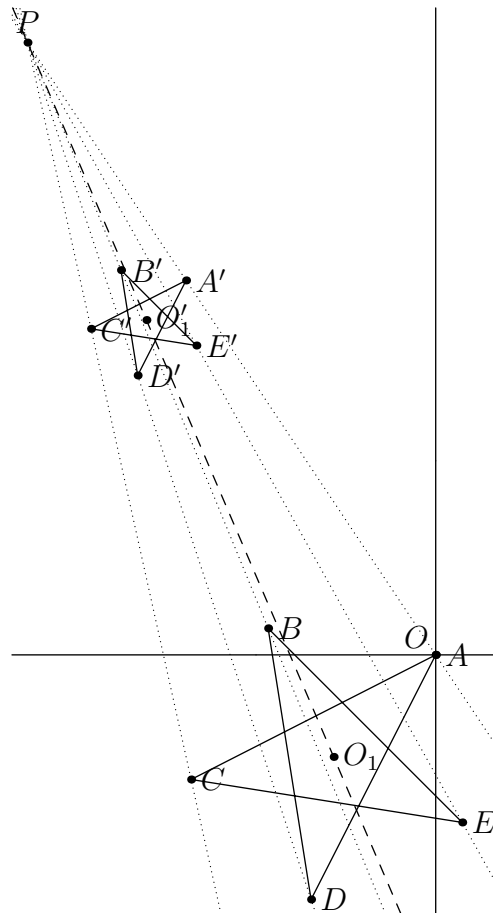
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (2, -2) \\
 B &= (-0,593096038215360, -2,43090949495495) \\
 C &= (-0,984587498959894, -5,03024873645742) \\
 D &= (1,36655351021000, -6,20581924104237) \\
 E &= (3,21113002696525, -4,33302252754526) \\
 A' &= (2,00000000000000, -0,414778060940207) \\
 B' &= (0,434562144251645, -0,674915759607217) \\
 C' &= (0,198220896638811, -2,24412260293750) \\
 D' &= (1,61759182841888, -2,95380806882753) \\
 E' &= (2,73115255451540, -1,82321096473910)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 238. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-1, -1)$ y con el vértice $A = (0, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,388439188830577$ centrada en el punto $P = (-4, 6)$.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

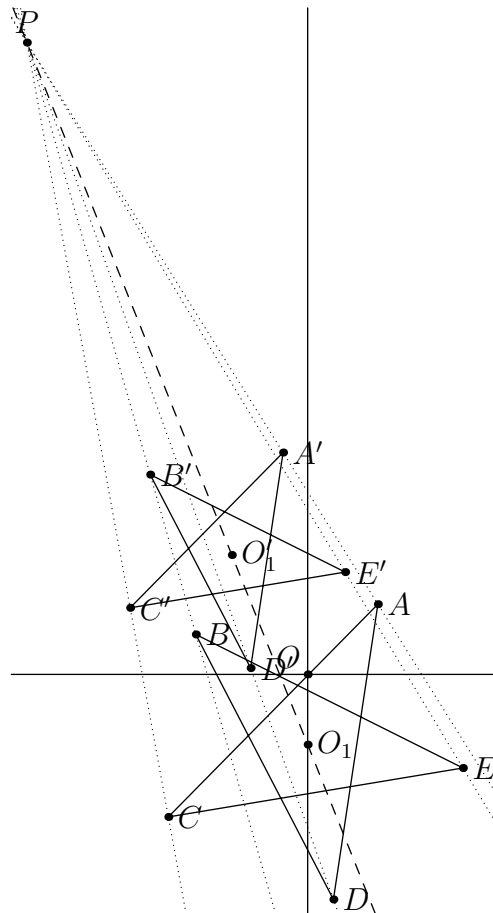
Solución:

$A = (0, 0)$
 $B = (-1,64203952192021, 0,260073510670101)$
 $C = (-2,39680224666742, -1,22123174208247)$
 $D = (-1,22123174208247, -2,39680224666742)$
 $E = (0,260073510670101, -1,64203952192021)$
 $A' = (-2,44624324467769, 3,66936486701654)$
 $B' = (-3,08407574460013, 3,77038761053755)$
 $C' = (-3,37725516516049, 3,19499059974787)$
 $D' = (-2,92061751194636, 2,73835294653374)$
 $E' = (-2,34522050115668, 3,03153236709410)$

◇

Ejercicio 239. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, -1)$ y con el vértice $A = (1, 1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,729939000392457$ centrada en el punto $P = (-4, 9)$.

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

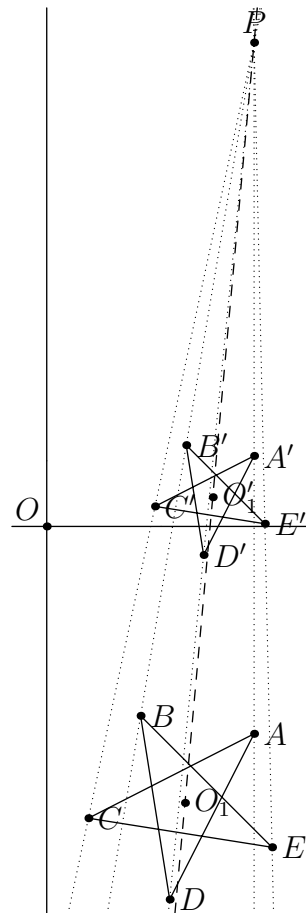
Solución:

$A = (1, 1)$
 $B = (-1,59309603821536, 0,569090505045048)$
 $C = (-1,98458749895989, -2,03024873645742)$
 $D = (0,366553510209999, -3,20581924104237)$
 $E = (2,21113002696525, -1,33302252754526)$
 $A' = (-0,350304998037715, 3,16048799686034)$
 $B' = (-2,24310692809427, 2,84595035085331)$
 $C' = (-2,52887181361232, 0,948591263230107)$
 $D' = (-0,812682295597139, 0,0904965042225148)$
 $E' = (0,533746043190592, 1,45752386521087)$

◇

Ejercicio 240. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, -4)$ y con el vértice $A = (3, -3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,597954803257559$ centrada en el punto $P = (3, 7)$.

Leandro Marín Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

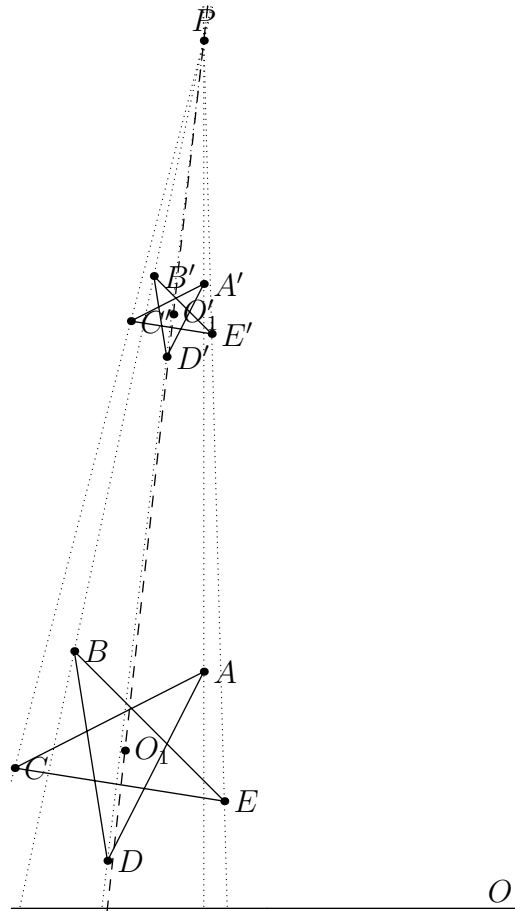
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (3, -3) \\
 B &= (1,35796047807979, -2,73992648932990) \\
 C &= (0,603197753332580, -4,22123174208247) \\
 D &= (1,77876825791753, -5,39680224666742) \\
 E &= (3,26007351067010, -4,64203952192021) \\
 A' &= (3,00000000000000, 1,02045196742441) \\
 B' &= (2,01813458072907, 1,17596417232966) \\
 C' &= (1,56682058414671, 0,290210581355602) \\
 D' &= (2,26975861393119, -0,412727448428879) \\
 E' &= (3,15551220490524, 0,0385865481534808)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 241. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-5, 2)$ y con el vértice $A = (-4, 3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,385627589966684$ centrada en el punto $P = (-4, 11)$.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

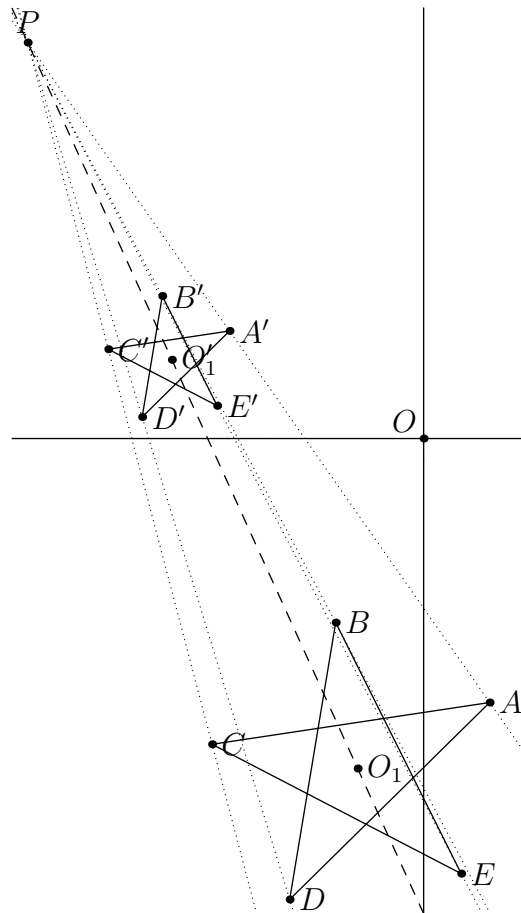
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-4, 3) \\
 B &= (-5,64203952192021, 3,26007351067010) \\
 C &= (-6,39680224666742, 1,77876825791753) \\
 D &= (-5,22123174208247, 0,603197753332580) \\
 E &= (-3,73992648932990, 1,35796047807979) \\
 A' &= (-4,00000000000000, 7,91497928026653) \\
 B' &= (-4,63321574346813, 8,01527080140042) \\
 C' &= (-4,92427307400909, 7,44403862677645) \\
 D' &= (-4,47094065349008, 6,99070620625744) \\
 E' &= (-3,89970847886612, 7,28176353679840)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 242. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-1, -5)$ y con el vértice $A = (1, -4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,436966586790037$ centrada en el punto $P = (-6, 6)$.

Leandro Marín Facultad de Ingeniería Universidad de Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

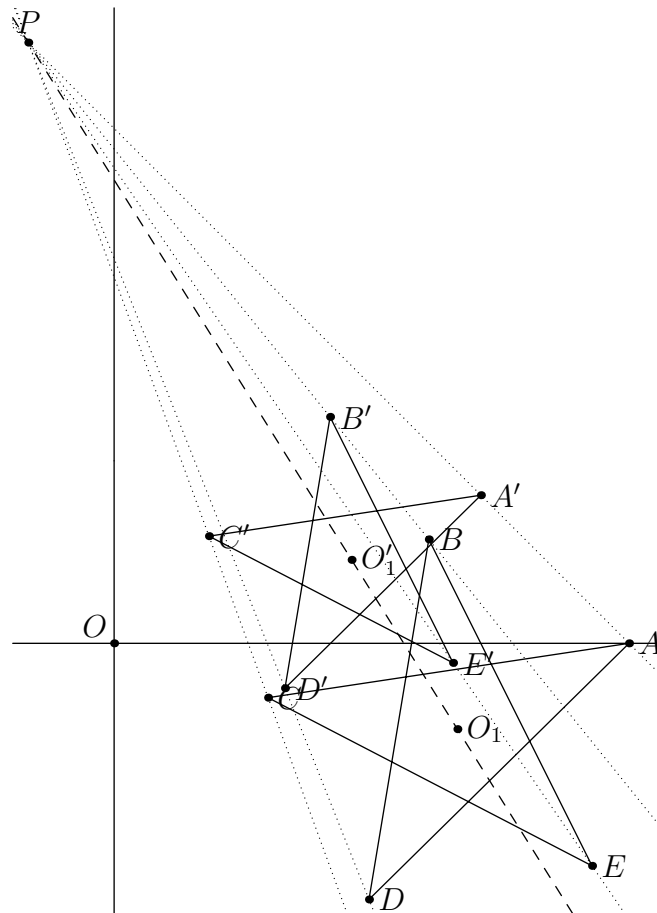
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, -4) \\
 B &= (-1,33302252754526, -2,78886997303475) \\
 C &= (-3,20581924104237, -4,63344648979000) \\
 D &= (-2,03024873645742, -6,98458749895989) \\
 E &= (0,569090505045049, -6,59309603821536) \\
 A' &= (-2,94123389246974, 1,63033413209963) \\
 B' &= (-3,96068678323546, 2,15955748614156) \\
 C' &= (-4,77903637088389, 1,35353918154196) \\
 D' &= (-4,26535133996436, 0,326169119702912) \\
 E' &= (-3,12952694369562, 0,497237807061897)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 243. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (4, -1)$ y con el vértice $A = (6, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,753437796533478$ centrada en el punto $P = (-1, 7)$.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

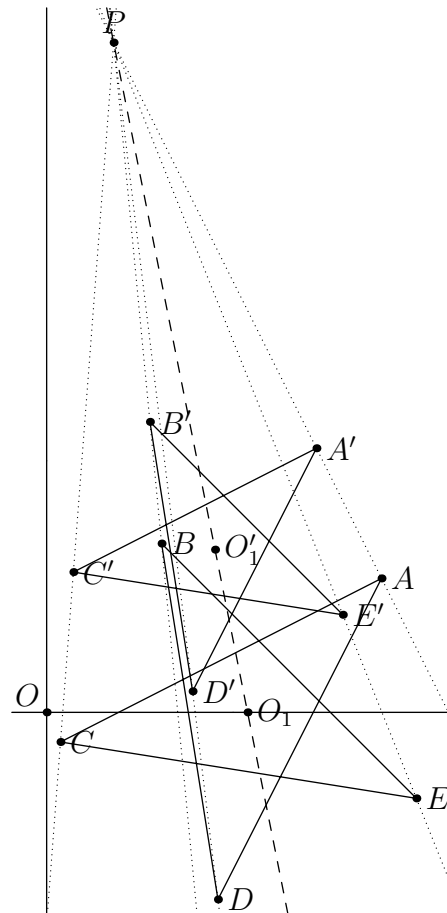
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (6, 0) \\
 B &= (3,66697747245474, 1,21113002696525) \\
 C &= (1,79418075895763, -0,633446489790002) \\
 D &= (2,96975126354258, -2,98458749895989) \\
 E &= (5,56909050504505, -2,59309603821536) \\
 A' &= (4,27406457573434, 1,72593542426566) \\
 B' &= (2,51627722331768, 2,63844656309789) \\
 C' &= (1,10524139414528, 1,24867289677641) \\
 D' &= (1,99096064478951, -0,522765604512050) \\
 E' &= (3,94940107535013, -0,227801140967016)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 244. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (3, 0)$ y con el vértice $A = (5, 2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,757092990932546$ centrada en el punto $P = (1, 10)$.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

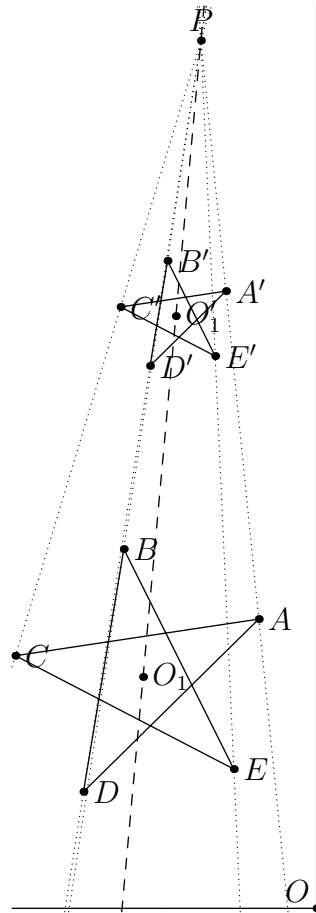
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (5, 2) \\
 B &= (1,71592095615959, 2,52014702134020) \\
 C &= (0,206395506665159, -0,442463484164948) \\
 D &= (2,55753651583505, -2,79360449333484) \\
 E &= (5,52014702134020, -1,28407904384041) \\
 A' &= (4,02837196373018, 3,94325607253963) \\
 B' &= (1,54201873797015, 4,33705573665074) \\
 C' &= (0,399167600523617, 2,09408408806966) \\
 D' &= (2,17919997926022, 0,314051709333064) \\
 E' &= (4,42217162784129, 1,45690284677960)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 245. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, 4)$ y con el vértice $A = (-1, 5)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,433030001393994$ centrada en el punto $P = (-2, 15)$.

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

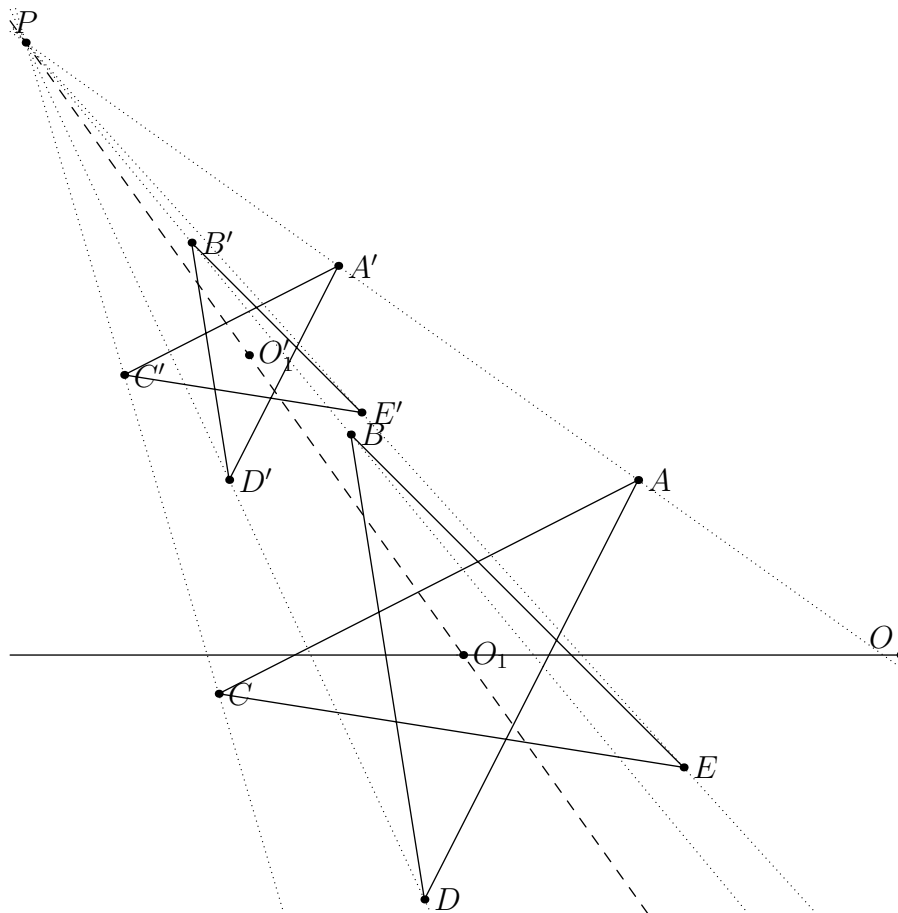
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-1, 5) \\
 B &= (-3,33302252754526, 6,21113002696525) \\
 C &= (-5,20581924104237, 4,36655351021000) \\
 D &= (-4,03024873645742, 2,01541250104011) \\
 E &= (-1,43090949495495, 2,40690396178464) \\
 A' &= (-1,56696999860601, 10,6696999860601) \\
 B' &= (-2,57723874696115, 11,1941556233251) \\
 C' &= (-3,38821591041747, 10,3953986517033) \\
 D' &= (-2,87915861317831, 9,37728405722496) \\
 E' &= (-1,75356673780703, 9,54681160501690)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 246. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-5, 0)$ y con el vértice $A = (-3, 2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,510358308354760$ centrada en el punto $P = (-10, 7)$.

Leandro Marín Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

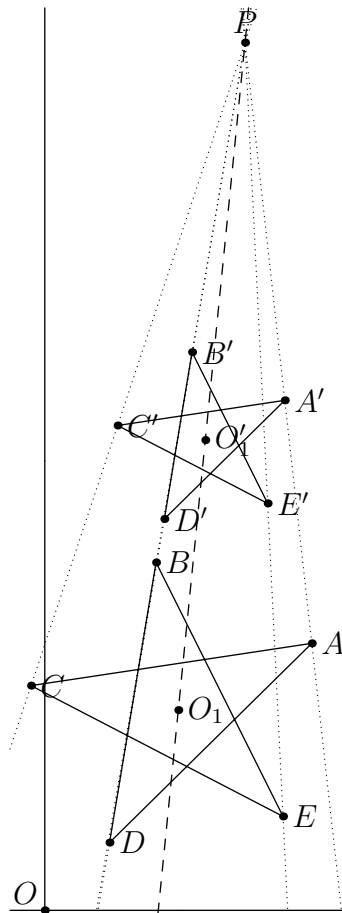
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-3, 2) \\
 B &= (-6,28407904384041, 2,52014702134020) \\
 C &= (-7,79360449333484, -0,442463484164949) \\
 D &= (-5,44246348416495, -2,79360449333484) \\
 E &= (-2,47985297865980, -1,28407904384041) \\
 A' &= (-6,42749184151668, 4,44820845822620) \\
 B' &= (-8,10354886683439, 4,71366981213315) \\
 C' &= (-8,87394772165683, 3,20167692622951) \\
 D' &= (-7,67402337351338, 2,00175257808606) \\
 E' &= (-6,16203048760973, 2,77215143290849)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 247. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, 3)$ y con el vértice $A = (4, 4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,595472118243338$ centrada en el punto $P = (3, 13)$.

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

Solución:

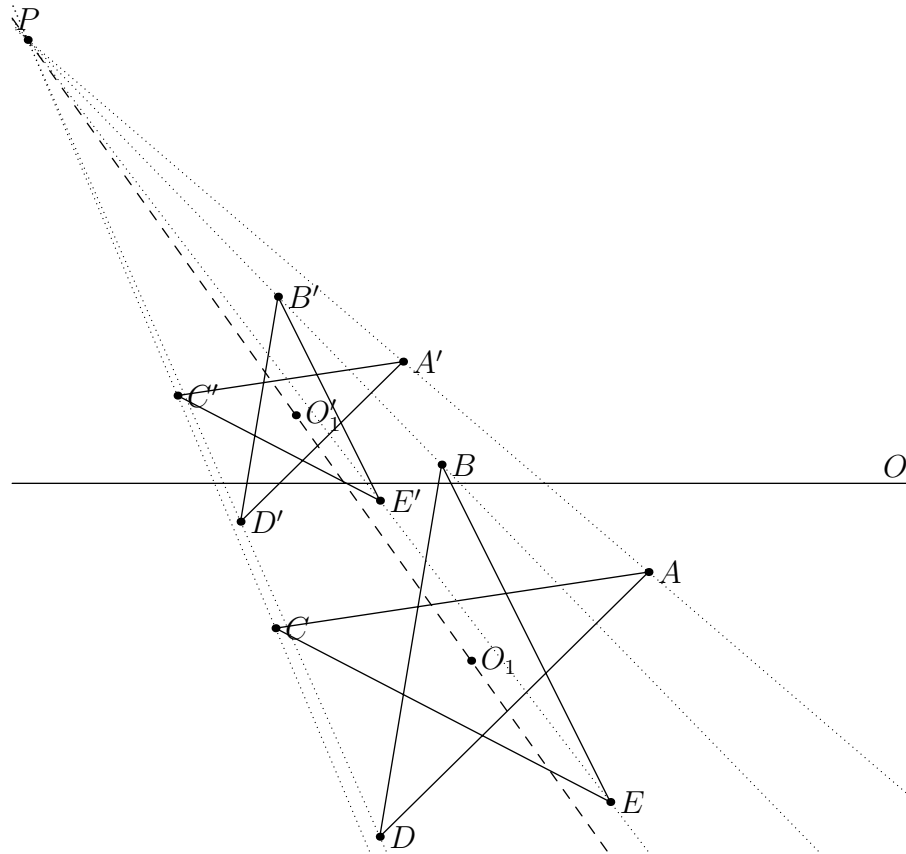
$$\begin{aligned}
 A &= (4, 4) \\
 B &= (1,66697747245474, 5,21113002696525) \\
 C &= (-0,205819241042368, 3,36655351021000) \\
 D &= (0,969751263542578, 1,01541250104011) \\
 E &= (3,56909050504505, 1,40690396178464) \\
 A' &= (3,59547211824334, 7,64075093580996) \\
 B' &= (2,20622225185654, 8,36194509843507) \\
 C' &= (1,09102402583125, 7,26355121274090) \\
 D' &= (1,79104348434084, 5,86351229572173) \\
 E' &= (3,33887752851135, 6,09663454512545)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 248. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-5, -2)$ y con el vértice $A = (-3, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura.

Leandro Marín Facultad de Ingeniería Universidad Mar del Plata	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
		Álgebra y Matemática Discreta	
		Aplicaciones Afines	

Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor 0,604613384792668 centrada en el punto $P = (-10, 5)$.



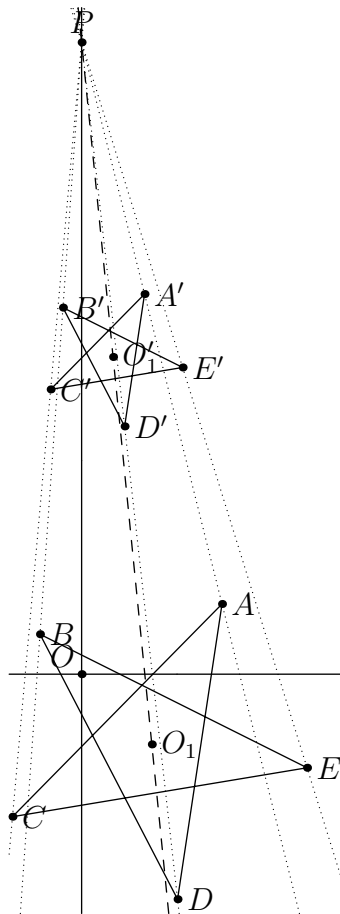
Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-3, -1) \\
 B &= (-5,33302252754526, 0,211130026965254) \\
 C &= (-7,20581924104237, -1,63344648979000) \\
 D &= (-6,03024873645742, -3,98458749895989) \\
 E &= (-3,43090949495495, -3,59309603821536) \\
 A' &= (-5,76770630645132, 1,37231969124399) \\
 B' &= (-7,17828295362801, 2,10458511627149) \\
 C' &= (-8,31060091360408, 0,989329464967023) \\
 D' &= (-7,59983525176455, -0,432201858712035) \\
 E' &= (-6,02823995473533, -0,195500881513857)
 \end{aligned}$$

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Ejercicio 249. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (1, -1)$ y con el vértice $A = (2, 1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,448156787992202$ centrada en el punto $P = (0, 9)$.



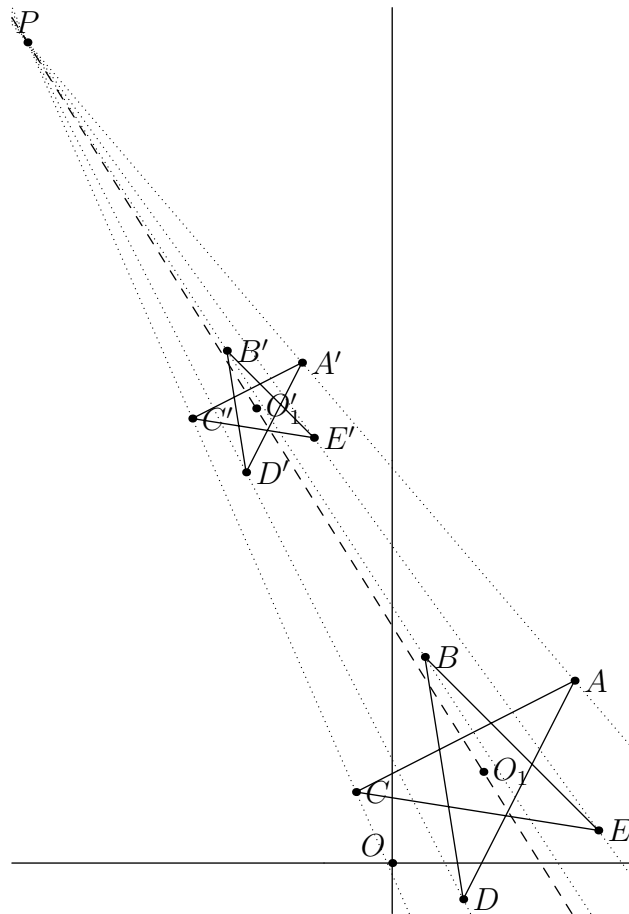
Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (2, 1) \\
 B &= (-0,593096038215360, 0,569090505045048) \\
 C &= (-0,984587498959894, -2,03024873645742) \\
 D &= (1,36655351021000, -3,20581924104237) \\
 E &= (3,21113002696525, -1,33302252754526) \\
 A' &= (0,896313575984404, 5,41474569606238) \\
 B' &= (-0,265800015457496, 5,22163068088803) \\
 C' &= (-0,441249571031141, 4,05671915551420) \\
 D' &= (0,612430231755182, 3,52987925412104) \\
 E' &= (1,43908971871006, 4,36918581380425)
 \end{aligned}$$

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Ejercicio 250. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (1, 1)$ y con el vértice $A = (2, 2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,501767219828347$ centrada en el punto $P = (-4, 9)$.



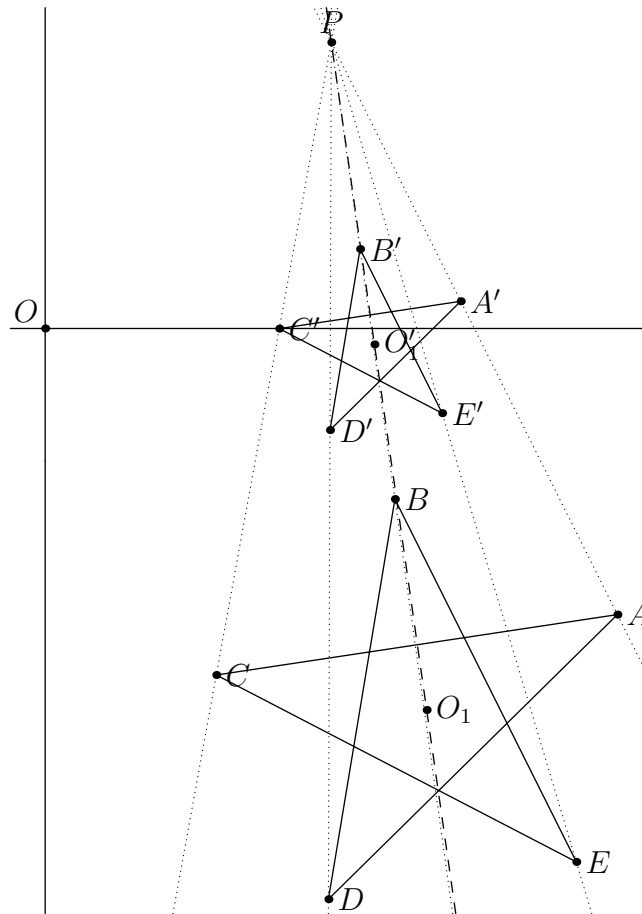
Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (2, 2) \\
 B &= (0,357960478079794, 2,26007351067010) \\
 C &= (-0,396802246667421, 0,778768257917526) \\
 D &= (0,778768257917525, -0,396802246667420) \\
 E &= (2,26007351067010, 0,357960478079793) \\
 A' &= (-0,989396681029915, 5,48762946120157) \\
 B' &= (-1,81331828679209, 5,61812582360150) \\
 C' &= (-2,19203348081856, 4,87485540521071) \\
 D' &= (-1,60217073702077, 4,28499266141292) \\
 E' &= (-0,858900318629980, 4,66370785543940)
 \end{aligned}$$

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Ejercicio 251. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (4, -4)$ y con el vértice $A = (6, -3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,452468427178452$ centrada en el punto $P = (3, 3)$.



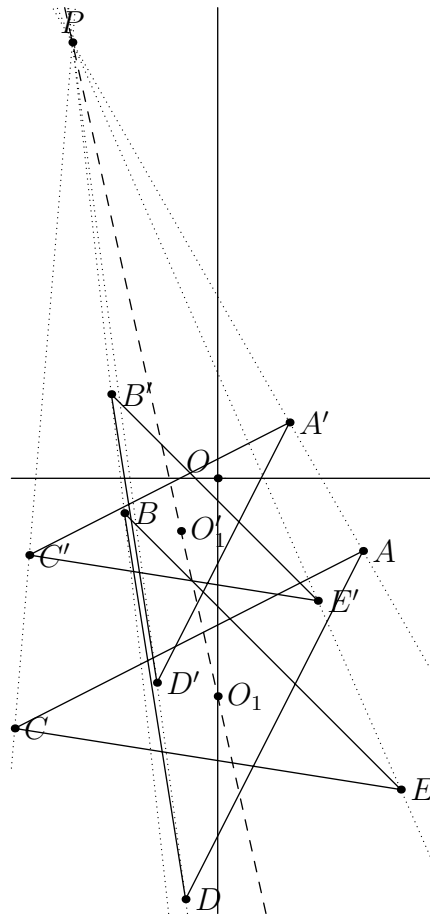
Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (6, -3) \\
 B &= (3,66697747245474, -1,78886997303475) \\
 C &= (1,79418075895763, -3,63344648979000) \\
 D &= (2,96975126354258, -5,98458749895989) \\
 E &= (5,56909050504505, -5,59309603821536) \\
 A' &= (4,35740528153536, 0,285189436929288) \\
 B' &= (3,30178624792506, 0,833187535338853) \\
 C' &= (2,45440486454405, -0,00142510000770524) \\
 D' &= (2,98631340179098, -1,06524217450156) \\
 E' &= (4,16243234009683, -0,888104649004690)
 \end{aligned}$$

Leandro Marín  Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Ejercicio 252. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, -3)$ y con el vértice $A = (2, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,747309583612160$ centrada en el punto $P = (-2, 6)$.



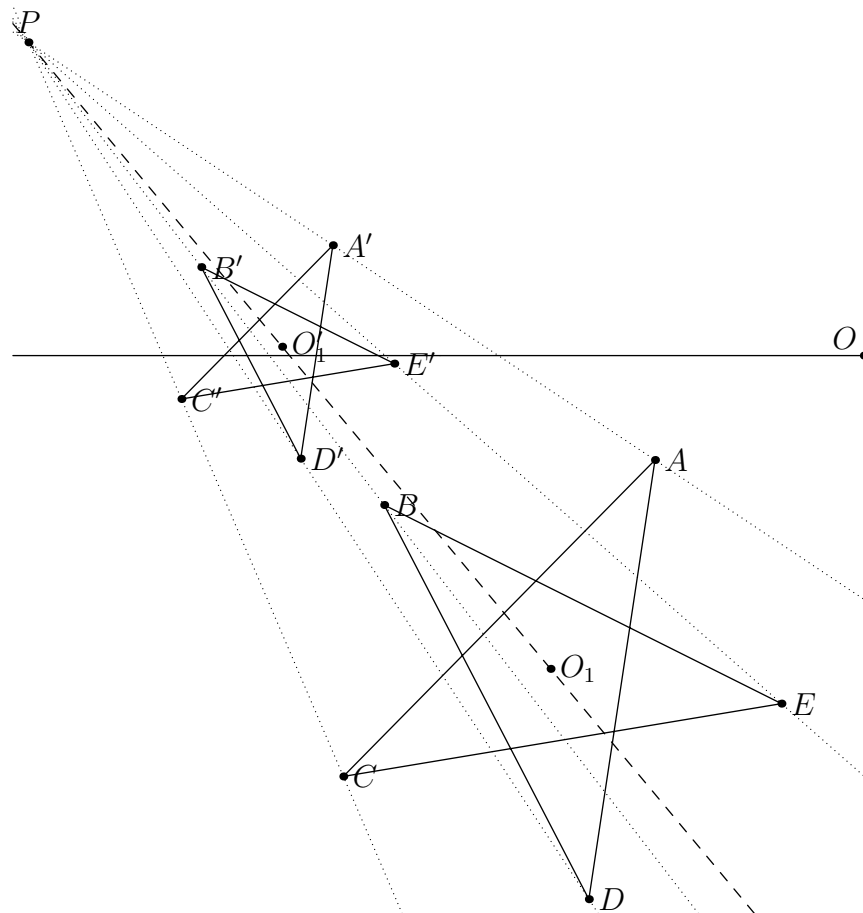
Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (2, -1) \\
 B &= (-1,28407904384041, -0,479852978659798) \\
 C &= (-2,79360449333484, -3,44246348416495) \\
 D &= (-0,442463484164949, -5,79360449333484) \\
 E &= (2,52014702134020, -4,28407904384041) \\
 A' &= (0,989238334448641, 0,768832914714878) \\
 B' &= (-1,46498540835316, 1,15754376864973) \\
 C' &= (-2,59306824346680, -1,05644345462433) \\
 D' &= (-0,836038034890573, -2,81347366320056) \\
 E' &= (1,37794918838349, -1,68539082808692)
 \end{aligned}$$

Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.

Ejercicio 253. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, -3)$ y con el vértice $A = (-2, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,485852655517747$ centrada en el punto $P = (-8, 3)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

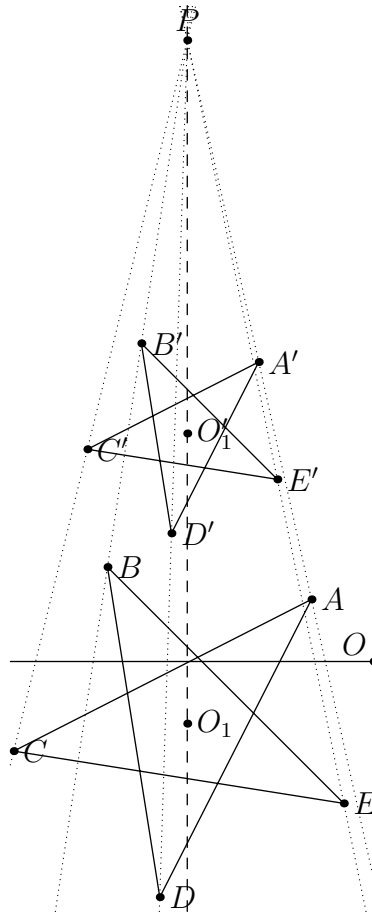
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2, -1) \\
 B &= (-4,59309603821536, -1,43090949495495) \\
 C &= (-4,98458749895989, -4,03024873645742) \\
 D &= (-2,63344648979000, -5,20581924104237) \\
 E &= (-0,788869973034745, -3,33302252754526) \\
 A' &= (-5,08488406689352, 1,05658937792901) \\
 B' &= (-6,34474666307300, 0,847230855517336) \\
 C' &= (-6,53495382888825, -0,415665017558126) \\
 D' &= (-5,39264572608638, -0,986819068959060) \\
 E' &= (-4,49645332711517, -0,0769158124615796)
 \end{aligned}$$

Leandro Marin Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 254. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, -1)$ y con el vértice $A = (-1, 1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,575379687671358$ centrada en el punto $P = (-3, 10)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

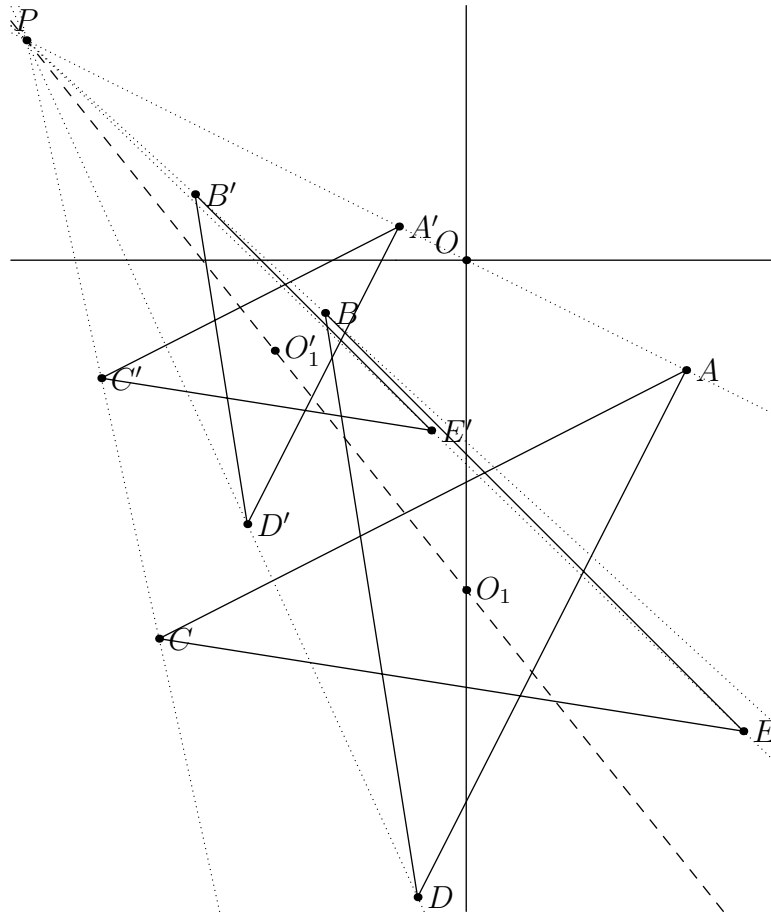
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-1, 1) \\
 B &= (-4,28407904384041, 1,52014702134020) \\
 C &= (-5,79360449333484, -1,44246348416495) \\
 D &= (-3,44246348416495, -3,79360449333484) \\
 E &= (-0,479852978659797, -2,28407904384041) \\
 A' &= (-1,84924062465728, 4,82158281095778) \\
 B' &= (-3,73883299919023, 5,12086484163969) \\
 C' &= (-4,60738328085230, 3,41623893429025) \\
 D' &= (-3,25458450132481, 2,06344015476276) \\
 E' &= (-1,54995859397537, 2,93199043642483)
 \end{aligned}$$

Leandro Marin Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 255. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, -3)$ y con el vértice $A = (2, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,564663857118428$ centrada en el punto $P = (-4, 2)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

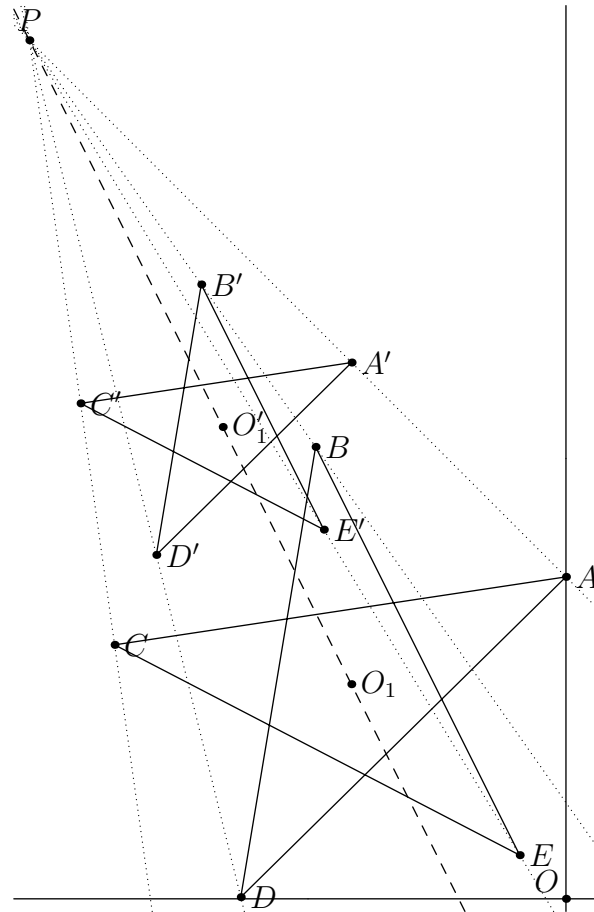
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (2, -1) \\
 B &= (-1,28407904384041, -0,479852978659798) \\
 C &= (-2,79360449333484, -3,44246348416495) \\
 D &= (-0,442463484164949, -5,79360449333484) \\
 E &= (2,52014702134020, -4,28407904384041) \\
 A' &= (-0,612016857289429, 0,306008428644715) \\
 B' &= (-2,46641759726616, 0,599716651983335) \\
 C' &= (-3,31879205999611, -1,07316242319478) \\
 D' &= (-1,99118770912892, -2,40076677406197) \\
 E' &= (-0,318308633950809, -1,54839231133201)
 \end{aligned}$$

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 256. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-2, 2)$ y con el vértice $A = (0, 3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,600550369687285$ centrada en el punto $P = (-5, 8)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

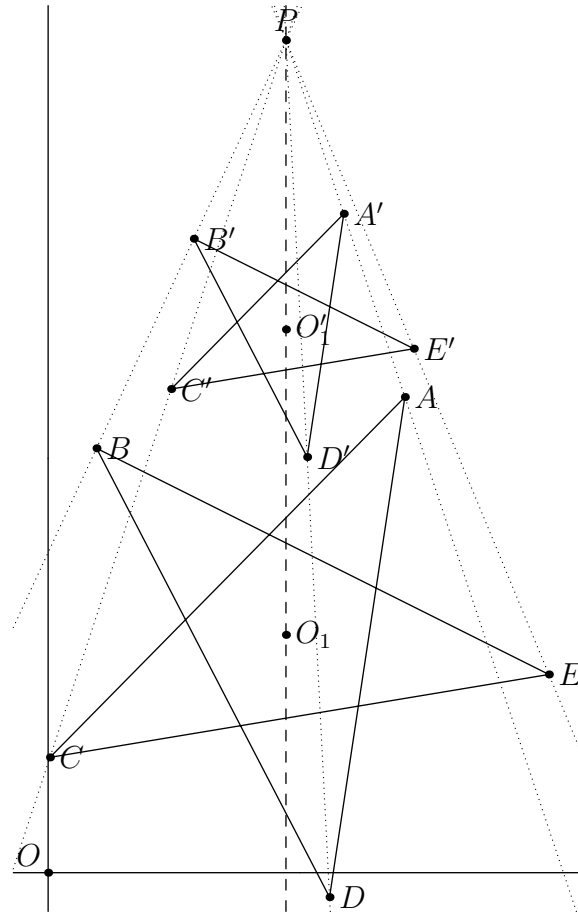
Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, 3) \\
 B &= (-2,33302252754526, 4,21113002696525) \\
 C &= (-4,20581924104237, 2,36655351021000) \\
 D &= (-3,03024873645742, 0,0154125010401066) \\
 E &= (-0,430909494954952, 0,406903961784640) \\
 A' &= (-1,99724815156358, 4,99724815156357) \\
 B' &= (-3,39834569296964, 5,72459273699693) \\
 C' &= (-4,52305445160947, 4,61683162794308) \\
 D' &= (-3,81706515048751, 3,20485302569916) \\
 E' &= (-2,25603100806053, 3,43996336717871)
 \end{aligned}$$

Leandro Marin Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 257. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, 2)$ y con el vértice $A = (3, 4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor 0,486341091165002 centrada en el punto $P = (2, 7)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

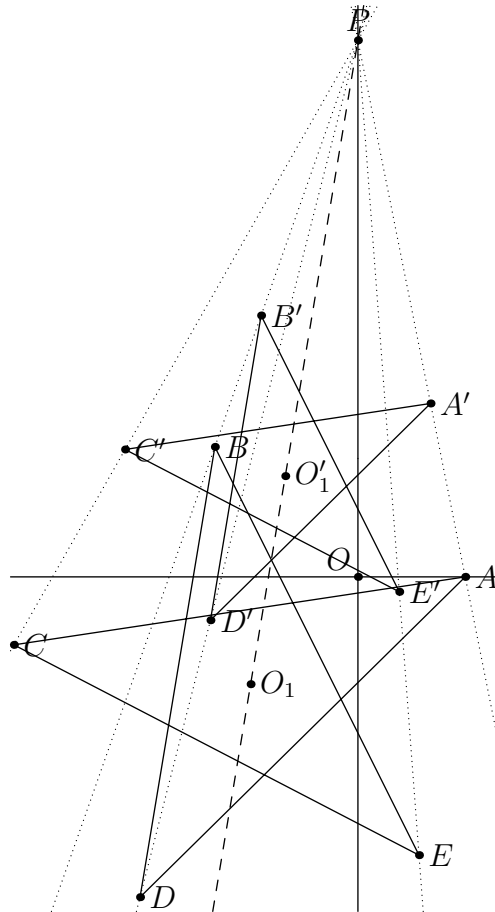
Solución:

$A = (3, 4)$
 $B = (0,406903961784641, 3,56909050504505)$
 $C = (0,0154125010401067, 0,969751263542579)$
 $D = (2,36655351021000, -0,205819241042367)$
 $E = (4,21113002696525, 1,66697747245474)$
 $A' = (2,48634109116500, 5,54097672650499)$
 $B' = (1,22521193444370, 5,33140773253524)$
 $C' = (1,03481355024342, 4,06724224951492)$
 $D' = (2,17827003412589, 3,49551400757369)$
 $E' = (3,07536339002198, 4,40633200474610)$

Leandro Marin Facultad de Ingeniería y Arquitectura Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 258. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-1, -1)$ y con el vértice $A = (1, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,676812839288323$ centrada en el punto $P = (0, 5)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

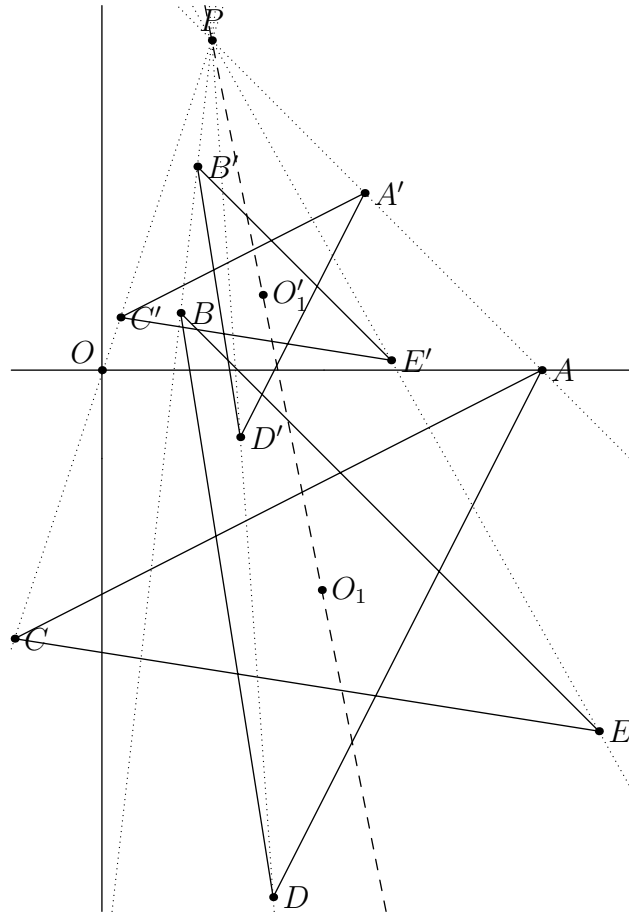
Solución:

$A = (1, 0)$
 $B = (-1,33302252754526, 1,21113002696525)$
 $C = (-3,20581924104237, -0,633446489790001)$
 $D = (-2,03024873645742, -2,98458749895989)$
 $E = (0,569090505045048, -2,59309603821536)$
 $A' = (0,676812839288323, 1,61593580355838)$
 $B' = (-0,902206761703204, 2,43564415585608)$
 $C' = (-2,16973962277502, 1,18721108626639)$
 $D' = (-1,37409841178328, -0,404071335717099)$
 $E' = (0,385167760531565, -0,139104888613458)$

Leandro Marín  Facultad de Ingeniería Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 259. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, -2)$ y con el vértice $A = (4, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,463122244938361$ centrada en el punto $P = (1, 3)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

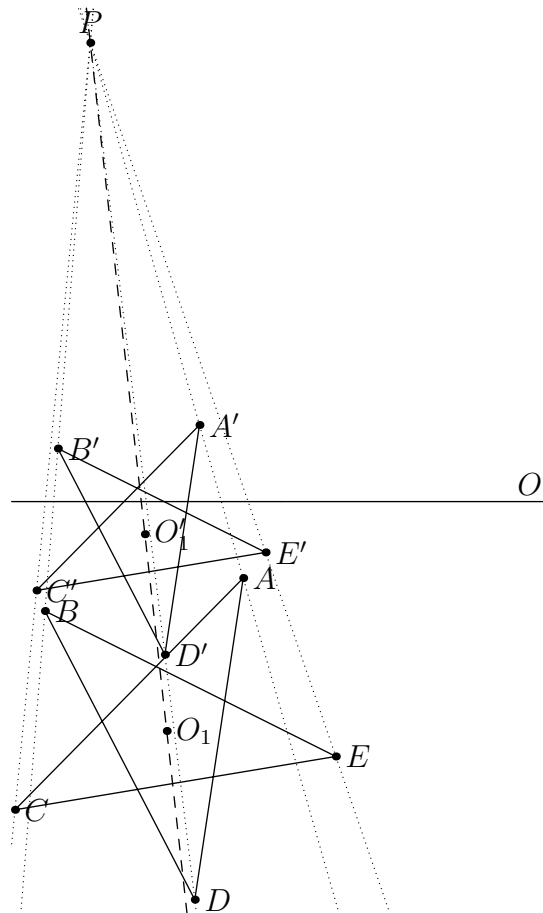
Solución:

$A = (4, 0)$
 $B = (0,715920956159588, 0,520147021340202)$
 $C = (-0,793604493334841, -2,44246348416495)$
 $D = (1,55753651583505, -4,79360449333484)$
 $E = (4,52014702134020, -3,28407904384041)$
 $A' = (2,38936673481508, 1,61063326518492)$
 $B' = (0,868436675476685, 1,85152492140599)$
 $C' = (0,169341860515237, 0,479474093218477)$
 $D' = (1,25820756284864, -0,609391609114927)$
 $E' = (2,63025839103616, 0,0897032058465204)$

Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

◇

Ejercicio 260. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-5, -3)$ y con el vértice $A = (-4, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,714052860334117$ centrada en el punto $P = (-6, 6)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

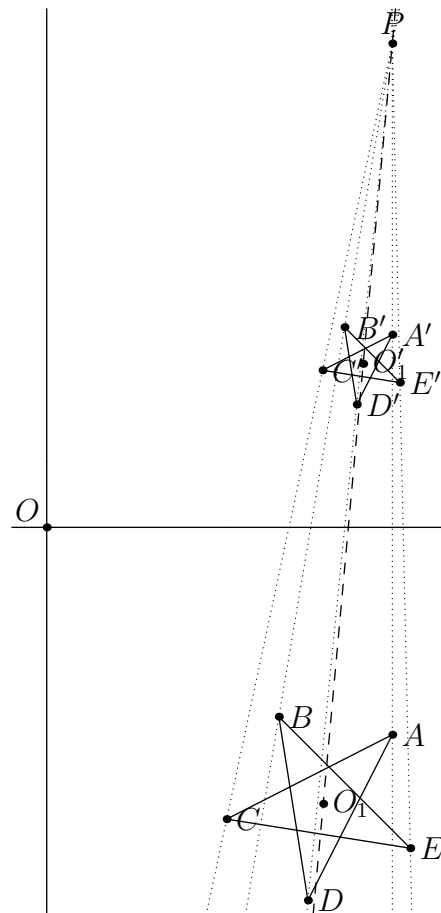
Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-4, -1) \\
 B &= (-6,59309603821536, -1,43090949495495) \\
 C &= (-6,98458749895989, -4,03024873645742) \\
 D &= (-4,63344648979000, -5,20581924104237) \\
 E &= (-2,78886997303475, -3,33302252754526) \\
 A' &= (-4,57189427933177, 1,00162997766118) \\
 B' &= (-6,42350192254051, 0,693937820243467) \\
 C' &= (-6,70304751988153, -1,16212780013009) \\
 D' &= (-5,02420855723492, -2,00154728145339) \\
 E' &= (-3,70708341934069, -0,664271431356443)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 261. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (4, -4)$ y con el vértice $A = (5, -3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una homotecia de factor reductor $0,421293013846713$ centrada en el punto $P = (5, 7)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

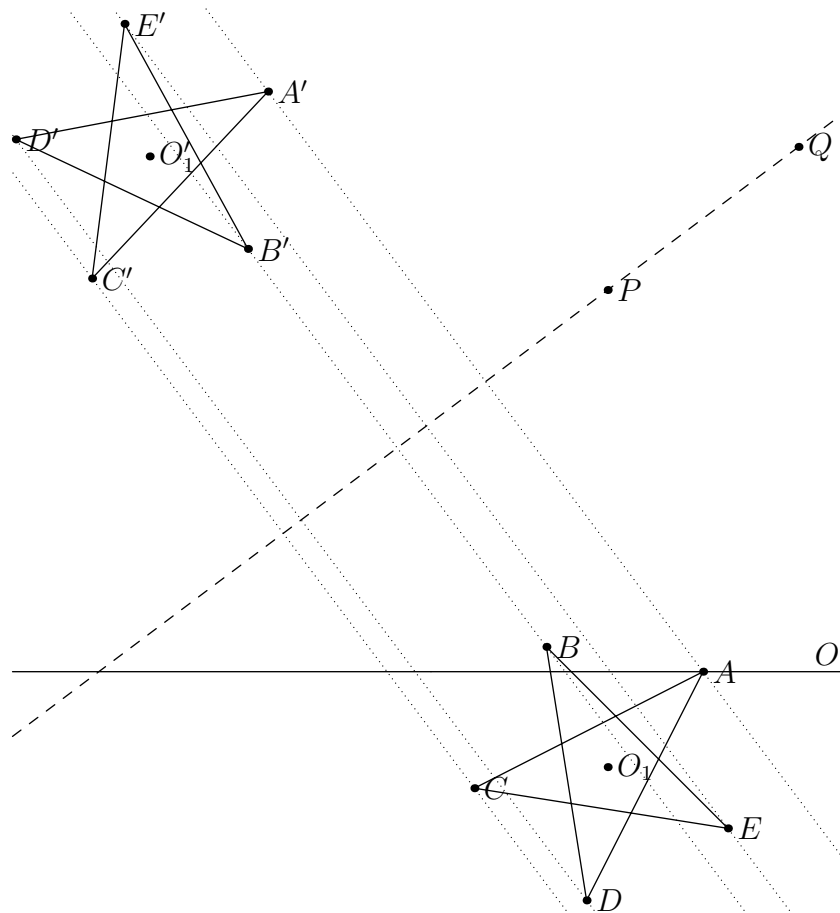
Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
		Álgebra y Matemática Discreta	
		Aplicaciones Afines	

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (5, -3) \\
B &= (3,35796047807979, -2,73992648932990) \\
C &= (2,60319775333258, -4,22123174208247) \\
D &= (3,77876825791753, -5,39680224666742) \\
E &= (5,26007351067010, -4,64203952192021) \\
A' &= (5,00000000000000, 2,78706986153287) \\
B' &= (4,30822022095482, 2,89663701466477) \\
C' &= (3,99024395790691, 2,27257346030567) \\
D' &= (4,48550359877280, 1,77731381943978) \\
E' &= (5,10956715313190, 2,09529008248769)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 262. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-5, -2)$ y con el vértice $A = (-3, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-5, 8)$ y $Q = (-1, 11)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

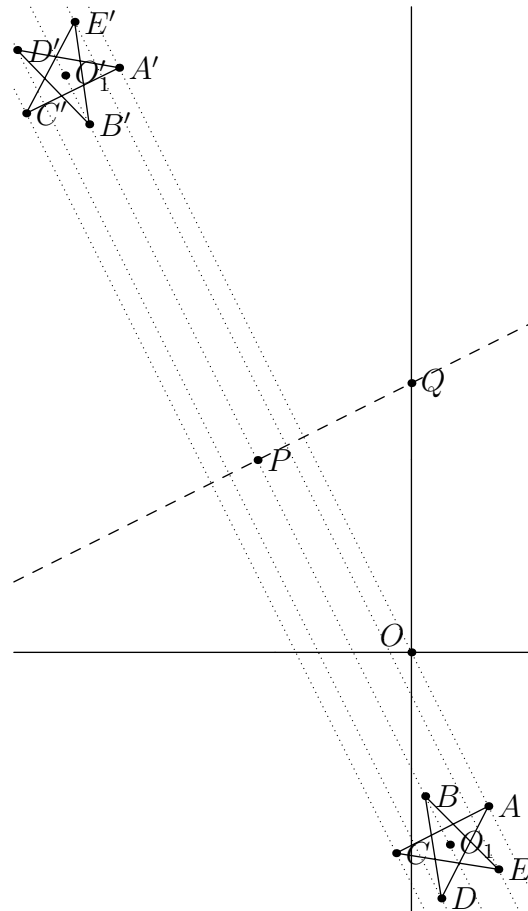
Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (-3, 0) \\
B &= (-6, 28407904384041, 0, 520147021340202) \\
C &= (-7, 79360449333484, -2, 44246348416495) \\
D &= (-5, 44246348416495, -4, 79360449333484) \\
E &= (-2, 47985297865980, -3, 28407904384041) \\
A' &= (-12, 1200000000000, 12, 1600000000000) \\
B' &= (-12, 5402009917887, 8, 86164295193795) \\
C' &= (-15, 8069742029321, 8, 24202946196474) \\
D' &= (-17, 4057500891676, 11, 1574443133354) \\
E' &= (-15, 1270747161115, 13, 5788832727619)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 263. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (1, -5)$ y con el vértice $A = (2, -4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-4, 5)$ y $Q = (0, 7)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

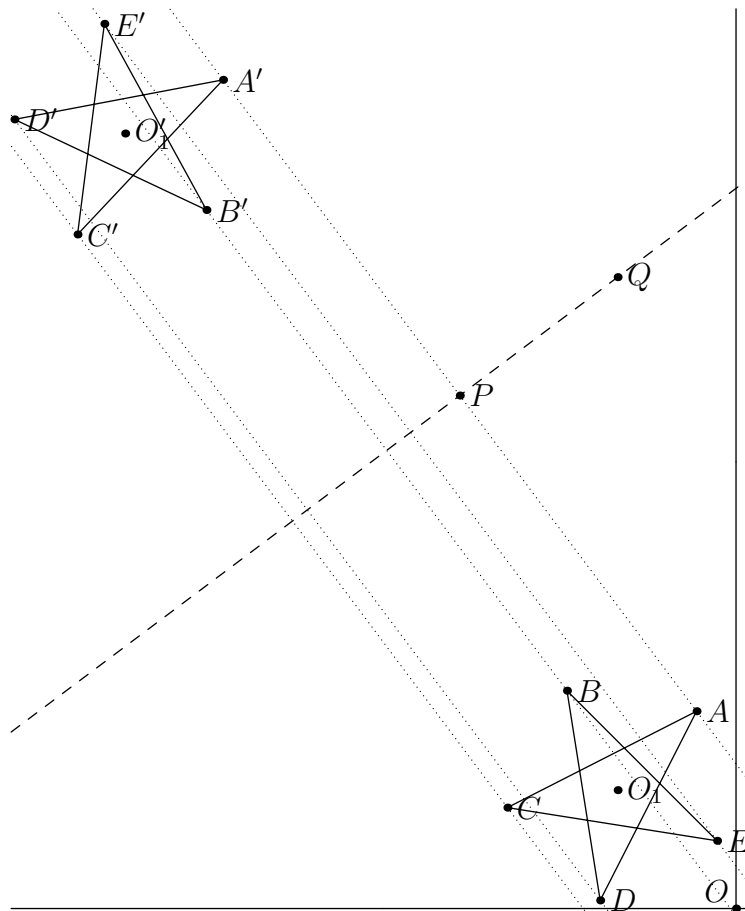
Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (2, -4) \\
B &= (0,357960478079794, -3,73992648932990) \\
C &= (-0,396802246667420, -5,22123174208247) \\
D &= (0,778768257917525, -6,39680224666742) \\
E &= (2,26007351067010, -5,64203952192021) \\
A' &= (-7,60000000000000, 15,2000000000000) \\
B' &= (-8,37716490461604, 13,7303242760618) \\
C' &= (-10,0150667416664, 14,0152972479155) \\
D' &= (-10,2501808425834, 15,6610959543345) \\
E' &= (-8,75758751113410, 16,3932825216882)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 264. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, 3)$ y con el vértice $A = (-1, 5)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-7, 13)$ y $Q = (-3, 16)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

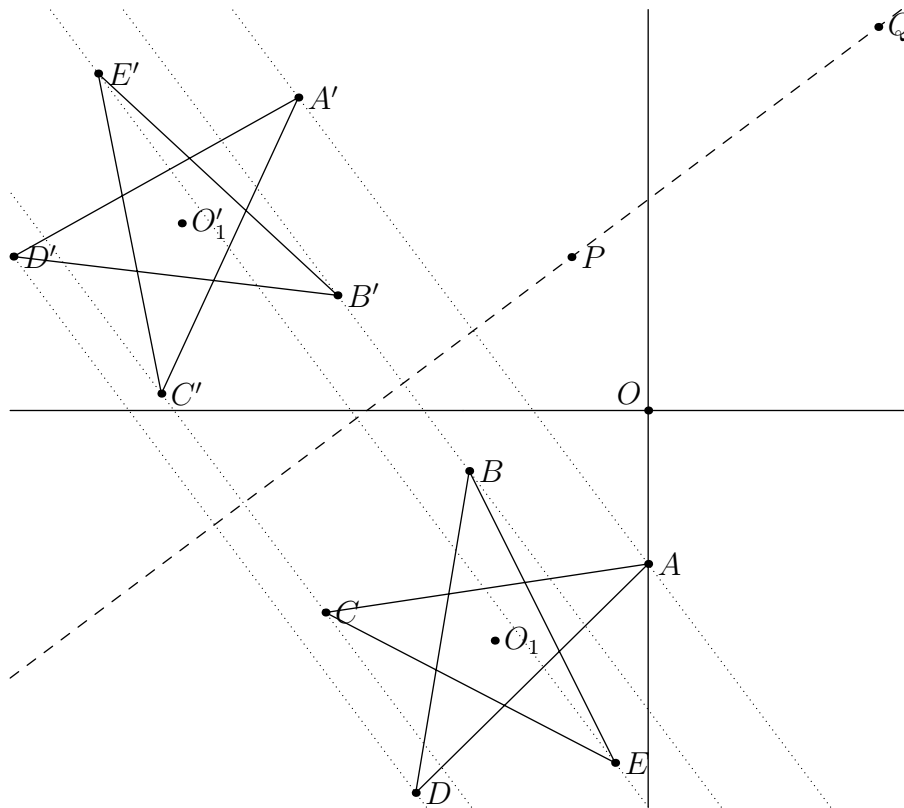
Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-1, 5) \\
 B &= (-4, 28407904384041, 5, 52014702134020) \\
 C &= (-5, 79360449333484, 2, 55753651583505) \\
 D &= (-3, 44246348416495, 0, 206395506665159) \\
 E &= (-0, 479852978659799, 1, 71592095615959) \\
 A' &= (-13, 0000000000000, 21, 0000000000000) \\
 B' &= (-13, 4202009917887, 17, 7016429519379) \\
 C' &= (-16, 6869742029321, 17, 0820294619647) \\
 D' &= (-18, 2857500891676, 19, 9974443133354) \\
 E' &= (-16, 0070747161115, 22, 4188832727619)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 265. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-2, -3)$ y con el vértice $A = (0, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-1, 2)$ y $Q = (3, 5)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

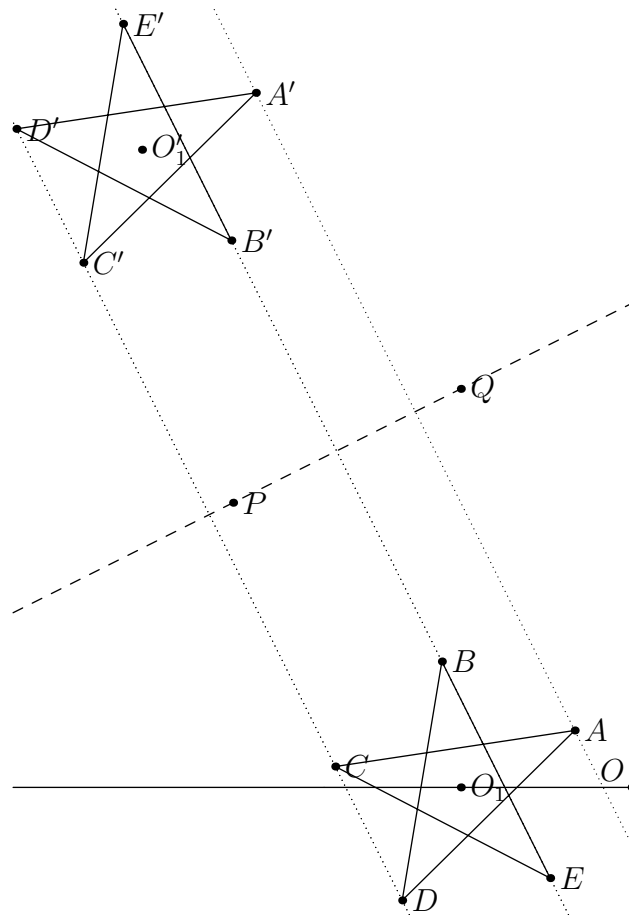
Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
		Álgebra y Matemática Discreta	
		Aplicaciones Afines	

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, -2) \\
 B &= (-2,33302252754526, -0,788869973034745) \\
 C &= (-4,20581924104237, -2,63344648979000) \\
 D &= (-3,03024873645742, -4,98458749895989) \\
 E &= (-0,430909494954951, -4,59309603821536) \\
 A' &= (-4,56000000000000, 4,08000000000000) \\
 B' &= (-4,05056148182603, 1,50118196600628) \\
 C' &= (-6,34573801769026, 0,219778545740527) \\
 D' &= (-8,27367364520958, 2,00664571270965) \\
 E' &= (-7,17002685527413, 4,39239377554355)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 266. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, 0)$ y con el vértice $A = (-1, 1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-7, 5)$ y $Q = (-3, 7)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

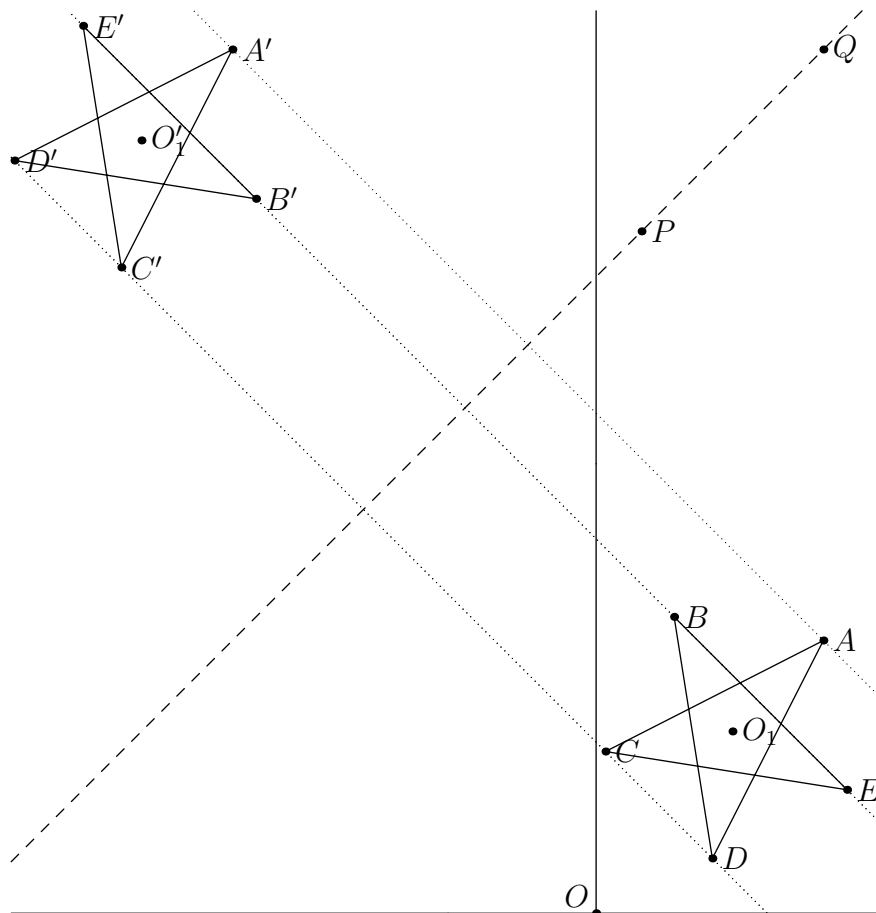
Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (-1, 1) \\
B &= (-3, 33302252754526, 2, 21113002696525) \\
C &= (-5, 20581924104237, 0, 366553510209999) \\
D &= (-4, 03024873645742, -1, 98458749895989) \\
E &= (-1, 43090949495495, -1, 59309603821536) \\
A' &= (-6, 60000000000000, 12, 20000000000000) \\
B' &= (-7, 03090949495495, 9, 60690396178464) \\
C' &= (-9, 63024873645742, 9, 21541250104011) \\
D' &= (-10, 8058192410424, 11, 5665535102100) \\
E' &= (-8, 93302252754526, 13, 4111300269653)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 267. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (3, 4)$ y con el vértice $A = (5, 6)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (1, 15)$ y $Q = (5, 19)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

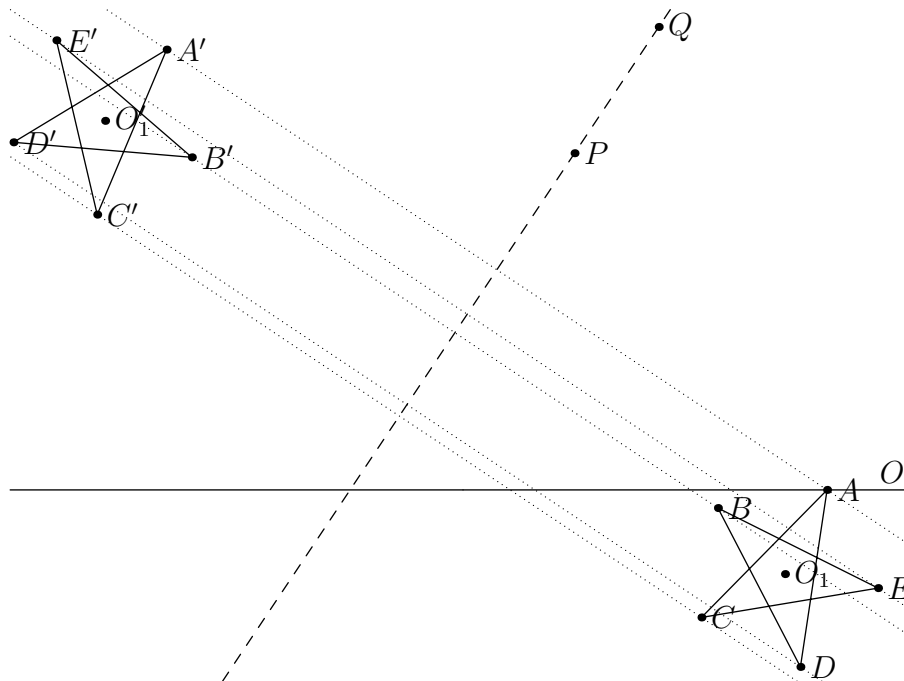
Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (5, 6) \\
 B &= (1, 71592095615959, 6, 52014702134020) \\
 C &= (0, 206395506665158, 3, 55753651583505) \\
 D &= (2, 55753651583505, 1, 20639550666516) \\
 E &= (5, 52014702134020, 2, 71592095615959) \\
 A' &= (-8, 00000000000000, 19, 00000000000000) \\
 B' &= (-7, 47985297865980, 15, 7159209561596) \\
 C' &= (-10, 4424634841649, 14, 2063955066652) \\
 D' &= (-12, 7936044933348, 16, 5575365158351) \\
 E' &= (-11, 2840790438404, 19, 5201470213402)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 268. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, -2)$ y con el vértice $A = (-2, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-8, 8)$ y $Q = (-6, 11)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

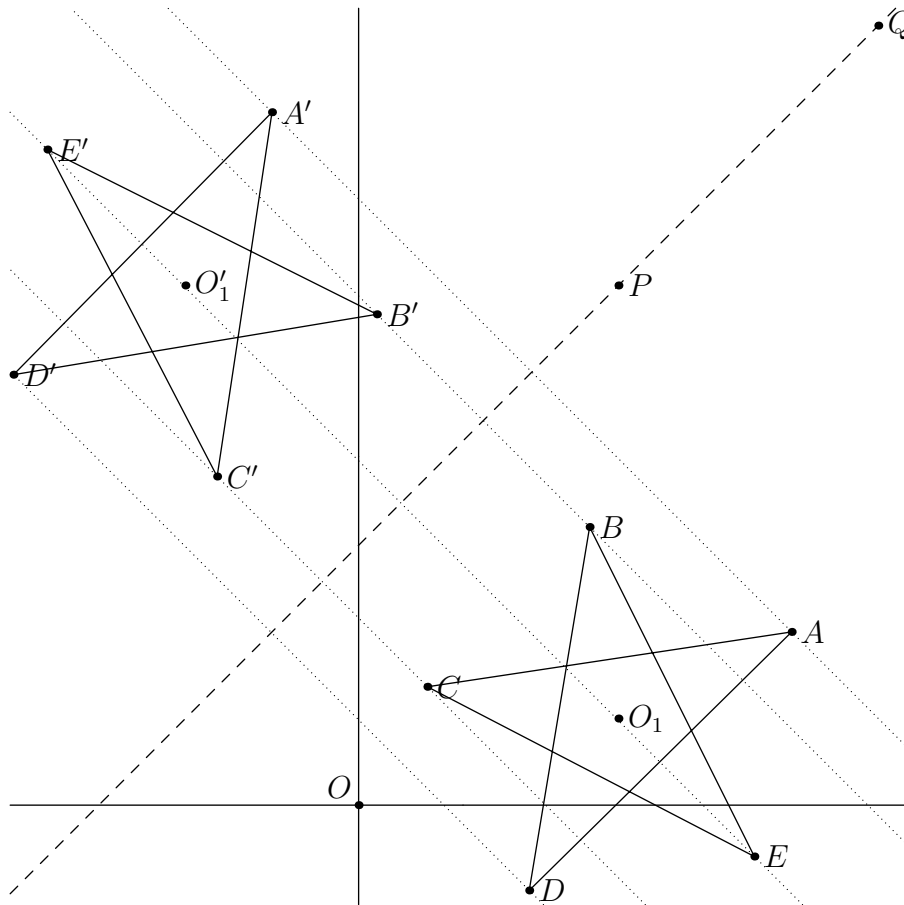
Leandro Marin Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-2, 0) \\
 B &= (-4,59309603821536, -0,430909494954952) \\
 C &= (-4,98458749895989, -3,03024873645742) \\
 D &= (-2,63344648979000, -4,20581924104237) \\
 E &= (-0,788869973034746, -2,33302252754526) \\
 A' &= (-17,6923076923077, 10,4615384615385) \\
 B' &= (-17,0927256729525, 7,90217692820315) \\
 C' &= (-19,3415421032838, 6,54105433309186) \\
 D' &= (-21,3309691110430, 8,25919583979293) \\
 E' &= (-20,3116861896438, 10,6821882835274)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 269. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (3, 1)$ y con el vértice $A = (5, 2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (3, 6)$ y $Q = (6, 9)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

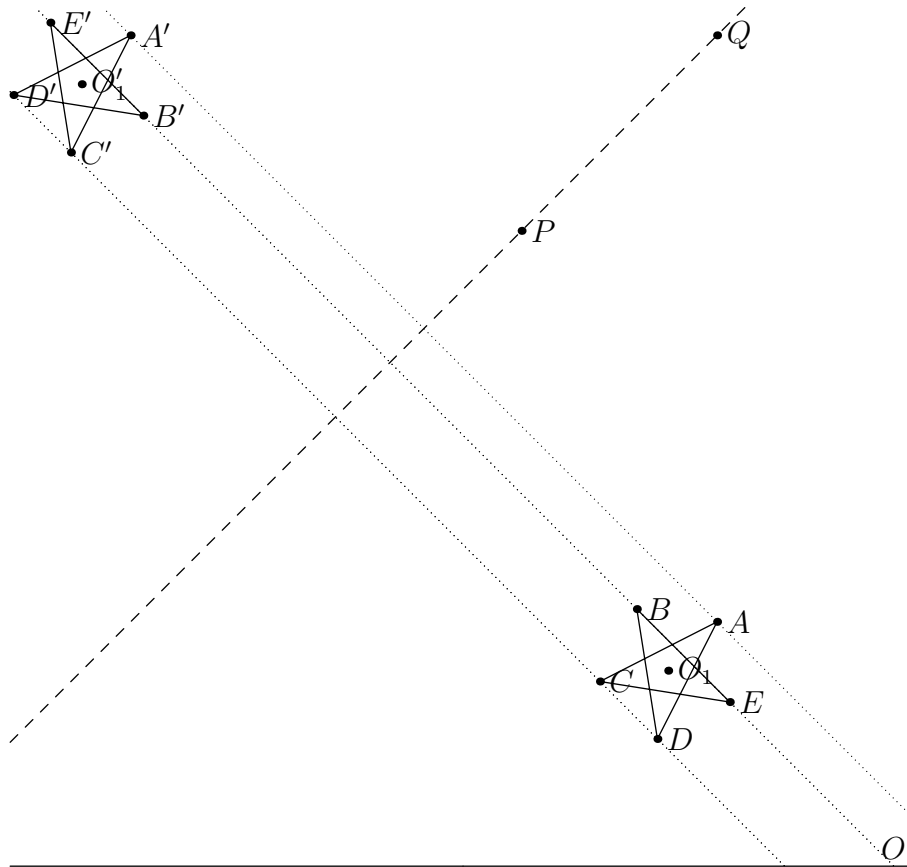
Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (5, 2) \\
 B &= (2,66697747245474, 3,21113002696525) \\
 C &= (0,794180758957632, 1,36655351021000) \\
 D &= (1,96975126354258, -0,984587498959893) \\
 E &= (4,56909050504505, -0,593096038215360) \\
 A' &= (-1,00000000000000, 8,00000000000000) \\
 B' &= (0,211130026965254, 5,66697747245474) \\
 C' &= (-1,63344648979000, 3,79418075895763) \\
 D' &= (-3,98458749895989, 4,96975126354258) \\
 E' &= (-3,59309603821536, 7,56909050504505)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 270. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-5, 4)$ y con el vértice $A = (-4, 5)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-8, 13)$ y $Q = (-4, 17)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

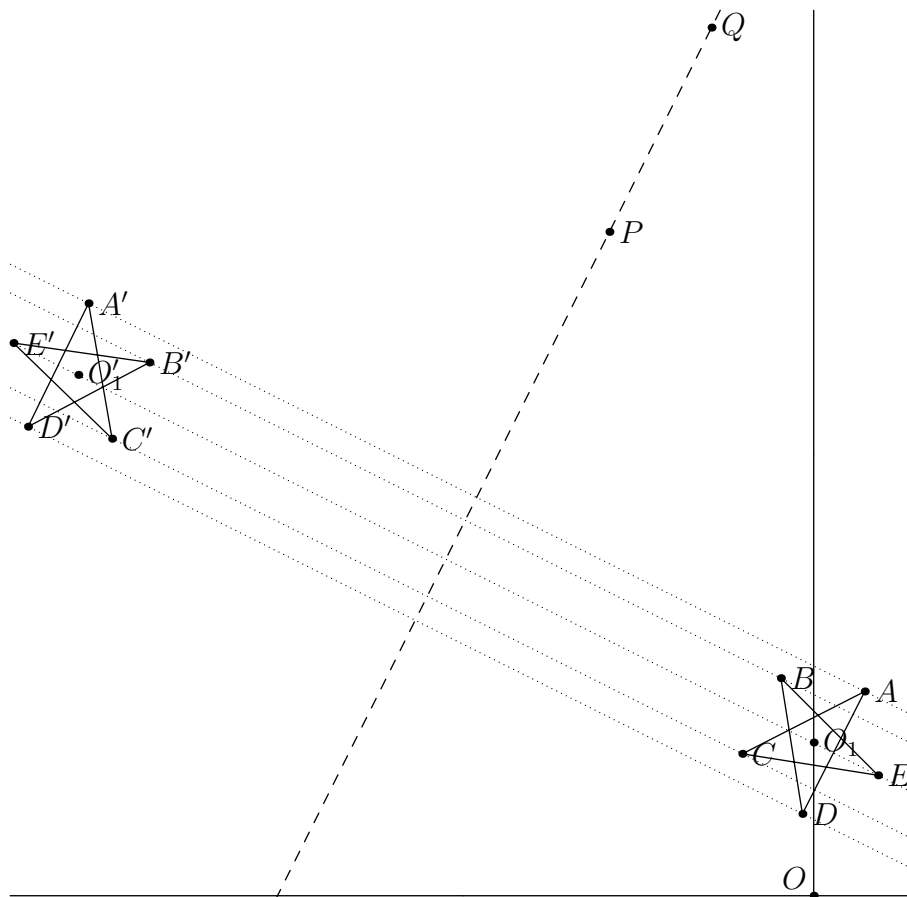
Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado
		Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines	Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (-4, 5) \\
B &= (-5,64203952192021, 5,26007351067010) \\
C &= (-6,39680224666742, 3,77876825791753) \\
D &= (-5,22123174208248, 2,60319775333258) \\
E &= (-3,73992648932990, 3,35796047807979) \\
A' &= (-16,0000000000000, 17,0000000000000) \\
B' &= (-15,7399264893299, 15,3579604780798) \\
C' &= (-17,2212317420825, 14,6031977533326) \\
D' &= (-18,3968022466674, 15,7787682579175) \\
E' &= (-17,6420395219202, 17,2600735106701)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 271. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (0, 3)$ y con el vértice $A = (1, 4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-4, 13)$ y $Q = (-2, 17)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

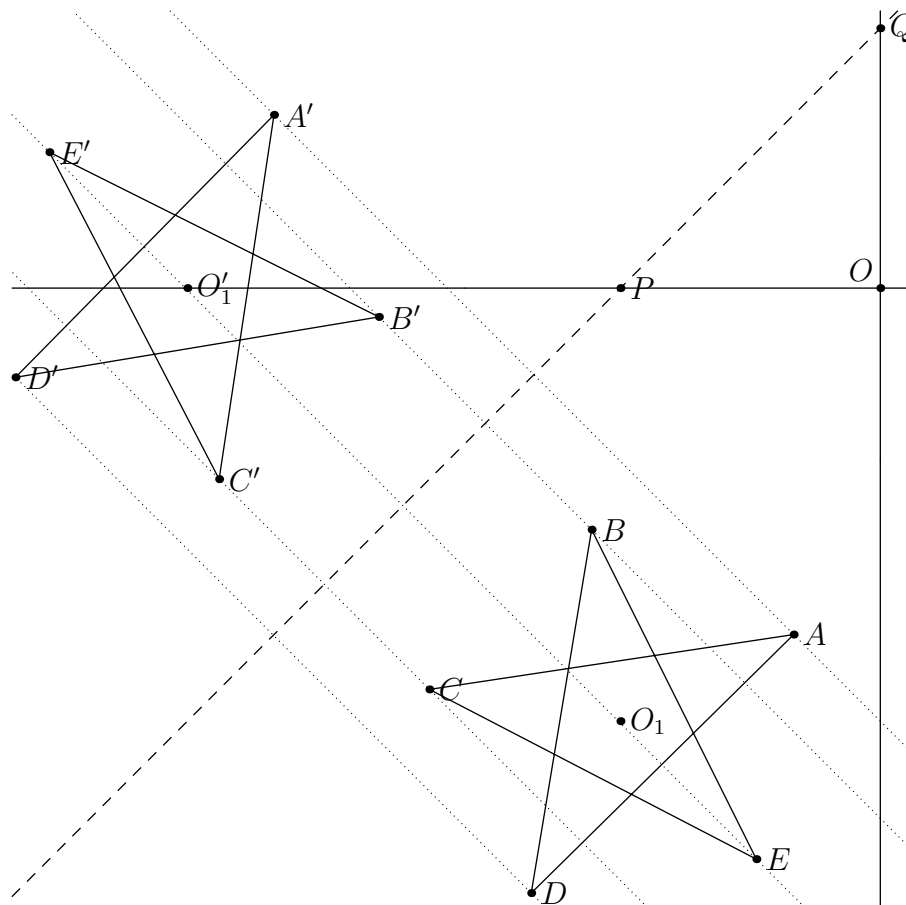
Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (1, 4) \\
 B &= (-0,642039521920206, 4,26007351067010) \\
 C &= (-1,39680224666742, 2,77876825791753) \\
 D &= (-0,221231742082475, 1,60319775333258) \\
 E &= (1,26007351067010, 2,35796047807979) \\
 A' &= (-14,2000000000000, 11,6000000000000) \\
 B' &= (-13,0067174783118, 10,4424124888659) \\
 C' &= (-13,7389040456655, 8,94981915741658) \\
 D' &= (-15,3847027520845, 9,18493325833357) \\
 E' &= (-15,6696757239382, 10,8228350953840)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 272. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, -5)$ y con el vértice $A = (-1, -4)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-3, 0)$ y $Q = (0, 3)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

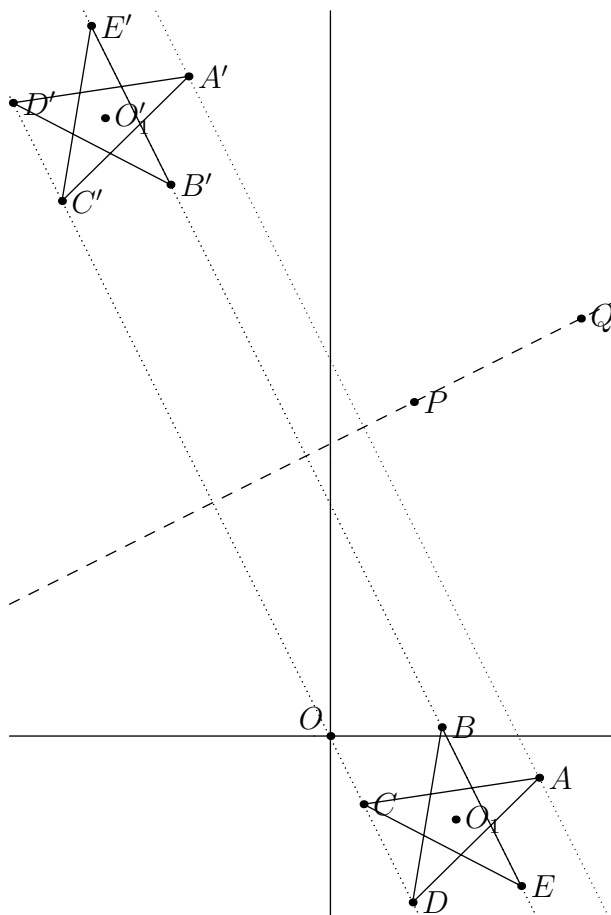
Leandro Marín Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (-1, -4) \\
B &= (-3,33302252754526, -2,78886997303475) \\
C &= (-5,20581924104237, -4,63344648979000) \\
D &= (-4,03024873645742, -6,98458749895989) \\
E &= (-1,43090949495495, -6,59309603821536) \\
A' &= (-7,00000000000000, 2,00000000000000) \\
B' &= (-5,78886997303475, -0,333022527545258) \\
C' &= (-7,63344648979000, -2,20581924104237) \\
D' &= (-9,98458749895989, -1,03024873645742) \\
E' &= (-9,59309603821536, 1,56909050504505)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 273. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (3, -2)$ y con el vértice $A = (5, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 8)$ y $Q = (6, 10)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

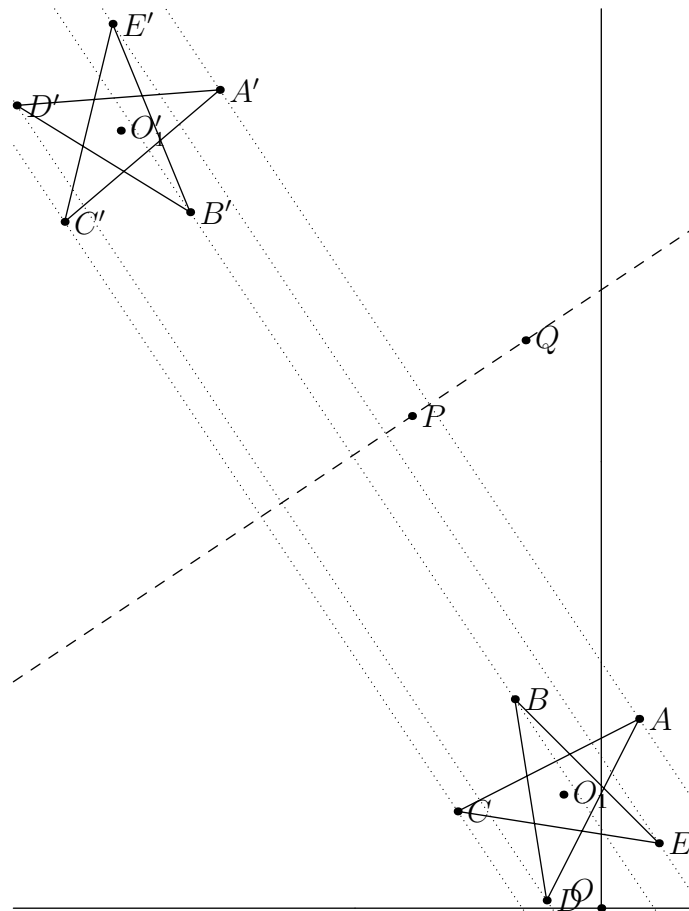
Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (5, -1) \\
 B &= (2,66697747245474, 0,211130026965254) \\
 C &= (0,794180758957633, -1,63344648979000) \\
 D &= (1,96975126354258, -3,98458749895989) \\
 E &= (4,56909050504505, -3,59309603821536) \\
 A' &= (-3,40000000000000, 15,8000000000000) \\
 B' &= (-3,83090949495495, 13,2069039617846) \\
 C' &= (-6,43024873645742, 12,8154125010401) \\
 D' &= (-7,60581924104237, 15,1665535102100) \\
 E' &= (-5,73302252754526, 17,0111300269653)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 274. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-1, 3)$ y con el vértice $A = (1, 5)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-5, 13)$ y $Q = (-2, 15)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

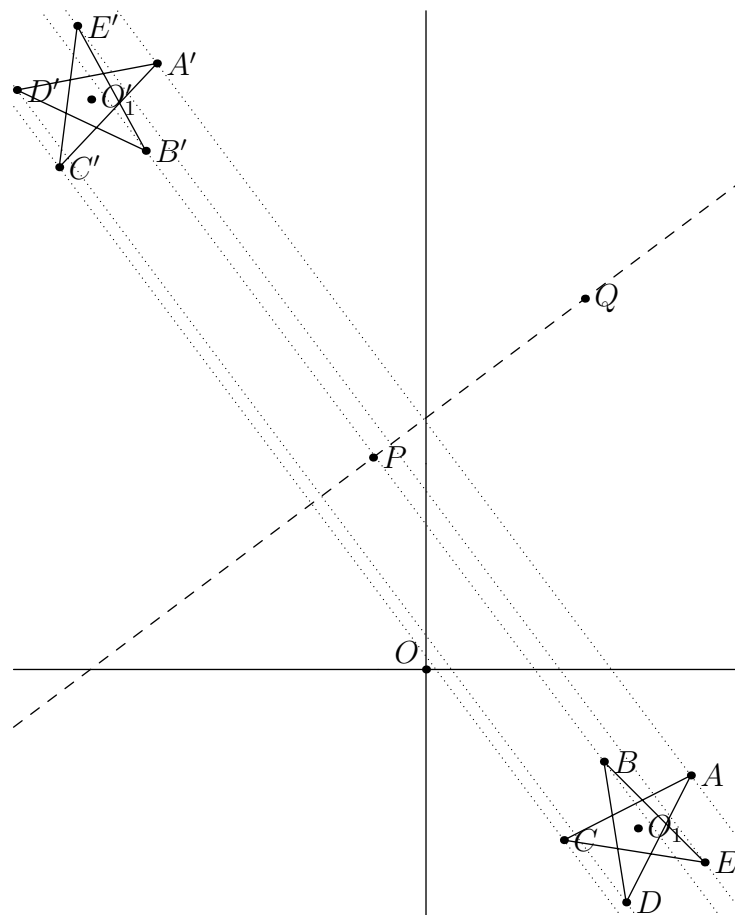
Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (1, 5) \\
B &= (-2, 28407904384041, 5, 52014702134020) \\
C &= (-3, 79360449333484, 2, 55753651583505) \\
D &= (-1, 44246348416495, 0, 206395506665160) \\
E &= (1, 52014702134020, 1, 71592095615959) \\
A' &= (-10, 0769230769231, 21, 6153846153846) \\
B' &= (-10, 8598946894707, 18, 3838704897857) \\
C' &= (-14, 1751987905118, 18, 1299279616005) \\
D' &= (-15, 4411977954494, 21, 2044969735919) \\
E' &= (-12, 9083241091834, 23, 3586276519450)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 275. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (4, -3)$ y con el vértice $A = (5, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-1, 4)$ y $Q = (3, 7)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

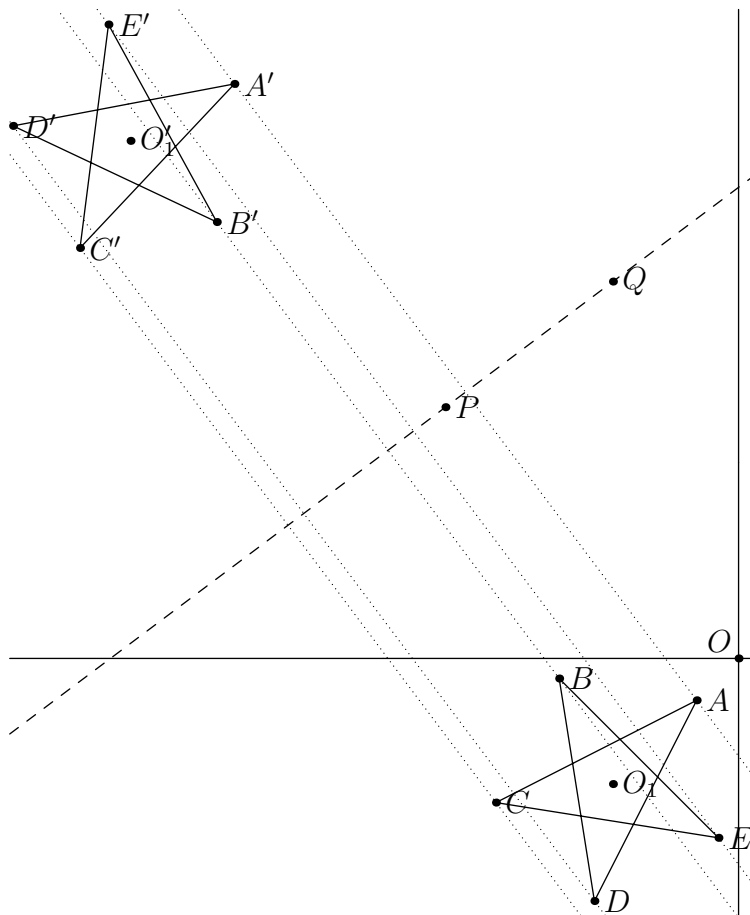
Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (5, -2) \\
B &= (3,35796047807979, -1,73992648932990) \\
C &= (2,60319775333258, -3,22123174208247) \\
D &= (3,77876825791753, -4,39680224666742) \\
E &= (5,26007351067010, -3,64203952192021) \\
A' &= (-5,08000000000000, 11,44000000000000) \\
B' &= (-5,29010049589436, 9,79082147596897) \\
C' &= (-6,92348710146605, 9,48101473098237) \\
D' &= (-7,72287504458382, 10,9387221566677) \\
E' &= (-6,58353735805577, 12,1494416363810)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 276. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-3, -3)$ y con el vértice $A = (-1, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-7, 6)$ y $Q = (-3, 9)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

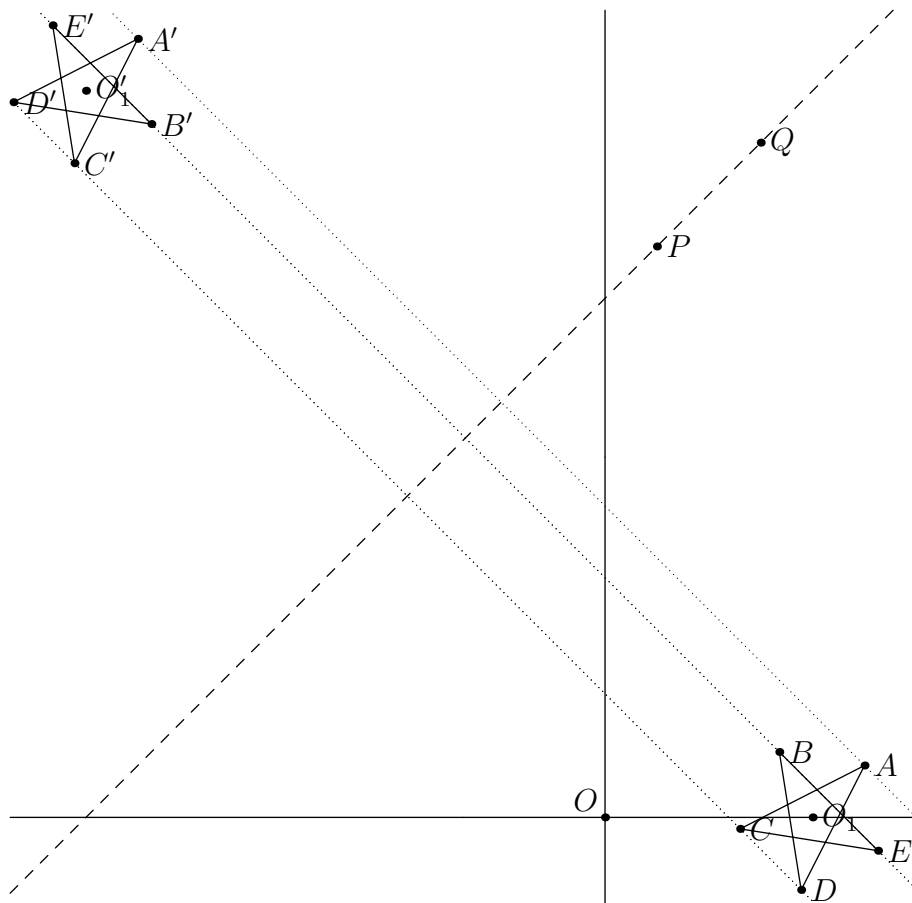
Leandro Marin Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (-1, -1) \\
 B &= (-4,28407904384041, -0,479852978659798) \\
 C &= (-5,79360449333484, -3,44246348416495) \\
 D &= (-3,44246348416495, -5,79360449333484) \\
 E &= (-0,479852978659799, -4,28407904384041) \\
 A' &= (-12,0400000000000, 13,7200000000000) \\
 B' &= (-12,4602009917887, 10,4216429519379) \\
 C' &= (-15,7269742029321, 9,80202946196474) \\
 D' &= (-17,3257500891676, 12,7174443133354) \\
 E' &= (-15,0470747161115, 15,1388832727619)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 277. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (4, 0)$ y con el vértice $A = (5, 1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (1, 11)$ y $Q = (3, 13)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

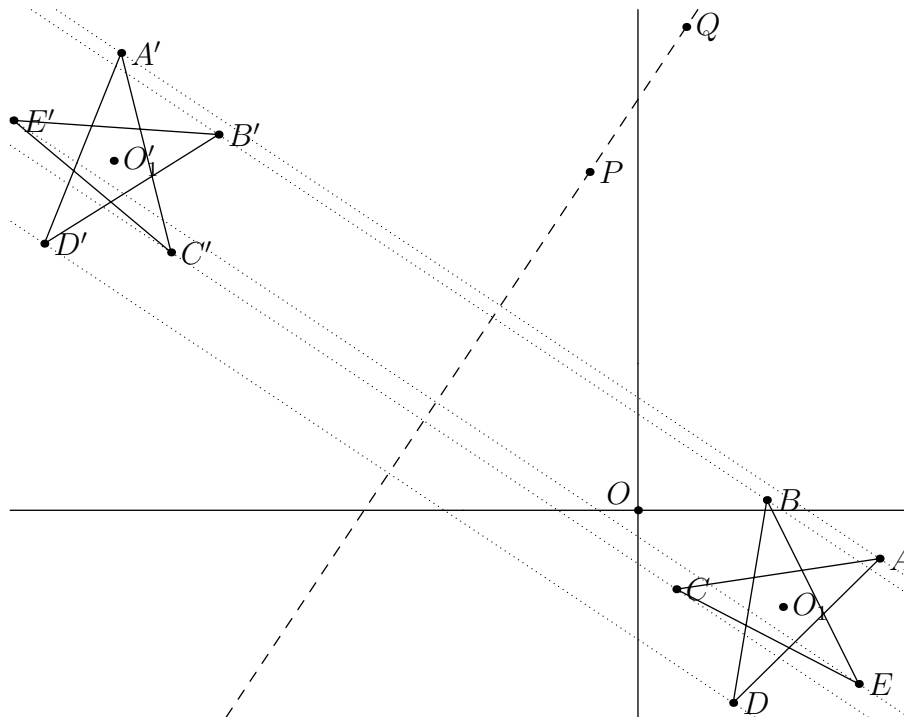
Leandro Marín Facultad de Ingeniería y Arquitectura Universidad de Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (5, 1) \\
 B &= (3,35796047807979, 1,26007351067010) \\
 C &= (2,60319775333258, -0,221231742082474) \\
 D &= (3,77876825791753, -1,39680224666742) \\
 E &= (5,26007351067010, -0,642039521920206) \\
 A' &= (-9,00000000000000, 15,0000000000000) \\
 B' &= (-8,73992648932990, 13,3579604780798) \\
 C' &= (-10,2212317420825, 12,6031977533326) \\
 D' &= (-11,3968022466674, 13,7787682579175) \\
 E' &= (-10,6420395219202, 15,2600735106701)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 278. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (3, -2)$ y con el vértice $A = (5, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-1, 7)$ y $Q = (1, 10)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

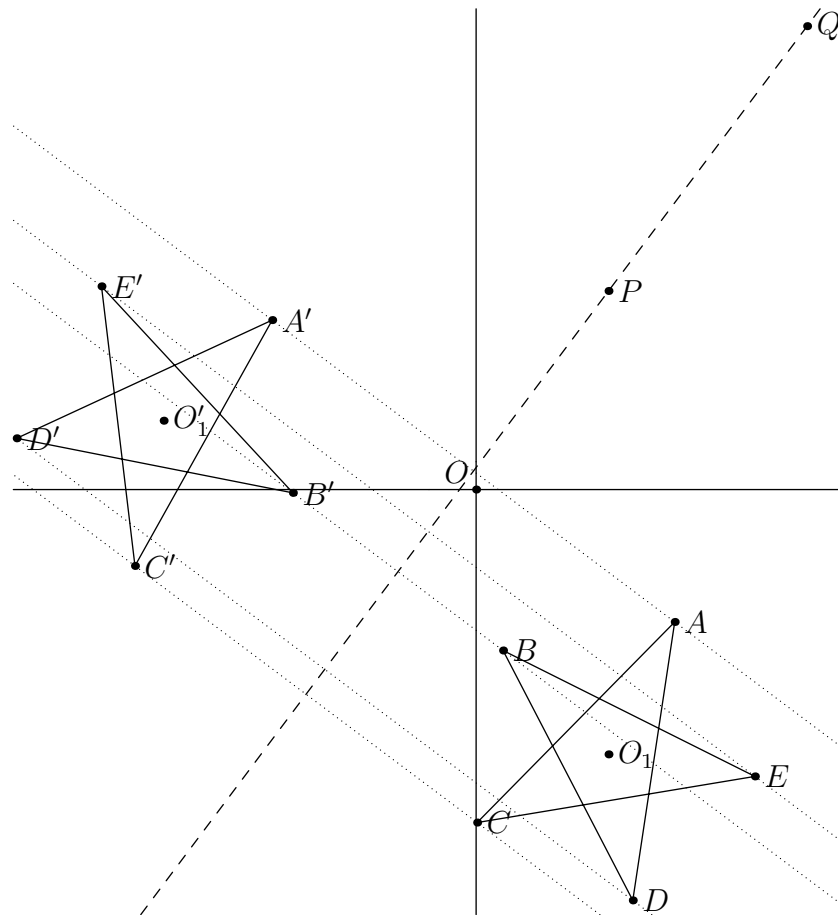
Leandro Marin Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
		Álgebra y Matemática Discreta	
		Aplicaciones Afines	

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (5, -1) \\
 B &= (2,66697747245474, 0,211130026965254) \\
 C &= (0,794180758957633, -1,63344648979000) \\
 D &= (1,96975126354258, -3,98458749895989) \\
 E &= (4,56909050504505, -3,59309603821536) \\
 A' &= (-10,6923076923077, 9,46153846153846) \\
 B' &= (-8,67702515682236, 7,77379844648332) \\
 C' &= (-9,65940474402063, 5,33561051219551) \\
 D' &= (-12,2818312542486, 5,51646751290088) \\
 E' &= (-12,9202003833700, 8,06643122072798)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 279. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, -4)$ y con el vértice $A = (3, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (5, 7)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

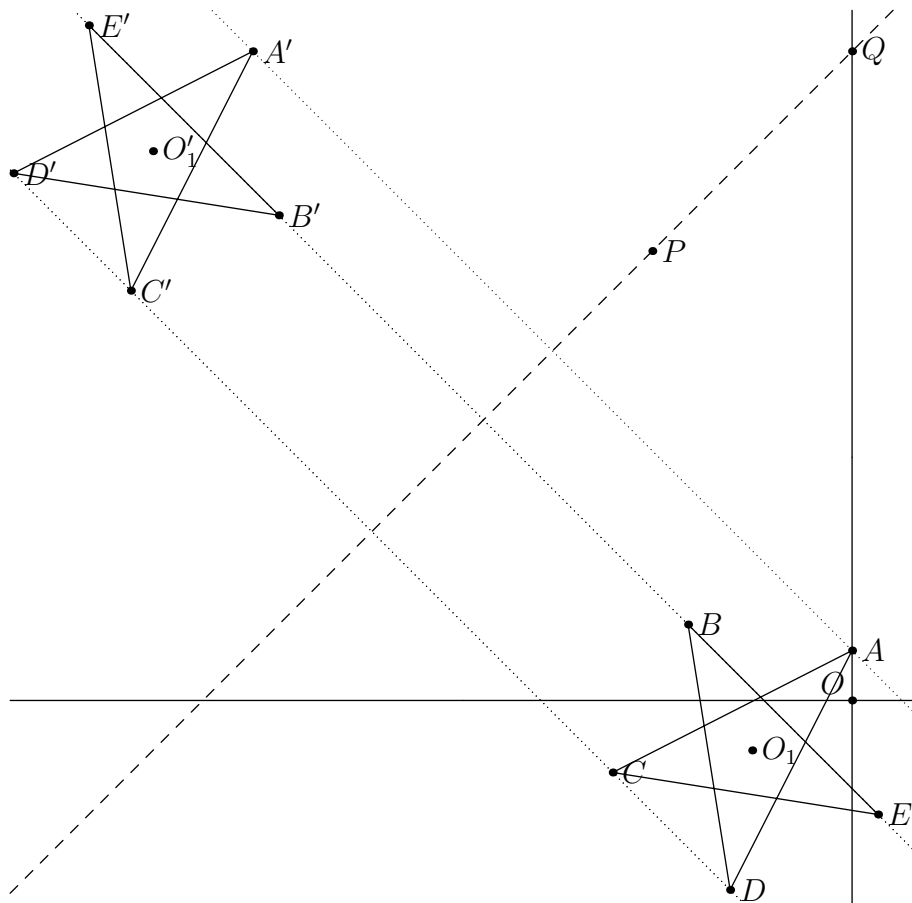
Leandro Marín Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (3, -2) \\
 B &= (0,406903961784640, -2,43090949495495) \\
 C &= (0,0154125010401063, -5,03024873645742) \\
 D &= (2,36655351021000, -6,20581924104237) \\
 E &= (4,21113002696525, -4,33302252754526) \\
 A' &= (-3,08000000000000, 2,56000000000000) \\
 B' &= (-2,76760622445645, -0,0500268552741318) \\
 C' &= (-5,15335428729036, -1,15367364520958) \\
 D' &= (-6,94022145425948, 0,774261982309735) \\
 E' &= (-5,65881803399372, 3,06943851817397)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 280. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-2, -1)$ y con el vértice $A = (0, 1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-4, 9)$ y $Q = (0, 13)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

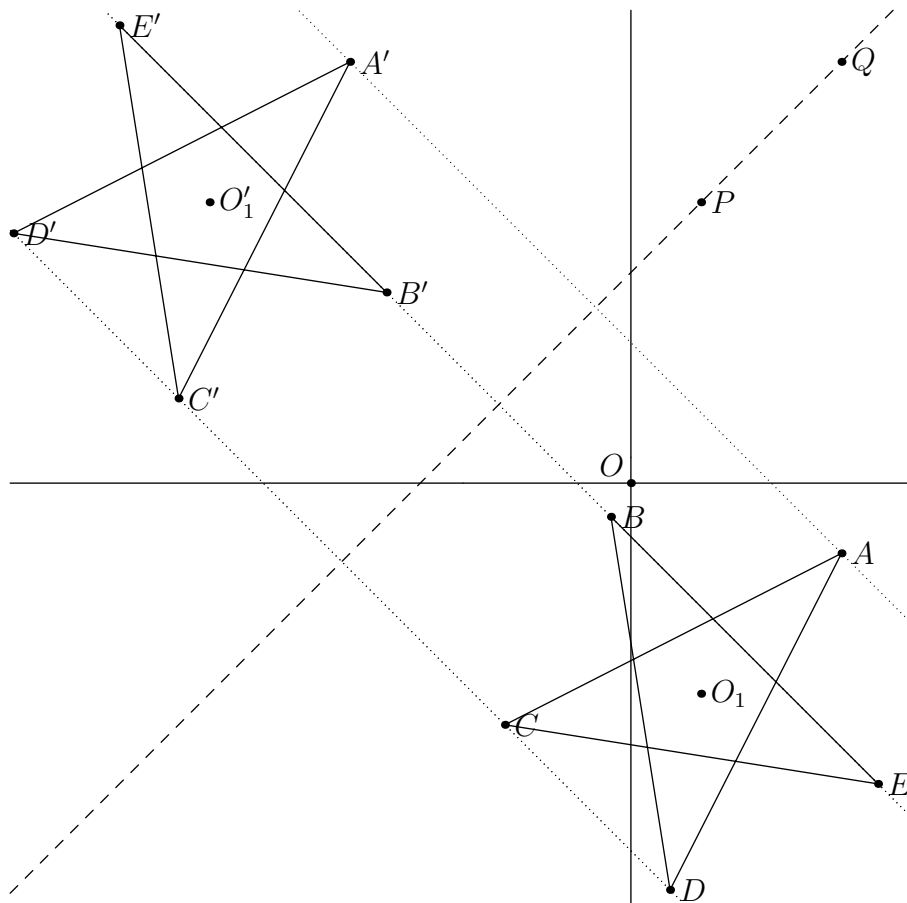
Leandro Marin Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, 1) \\
 B &= (-3, 28407904384041, 1, 52014702134020) \\
 C &= (-4, 79360449333484, -1, 44246348416495) \\
 D &= (-2, 44246348416495, -3, 79360449333484) \\
 E &= (0, 52014702134020, -2, 28407904384041) \\
 A' &= (-12, 0000000000000, 13, 0000000000000) \\
 B' &= (-11, 4798529786598, 9, 71592095615959) \\
 C' &= (-14, 4424634841649, 8, 20639550666516) \\
 D' &= (-16, 7936044933348, 10, 5575365158351) \\
 E' &= (-15, 2840790438404, 13, 5201470213402)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 281. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (1, -3)$ y con el vértice $A = (3, -1)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 6)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

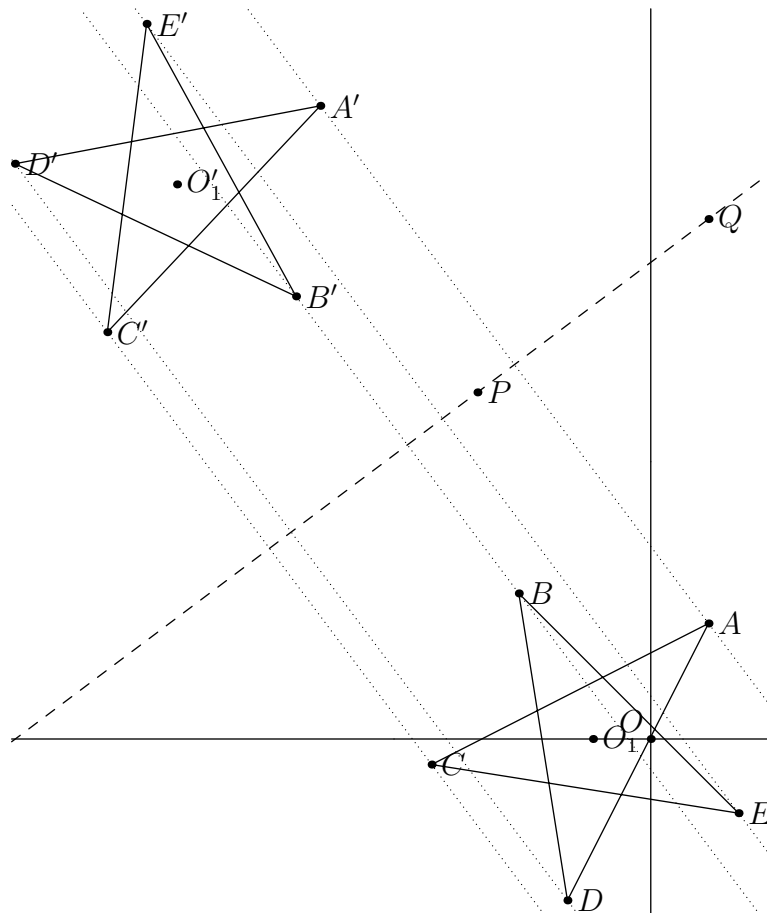
Leandro Marin Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (3, -1) \\
 B &= (-0,284079043840412, -0,479852978659798) \\
 C &= (-1,79360449333484, -3,44246348416495) \\
 D &= (0,557536515835051, -5,79360449333484) \\
 E &= (3,52014702134020, -4,28407904384041) \\
 A' &= (-4,00000000000000, 6,00000000000000) \\
 B' &= (-3,47985297865980, 2,71592095615959) \\
 C' &= (-6,44246348416495, 1,20639550666516) \\
 D' &= (-8,79360449333484, 3,55753651583505) \\
 E' &= (-7,28407904384041, 6,52014702134020)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 282. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (-1, 0)$ y con el vértice $A = (1, 2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-3, 6)$ y $Q = (1, 9)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

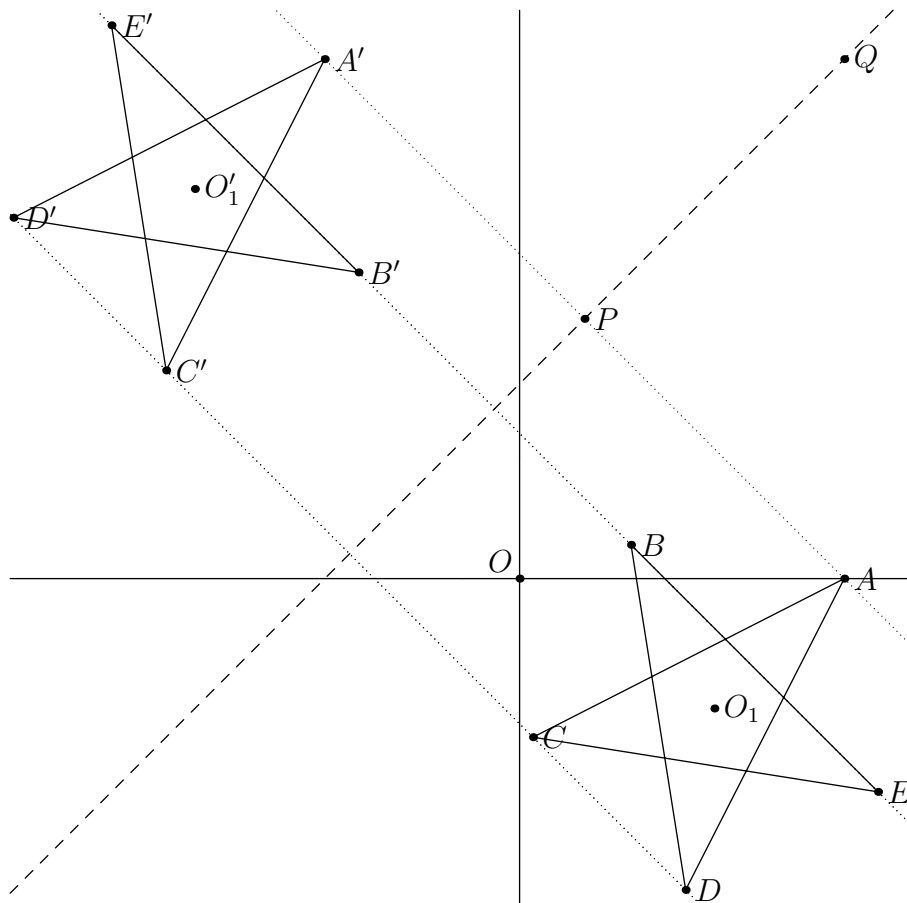
Leandro Marín Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
	Álgebra y Matemática Discreta			Previo: 60 min.
	Aplicaciones Afines			Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (1, 2) \\
B &= (-2, 28407904384041, 2, 52014702134020) \\
C &= (-3, 79360449333484, -0, 442463484164948) \\
D &= (-1, 44246348416495, -2, 79360449333484) \\
E &= (1, 52014702134020, -1, 28407904384041) \\
A' &= (-5, 72000000000000, 10, 96000000000000) \\
B' &= (-6, 14020099178872, 7, 66164295193795) \\
C' &= (-9, 40697420293210, 7, 04202946196474) \\
D' &= (-11, 0057500891676, 9, 95744431333541) \\
E' &= (-8, 72707471611154, 12, 3788832727619)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 283. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (3, -2)$ y con el vértice $A = (5, 0)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (1, 4)$ y $Q = (5, 8)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

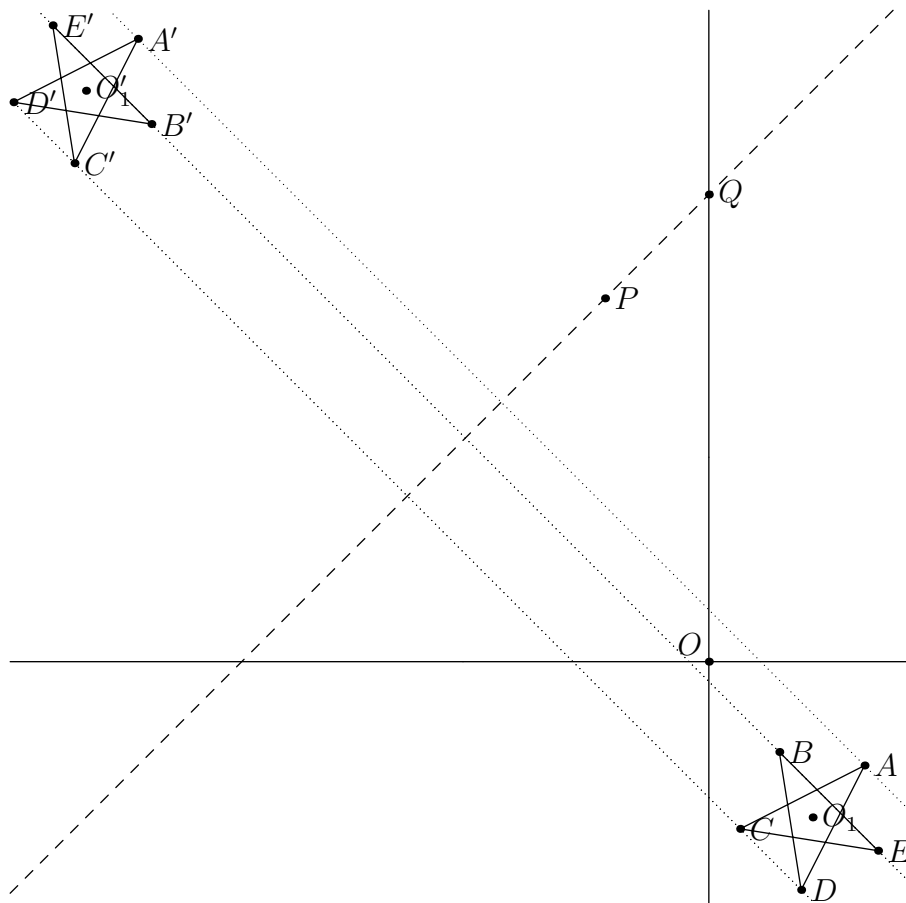
Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
A &= (5, 0) \\
B &= (1, 71592095615959, 0, 520147021340201) \\
C &= (0, 206395506665160, -2, 44246348416495) \\
D &= (2, 55753651583505, -4, 79360449333484) \\
E &= (5, 52014702134020, -3, 28407904384041) \\
A' &= (-3, 00000000000000, 8, 00000000000000) \\
B' &= (-2, 47985297865980, 4, 71592095615959) \\
C' &= (-5, 44246348416495, 3, 20639550666516) \\
D' &= (-7, 79360449333484, 5, 55753651583505) \\
E' &= (-6, 28407904384041, 8, 52014702134020)
\end{aligned}$$

◇

Ejercicio 284. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, -3)$ y con el vértice $A = (3, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (-2, 7)$ y $Q = (0, 9)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

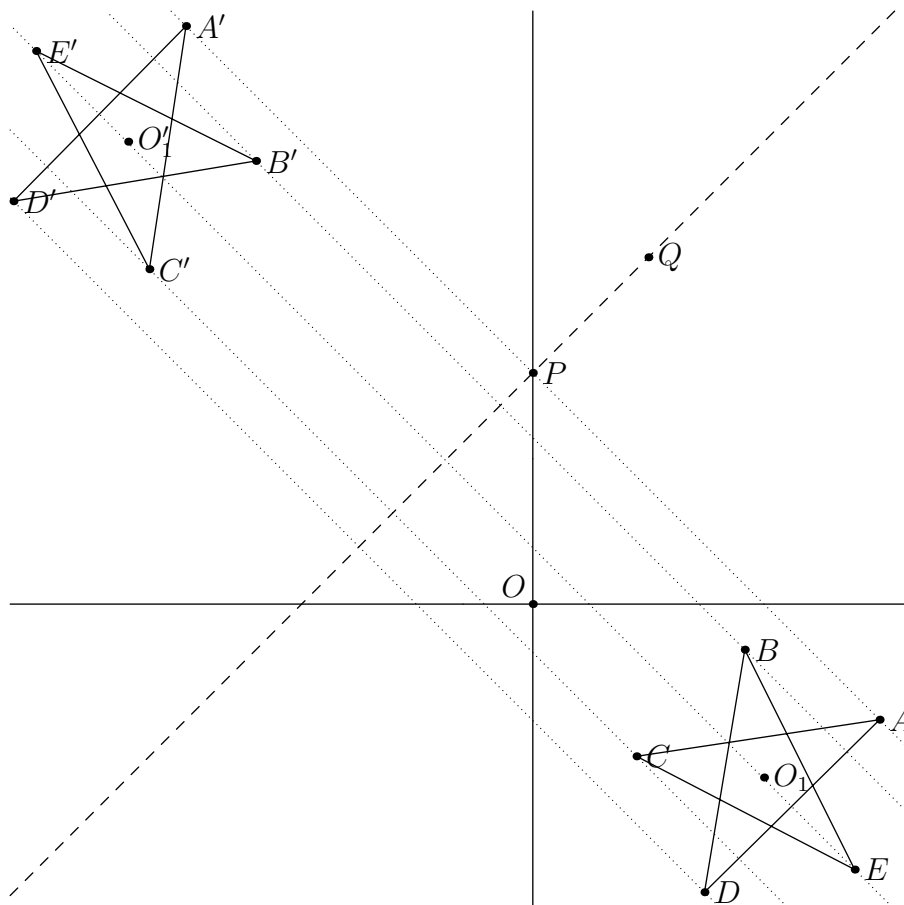
Leandro Marín Facultad de Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado	
		Álgebra y Matemática Discreta		Previo: 60 min.
		Aplicaciones Afines		Clase: 60 min.

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (3, -2) \\
 B &= (1,35796047807979, -1,73992648932990) \\
 C &= (0,603197753332580, -3,22123174208247) \\
 D &= (1,77876825791753, -4,39680224666742) \\
 E &= (3,26007351067010, -3,64203952192021) \\
 A' &= (-11,0000000000000, 12,0000000000000) \\
 B' &= (-10,7399264893299, 10,3579604780798) \\
 C' &= (-12,2212317420825, 9,60319775333258) \\
 D' &= (-13,3968022466674, 10,7787682579175) \\
 E' &= (-12,6420395219202, 12,2600735106701)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 285. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (4, -3)$ y con el vértice $A = (6, -2)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (0, 4)$ y $Q = (2, 6)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

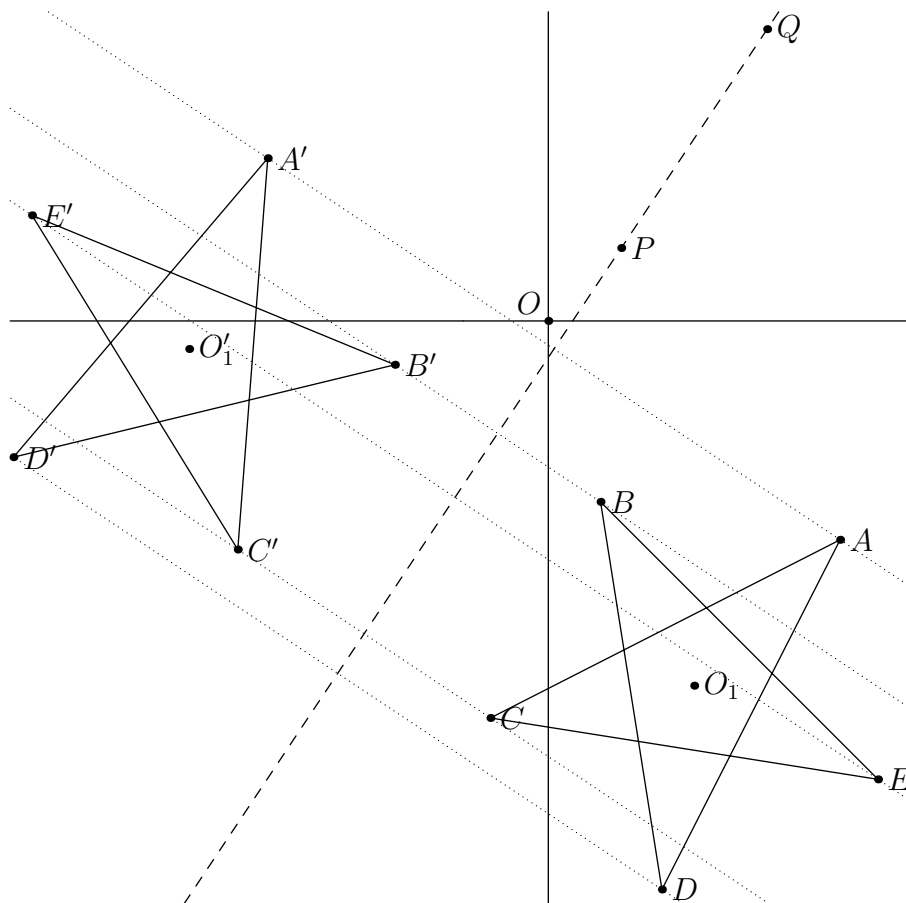
Leandro Marín Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
	Álgebra y Matemática Discreta		
	Aplicaciones Afines		

Solución:

$$\begin{aligned}
 A &= (6, -2) \\
 B &= (3,66697747245474, -0,788869973034746) \\
 C &= (1,79418075895763, -2,63344648979000) \\
 D &= (2,96975126354258, -4,98458749895989) \\
 E &= (5,56909050504505, -4,59309603821536) \\
 A' &= (-6,00000000000000, 10,0000000000000) \\
 B' &= (-4,78886997303475, 7,66697747245474) \\
 C' &= (-6,63344648979000, 5,79418075895763) \\
 D' &= (-8,98458749895989, 6,96975126354258) \\
 E' &= (-8,59309603821536, 9,56909050504505)
 \end{aligned}$$

◇

Ejercicio 286. Se dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el punto $O_1 = (2, -5)$ y con el vértice $A = (4, -3)$. El resto de los vértices se nombran B, C, D y E tal y como indica la figura. Posteriormente se hace una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por los puntos $P = (1, 1)$ y $Q = (3, 4)$.



Se pide calcular con cuatro decimales de precisión las coordenadas x e y de los vértices $A, B, C, D, E, A', B', C', D', E'$.

Leandro Marín  Facultad Informática Universidad Murcia	Grado en Ingeniería Informática		Tiempo Estimado Previo: 60 min. Clase: 60 min.
		Álgebra y Matemática Discreta	
		Aplicaciones Afines	

Solución:

$$A = (4, -3)$$

$$B = (0,715920956159588, -2,47985297865980)$$

$$C = (-0,793604493334840, -5,44246348416495)$$

$$D = (1,55753651583505, -7,79360449333484)$$

$$E = (4,52014702134020, -6,28407904384041)$$

$$A' = (-3,84615384615385, 2,23076923076923)$$

$$B' = (-2,10291080959350, -0,600631801491072)$$

$$C' = (-4,25704148794655, -3,13350548775714)$$

$$D' = (-7,33161049993795, -1,86750648281951)$$

$$E' = (-7,07766797175277, 1,44779761822157)$$

◇