Leandro Marín	Grado en Ingeniería Informática	Tiempo Estimado
	Álgebra y Matemática Discreta	Previo: 30 min.
	Combinaciones Afines	Clase: 60 min.

1. Resumen

Una de las propiedades fundamentales que definían los espacios vectoriales, era el hecho de que eran cerrados para combinaciones lineales, es decir, que cualquier combinación lineal de vectores de un espacio, seguía estando dentro del espacio. Los espacios vectoriales siempre se pueden poner como conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones homogéneos (lo que llamábamos ponerlos en forma implícita). Las variedades son conjuntos de soluciones de sistemas de ecuaciones que pueden no ser homogéneos. Es el caso de las rectas o los planos que no pasan por el origen. En este caso, por ejemplo, la suma de dos puntos de una recta que no pasa por el origen deja de pertenecer a la recta. Esto hace que no podamos hacer combinaciones arbitrarias de puntos, sin embargo existe un tipo de combinaciones lineales que sí estarán permitidas. Son las llamadas combinaciones afines.

Definición 1. *Sea L una variedad afín, $P_0, P_1, \cdots, P_t$ puntos de L. Llamaremos* **combinación afín** *de estos puntos a una cualquier combinación lineal $w_0P_0 + w_1P_1 + \cdots + w_tP_t$ que cumpla la condición de que $w_0 + w_1 + \cdots + w_t = 1$.*

Proposición 2. *Sea L una variedad afín, $P_0, P_1, \cdots, P_t \in L$ y $w_0, w_1, \cdots, w_t \in K$ tales que $w_0 + w_1 + \cdots + w_t = 1$. Entonces $w_0P_0 + w_1P_1 + \cdots + w_tP_t \in L$.*

Demostración. Supongamos que L está determinado por el sistema de ecuaciones $AX = B$, entonces $AP_i = B$ para todo i. Vamos a ver que $w_0P_0 + w_1P_1 + \cdots + w_tP_t \in L$ comprobando que cumple el sistema de ecuaciones: $A(w_0P_0 + \cdots + w_tP_t) = w_0AP_0 + \cdots + w_tAP_t = w_0B + \cdots + w_tB = (w_0 + \cdots + w_t)B = B$. □

Hemos visto que las variedades afines son cerradas para combinaciones afines, pero no necesariamente para combinaciones lineales porque si no serían espacios vectoriales. Para poder reducir el estudio de las combinaciones afines al caso de las combinaciones lineales usuales, podemos añadir una coordenada adicional igual a 1 que nos sirva para comprobar que la suma de los coeficientes es igual a 1. A este proceso lo llamaremos **escribir en coordenadas homogéneas**.

Definición 3. *Sea $P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ un punto de una variedad afín. Diremos que P está* **escrito en coordenadas homogéneas** *cuando escribamos P con una coordenada extra que tendrá el valor 1 y que escribiremos en la primera posición, es decir $\left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array}\right]$.*

Normalmente (sobre todo al principio) escribiremos una línea para diferenciar esta coordenada *artificial* de las otras, pero resulta incómodo y también podemos no hacerlo. En cualquier caso, siempre estará claro si estamos dando el punto en coordenadas homogéneas o no porque el tamaño de los vectores se incrementará en una posición. Vamos a ver cómo las coordenadas homogéneas reducen el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias.

Proposición 4. *Sean $P_0, P_1, \cdots, P_t$ y P puntos de $\mathcal{A}^m(K)$. Entonces P es combinación afín de los puntos $P_0, P_1, \cdots, P_t$ si y solo si $\left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P \end{array}\right]$ es combinación lineal de $\left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_1 \end{array}\right], \cdots, \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_t \end{array}\right]$.*

Demostración. Sean $w_0, w_1, \cdots, w_t \in K$. La condición

$$w_0 \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_0 \end{array}\right] + w_1 \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_1 \end{array}\right] + \cdots + w_t \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_t \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P \end{array}\right]$$

se descompone en dos, una condición para la primera coordenada y otra para el resto de coordenadas, es decir, es equivalente a que

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_t = 1 \quad \text{y} \quad w_0P_0 + w_1P_1 + \cdots + w_tP_t = P$$

pero estas son precisamente las condiciones que definen que P sea combinación afín de los puntos P_i. □

La propiedad de que cualquier combinación afín de puntos de una variedad afín sigue perteneciendo a una variedad afín se puede utilizar para caracterizar las variedades afines generadas por un conjunto de puntos.

Definición 5. *Sean $P_0, P_1, \cdots, P_t$ puntos de $\mathcal{A}^m(K)$. Llamaremos* **variedad afín generada por estos puntos** *al conjunto L formado por todas las combinaciones afines de dichos puntos.*

Para comprobar que efectivamente es una variedad afín vamos a ver con un ejemplo la forma de calcularla.

Ejercicio 6. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2\\4\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2\\4\\3\\4\\3\\2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 3\\3\\1\\2\\2\\1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1\\2\\4\\1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1\\2\\4\\3\\4\\3\\2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1\\3\\3\\1\\2\\2\\1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 2&2&3&0&1&0&0&0&0&0\\ 4&4&3&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&3&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&4&2&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&3&2&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&2&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&4&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&2&0&0&0&1&0&2\\ \hline 0&0&0&1&0&0&1&0&0&3\\ 0&0&0&1&1&0&0&4&0&3\\ 0&0&0&4&0&0&0&4&1&1\\ 0&0&0&3&0&1&0&1&0&2 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_3 + 3x_6 &= 0\\ x_0 + x_1 - x_4 + 3x_6 &= 0\\ -x_0 - x_4 + x_5 + x_6 &= 0\\ 3x_0 + x_2 + x_4 + 2x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_3 + 3x_6 &= 4 \\ x_1 - x_4 + 3x_6 &= 4 \\ -x_4 + x_5 + x_6 &= 1 \\ x_2 + x_4 + 2x_6 &= 2 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Este es el método general para calcular la variedad afín generada por un conjunto de puntos, sin embargo existen dos casos muy importantes que se pueden hacer de una forma más directa utilizando determinantes. Son la recta que pasa por dos puntos distintos del plano y el plano que pasa por tres puntos no alineados en el espacio tridimensional.

Proposición 7. *La ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos del plano* $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ *y* $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ *es*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demostración. El punto $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ estará en la recta que pasa por $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ si y solo si es combinación afín de dichos puntos, y eso es equivalente a que las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

sean linealmente dependientes, y eso es es lo mismo que decir que el determinante de la matriz sea 0. $\square$

Ejemplo 8. *La recta que pasa por los puntos* $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *y* $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ *es* $0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 2x_1 + 2x_2$, *es decir,* $2x_1 + 2x_2 = 6$, *o lo que es lo mismo,* $x_1 + x_2 = 3$.

En el caso del plano la demostración es similar

Proposición 9. *Sean* $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ *tres puntos no alineados del espacio tridimensional. La ecuación del plano que pasa por dichos puntos es*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hemos definido la variedad afín generada por unos puntos. Cuando los puntos generen toda una variedad los llamaremos generadores.

Definición 10. *Dada una familia de puntos P_i de una variedad afín L, diremos que son* **generadores de** L *cuando la variedad generada por ellos sea todo L.*

También podemos extender el concepto de puntos linealmente independientes, que se hará utilizando las coordenadas homogéneas:

Definición 11. *Sean $P_0, P_1, \cdots, P_t$ puntos de $\mathcal{A}^m(K)$. Diremos que estos puntos son* **linealmente independientes** *si $\begin{bmatrix} 1 \\ P_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ P_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 1 \\ P_t \end{bmatrix}$ son linealmente independientes en K^{m+1}.*

Los puntos linealmente independientes y generadores nos permiten definir un nuevo tipo de coordenadas que depende enteramente de los puntos, sin que el espacio vectorial asociado a la variedad tenga un papel relevante.

Definición 12. *Sea L una variedad afín. Un* **sistema de referencia baricéntrico** *consistirá en $n+1$ puntos $P_0, P_1, \cdots, P_n \in L$ linealmente independientes y generadores. Dado un punto $P \in L$, llamaremos* **coordenadas baricéntricas del punto** *P en este sistema de referencia a los valores $x_0, x_1, \cdots, x_n$ de la combinación afín que nos da P en función de dichos puntos $P = x_0P_0 + x_1P_1 + \cdots + x_nP_n$.*

Ejercicio 13. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Ejercicio 14. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} -x_0 + 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_0 + x_1 - 2x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_0 + x_1 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_5 &= -1 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 15. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x_0 + x_4 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_0 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones

de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_3 &= -2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 16. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} 3x_0 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_0 - 2x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 &= -3 \\ -2x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 17. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} -x_0 + x_2 &= 0 \\ x_0 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -x_0 + 2x_1 + x_5 &= 0 \\ x_3 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ x_4 + 2x_5 &= -1 \\ 2x_1 + x_5 &= 1 \\ x_3 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 18. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_3}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{16}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} -2x_0 + 8x_2 + 3x_3 - 4x_5 &= 0 \\ -2x_0 - 16x_2 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_0 + 3x_1 + 4x_2 + 4x_5 &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones

de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 8x_2 + 3x_3 - 4x_5 &= 2 \\ -16x_2 + 3x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_5 &= -2 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 19. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_0 - 2x_2 + x_5 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 &= 0 \\ -2x_0 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_4 &= -1 \\ -2x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1 &= -2 \\ -2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 20. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$*,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_4 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_0 - 5x_1 + 2x_5 &= 0 \\ x_0 - 3x_1 + 2x_6 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= -1 \\ x_1 + x_3 &= -2 \\ -5x_1 + 2x_5 &= 1 \\ -3x_1 + 2x_6 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 21. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_3}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \frac{9}{4} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} 3x_0 + 2x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ -6x_0 - 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 8x_0 + 4x_1 + 9x_3 + 4x_5 + 4x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= -3 \\ -2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 9x_3 + 4x_5 + 4x_6 &= -8 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 22. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \hline P_i\end{array}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x_0 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_0 + x_1 &= 0 \\ x_0 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_0 - x_3 + x_6 &= 0 \\ 2x_3 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= -1 \\ -x_3 + x_6 &= 2 \\ 2x_3 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 23. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} -4x_0 + x_2 - 2x_4 &= 0 \\ -3x_0 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -4x_0 + x_1 - 2x_4 &= 0 \\ x_0 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ -9x_0 - 5x_4 + 2x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_4 &= 4 \\ x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_4 &= 4 \\ x_4 + 2x_5 &= -1 \\ -5x_4 + 2x_6 &= 9 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 24. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{7}{2} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 4x_0 + 7x_1 - 2x_2 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_4 &= -1 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_5 &= -4 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 25. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_3}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{13}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} -2x_0 + x_1 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -5x_0 + 2x_1 + x_2 + 10x_3 &= 0 \\ 16x_0 - 7x_1 - 26x_3 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones

de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 &= 5 \\ -7x_1 - 26x_3 + 4x_5 &= -16 \\ 2x_3 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 26. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x_0 + x_3 &= 0 \\ -2x_0 + x_2 &= 0 \\ 3x_0 + 5x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ 5x_4 + x_5 &= -3 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 27. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_i \end{array}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} 2x_0 - x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 2x_0 + 2x_1 + 3x_3 &= 0 \\ x_0 + 2x_4 &= 0 \\ -x_0 - x_1 + 6x_6 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} -x_1 + 6x_2 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_4 &= -1 \\ -x_1 + 6x_6 &= 1 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 28. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$*,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} -2x_0 + x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_0 - x_1 + 3x_3 &= 0 \\ -7x_0 + 2x_1 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 2 \\ -x_1 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 6x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 29. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_6 &= 0 \\ -2x_0 + 2x_1 + x_4 &= 0 \\ 2x_0 - 2x_1 + x_5 &= 0 \\ -5x_0 + 3x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_6 &= -1 \\ 2x_1 + x_4 &= 2 \\ -2x_1 + x_5 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 30. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} 2x_0 + 2x_1 - 7x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_0 - 2x_2 + x_5 &= 0 \\ -x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 2x_1 - 7x_2 - x_3 &= -2 \\ -2x_2 + x_5 &= -2 \\ -x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 31. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} -x_0 + x_3 &= 0 \\ -2x_0 + x_1 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 32. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} -2x_0 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 0 \\ -2x_0 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_0 + x_2 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} -3x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 2 \\ 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_2 + x_6 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 33. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones (quitando denominadores):

$$\begin{aligned} 6x_0 - 2x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} -2x_2 + 2x_4 + 3x_5 &= -6 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 34. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x_0 + x_2 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_0 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_0 + 3x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_0 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 3 \\ 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_3 + x_5 &= 2 \\ x_6 &= 1 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 35. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_0 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$\lozenge$

Ejercicio 36. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_3 &= 0 \\ 3x_0 + x_2 &= 0 \\ -x_0 + x_4 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 \\ x_2 &= 2 \\ x_4 &= 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 37. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 - x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_0 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_0 + x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_0 + 2x_2 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} -x_2 + x_4 &= 4 \\ -x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 2x_2 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 38. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_0 + x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_0 + x_2 &= 0 \\ 3x_0 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 3x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 39. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_3}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_2 + x_4 - x_6 &= 0 \\ 3x_0 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_6 &= 0 \\ -x_2 + x_5 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_4 - x_6 &= 4 \\ 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_6 &= 0 \\ -x_2 + x_5 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 40. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_2 &= 0 \\ 2x_0 + 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 41. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_0 + x_3 &= 0 \\ 3x_0 + x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 3x_4 + x_5 &= 4 \\ x_3 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 42. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_0 + 2x_1 + x_2 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_5 &= 3 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 43. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$*,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_0 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_0 + x_1 &= 0 \\ -x_0 + 3x_2 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 &= 1 \\ 3x_2 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 44. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + 2x_2 + x_5 &= 0 \\ 3x_0 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_0 + x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_0 + x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_5 &= 4 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 45. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right]=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\\1\\3\\3\end{bmatrix},\left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right]=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\2\\0\\2\\1\end{bmatrix},\left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right]=\begin{bmatrix}1\\0\\4\\4\\4\\0\\0\end{bmatrix},\left[\frac{\mathbf{1}}{P_3}\right]=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\\3\\3\\2\end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc}1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\2&3&0&2&0&1&0&0&0&0&0\\1&1&4&1&0&0&1&0&0&0&0\\3&2&4&3&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&4&3&0&0&0&0&1&0&0\\3&2&0&3&0&0&0&0&0&1&0\\3&1&0&2&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc}1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&3&0&3&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&2&2&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&2&2&2&0&1&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&4&3&1&3&0&0&0\\0&0&0&0&4&1&0&1&3&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}-x_0+3x_1+x_2+3x_3&=0\\-x_0+x_1+x_3+3x_4+x_6&=0\\x_1+x_5&=0\end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0=1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned}3x_1+x_2+3x_3&=1\\x_1+x_3+3x_4+x_6&=1\\x_1+x_5&=0\end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 46. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0=\begin{bmatrix}2\\4\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix},P_1=\begin{bmatrix}3\\2\\4\\0\\1\\0\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\3\\3\\2\end{bmatrix},P_3=\begin{bmatrix}4\\1\\2\\2\\2\\4\end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1\\2\\4\\0\\1\\0\\1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1\\3\\2\\4\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1\\1\\3\\0\\3\\3\\2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_3}\right] = \begin{bmatrix} 1\\4\\1\\2\\2\\2\\4 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc} 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 2&3&1&4&0&1&0&0&0&0&0\\ 4&2&3&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&4&0&2&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&3&2&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&3&2&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&2&4&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc} 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&4&2&3&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&3&2&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&2&0&2&0&1&1&0&0\\ \hline 0&0&0&0&3&0&1&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&4&2&0&1&2&1&0\\ 0&0&0&0&2&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_0 + x_2 + 3x_4 &= 0\\ -x_0 + 2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0\\ 2x_0 + x_1 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_4 &= 2\\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1\\ x_1 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 47. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0\\0\\3\\3\\1\\1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3\\1\\3\\3\\4\\2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2\\1\\3\\2\\2\\1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_i \end{bmatrix}$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_0 + x_3 &= 0 \\ 2x_0 - x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_5 &= 0 \\ -x_0 - x_1 + 2x_2 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 48. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x_0 + 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_0 + x_4 &= 0 \\ -x_0 + x_5 &= 0 \\ 3x_0 + x_1 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones

de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= 1 \\ x_1 + x_6 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 49. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_4 + 3x_6 &= 0 \\ x_0 + x_5 + 3x_6 &= 0 \\ 3x_0 + x_2 &= 0 \\ 2x_0 + x_3 + 2x_6 &= 0 \\ 3x_0 + x_1 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_4 + 3x_6 &= 4 \\ x_5 + 3x_6 &= 4 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 + 2x_6 &= 3 \\ x_1 + x_6 &= 2 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 50. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 + x_4 &= 0 \\ -x_0 + 2x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_0 - x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} -x_1 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$\lozenge$

Ejercicio 51. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_0 + x_4 &= 0 \\ 3x_0 + x_1 + x_5 &= 0 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 3 \\ x_4 &= 1 \\ x_1 + x_5 &= 2 \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 52. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x_0 + x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -x_0 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_0 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 53. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_0 + 3x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_0 + x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 54. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_2 &= 0 \\ -x_0 + x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_0 + x_5 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_5 &= 1 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 55. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_6 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_6 &= 0 \\ -x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 56. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \hline P_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_0 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_0 - x_2 - x_3 + x_6 &= 0 \\ -x_0 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_3 + x_5 &= 2 \\ -x_2 - x_3 + x_6 &= 2 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 57. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \hline P_0\end{array}\right] = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\2\\1\end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \hline P_1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}1\\0\\2\\2\\2\\1\end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^6$ generado por los $\left[\begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \hline P_i\end{array}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc}1&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&0&1&0&0\\2&2&0&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc}1&1&1&0&0&0&0&0\\0&2&2&1&0&0&0&0\\ \hline 0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&1&2&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_0 - x_1 + x_2 &= 0\\ x_0 - x_1 + x_3 &= 0\\ x_0 + x_4 &= 0\\ -x_0 + x_5 &= 0\end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned}-x_1 + x_2 &= 2\\ -x_1 + x_3 &= 2\\ x_4 &= 2\\ x_5 &= 1\end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 58. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\\1\\1\end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\\2\\0\end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\1\\2\end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\\2\\0\end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right]=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\\1\\1\\1\end{bmatrix},\left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right]=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\2\\2\\0\end{bmatrix},\left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right]=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\1\\2\end{bmatrix},\left[\frac{\mathbf{1}}{P_3}\right]=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\2\\2\\0\end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc}1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\2&0&2&0&0&0&0&1&0&0&0\\1&2&2&2&0&0&0&0&1&0&0\\1&2&1&2&0&0&0&0&0&1&0\\1&0&2&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc}1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&1&2&0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0&0&2&0&1&0\\0&0&0&0&1&2&0&2&0&0&1\\0&0&0&0&2&2&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&2&1&0&0&0&0\end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_0-x_3+x_5&=0\\x_0-x_1-x_3+x_6&=0\\-x_0-x_1+x_4&=0\\-x_1+x_2&=0\end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0=1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned}-x_3+x_5&=2\\-x_1-x_3+x_6&=2\\-x_1+x_4&=1\\-x_1+x_2&=0\end{aligned}$$

◊

Ejercicio 59. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix},P_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^5$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 60. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right]=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right]=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc}1&1&1&0&0&0&0&0\\0&2&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cccccc}1&1&1&0&0&0&0&0\\0&2&0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&2&2&1&0&0&0\\0&0&2&2&0&1&0&0\\0&0&2&2&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}-x_0-x_1+x_2&=0\\-x_0-x_1+x_3&=0\\-x_0-x_1+x_4&=0\\-x_0+x_5&=0\end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0=1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned}-x_1+x_2&=1\\-x_1+x_3&=1\\-x_1+x_4&=1\\x_5&=1\end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 61. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix},P_1=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\1\\1\\0\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\\0\\2\end{bmatrix},P_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\\0\\2\end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^7$ generado por los $\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline P_i \end{bmatrix}$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x_0 - x_1 + x_4 &= 0 \\
x_0 + x_1 + x_6 &= 0 \\
x_1 - x_2 + x_5 &= 0 \\
-x_1 + x_3 &= 0
\end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_4 &= 2 \\
x_1 + x_6 &= 2 \\
x_1 - x_2 + x_5 &= 0 \\
-x_1 + x_3 &= 0
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Ejercicio 62. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^6(\mathbb{Z}_3)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^7$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_0 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_0 + x_2 + x_5 &= 0 \\ -x_2 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones

de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ -x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_5 &= 1 \\ -x_2 + x_6 &= 0 \end{aligned}$$

◊

Ejercicio 63. *Calcular la variedad afín generada por los siguentes puntos de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: Vamos a empezar considerando los puntos en coordenadas homogéneas

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{P_0}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_1}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \left[\frac{\mathbf{1}}{P_2}\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vamos a calcular la forma implícita del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_3^6$ generado por los $\left[\frac{\mathbf{1}}{P_i}\right]$ haciendo la reducción de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

lo que nos da la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

que se corresponde con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_0 + x_4 &= 0 \\ -x_0 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

De entre estos valores tendremos que seleccionar los que realmente son puntos (necesariamente $x_0 = 1$) y escribiremos las ecuaciones pasando estos valores al segundo miembro como suele ser habitual. Las ecuaciones de la variedad afín generada por los puntos es

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 \\ x_3 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Ejercicio 64. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{46}{31} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{66}{31} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{46}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{48}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{79}{31} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{46}{31} \\ \frac{66}{31} \\ \frac{46}{31} \\ -\frac{48}{31} \\ -\frac{79}{31} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 65. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.
Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 66. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ◊

Ejercicio 67. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\diamondsuit$

Ejercicio 68. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_4 P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{37} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{26}{37} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{23}{37} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{12}{37} \\ \frac{26}{37} \\ -\frac{8}{37} \\ -\frac{16}{37} \\ \frac{23}{37} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 69. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_5 P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que

$x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{82}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{50} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{123}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{53}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{89}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{29}{25} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{82}{25} \\ \frac{9}{50} \\ \frac{123}{25} \\ \frac{53}{25} \\ -\frac{89}{50} \\ -\frac{29}{25} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 70. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín* $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i *forman un sistema de referencia baricéntrico de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$ *y calcular las coordenadas baricéntricas del punto* P *en este sistema de referencia.*

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema

de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{22}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{19}{3} \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{22}{3} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ♢

Ejercicio 71. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema

de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{93}{56} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{28} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{83}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{255}{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{93}{56} \\ -\frac{5}{28} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{83}{14} \\ -\frac{255}{56} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ♢

Ejercicio 72. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_4 P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 73. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{68}{41} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{168}{41} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{41} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{67}{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{114}{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{25}{41} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{68}{41} \\ -\frac{168}{41} \\ -\frac{15}{41} \\ \frac{67}{41} \\ \frac{114}{41} \\ -\frac{25}{41} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 74. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_4 P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{93}{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{22}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{21}{34} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{20}{17} \\ \frac{93}{34} \\ -\frac{22}{17} \\ \frac{2}{17} \\ \frac{21}{34} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 75. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{49} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{98} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{41}{49} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{64}{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{23}{49} \\ -\frac{29}{98} \\ -\frac{41}{49} \\ \frac{64}{49} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 76. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{76}{49} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{220}{49} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{22}{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{49} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{76}{49} \\ -\frac{10}{7} \\ \frac{220}{49} \\ -\frac{22}{49} \\ -\frac{3}{49} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 77. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 78. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que

$x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ -\frac{19}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 79. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_5 P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1502}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1663}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1301}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{437}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2122}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1436}{17} \end{array}\right] \qquad X = \left[\begin{array}{r} \frac{1502}{17} \\ -\frac{1663}{17} \\ \frac{1301}{17} \\ -\frac{437}{17} \\ -\frac{2122}{17} \\ \frac{1436}{17} \end{array}\right].$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\diamondsuit$

Ejercicio 80. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\begin{array}{r} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right], P_1 = \left[\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right], P_2 = \left[\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array}\right], P_3 = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right], P_4 = \left[\begin{array}{r} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array}\right], P = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right]$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\left[\begin{array}{c} 1 \\ P_i \end{array}\right]$ en la siguiente matriz:

$$B = \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right]$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{29}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right] \qquad X = \left[\begin{array}{r} -12 \\ 2 \\ \frac{11}{2} \\ \frac{29}{2} \\ -9 \end{array}\right].$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 81. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.
Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 82. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{21} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{55}{168} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{193}{168} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{15}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{31}{42} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} -\frac{17}{21} \\ \frac{55}{168} \\ \frac{193}{168} \\ \frac{15}{14} \\ -\frac{31}{42} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ♢

Ejercicio 83. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 84. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 85. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 86. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 87. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 88. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 89. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que

$x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 90. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 91. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín* $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4\\4\\3\\1\\1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 4\\0\\3\\0\\0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\2\\1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\4\\2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 4\\3\\3\\3\\4 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 1\\3\\3\\2\\2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1\\1\\4\\4\\0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i *forman un sistema de referencia baricéntrico de* $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$ *y calcular las coordenadas baricéntricas del punto* P *en este sistema de referencia.*

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1\\P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\4&4&0&0&4&1\\4&0&0&0&3&3\\3&3&0&0&3&3\\1&0&2&4&3&2\\1&0&1&2&4&2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\4&4&0&0&4&1\\4&0&0&0&3&3\\3&3&0&0&3&3\\1&0&2&4&3&2\\1&0&1&2&4&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0\\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\4\\4\\0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1&1&1&1&1&1&1\\4&4&0&0&4&1&1\\4&0&0&0&3&3&1\\3&3&0&0&3&3&4\\1&0&2&4&3&2&4\\1&0&1&2&4&2&0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&2\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&3\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&0&1&2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2\\0\\3\\0\\4\\2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 92. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_5 P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 93. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.
Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 94. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.
Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ◊

Ejercicio 95. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.
Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 96. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_5 P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 97. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_4 P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 98. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.
Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 99. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 100. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema

de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 101. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 102. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_5 P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 103. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_5)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_3 P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 104. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_4P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ♢

Ejercicio 105. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 106. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que

$x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ♢

Ejercicio 107. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^4(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 5. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_4$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_4 P_4 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_4 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ◊

Ejercicio 108. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 109. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0 P_0 + \cdots + x_3 P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 110. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 111. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín* $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$,

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^5(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 6. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_5$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_5P_5 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_5 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$

Ejercicio 112. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que

$x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. ◊

Ejercicio 113. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio afín $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que los puntos P_i forman un sistema de referencia baricéntrico de $\mathcal{A}^3(\mathbb{Z}_3)$ y calcular las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia.

Solución: Para reducir el problema de las combinaciones afines a combinaciones lineales ordinarias, vamos a introducir las coordenadas homogéneas y vamos a poner los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ P_i \end{bmatrix}$ en la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La pregunta de si estos puntos son linealmente independientes o generadores queda reducida a saber si las columnas de la matriz B son linealmente independientes o generadoras. Por lo tanto, para demostrar que es un sistema de referencia baricéntrico tenemos que comprobar que el rango de la matriz B es precisamente 4. Esto lo podemos hacer de muchas formas, por ejemplo haciendo una reducción por filas.

Para encontrar las coordenadas baricéntricas del punto P en este sistema de referencia, tenemos que encontrar valores $x_0, \cdots, x_3$ tales que $x_0P_0 + \cdots + x_3P_3 = P$ y que cumplan la condición adicional de que $x_0 + \cdots + x_3 = 1$. Añadiendo la coordenada homogénea 1, este problema es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada del sistema podemos entontrar los valores x_i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con esta reducción, también comprobamos que los puntos son efectivamente un sistema de referencia baricéntrico porque en la parte izquierda nos queda la matriz identidad. Además, la suma de las coordenadas baricéntricas es 1 porque la coordenada homogénea nos garantiza esta condición. $\Diamond$