1. Resumen

1.1. Preliminares

Sea K un cuerpo y sean A y B dos matrices no nulas del mismo tamaño sobre este cuerpo. Diremos que A y B son **equivalentes** si existe $\lambda \in K$ (que necesariamente tendrá que ser no nulo) tal que $A = \lambda B$. Así por ejemplo las matrices $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right]$ son equivalentes. Al conjunto de matrices equivalentes a una matriz A lo denotaremos $[A] = \{\lambda A : \lambda \in K, \lambda \neq 0\}$. Este conjunto se denota también habitualmente como $\pi(A)$, especialmente en el caso de matrices columna (vectores). Utilizaremos ambas notaciones a lo largo de este tema. Cuando utilizemos matrices concretas, escribiremos el doble corchete de la matriz con un único símbolo, así escribiremos habitualmente $[\![\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}]\!]$ en lugar de $\left[\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]\right]$ ó $\pi\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]\right)$ aunque cualquiera de las notaciones será correcta.

Si A es una matriz no nula y μ es un elemento no nulo de K, el conjunto de múltiplos no nulos de A y μA es el mismo, puesto que en lo único que se diferencian es el orden, por lo tanto $[A] = [\lambda A]$. Esta propiedad de cancelar las constantes no nulas cuando estemos considerando las matrices salvo múltiplos no nulos será muy habitual en los cálculos, así que debemos estar atentos a estas simplificaciones. (Es lo mismo que cuando en aritmética módulo 5 reemplazábamos un 6 por un 1 o viceversa sin necesidad de estar contínuamente justificando el cambio).

Cuando consideremos las matrices con esta relación de equivalencia debemos tener presente que no podemos escribir $[A] + [C] = [A + C]$ puesto que los múltiplos que afectan a la matriz A y a la matriz C pueden ser diferentes, lo que nos podría llevar a contradicciones como por ejemplo

$$[\![\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}]\!] + [\![\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]\!] = [\![\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}]\!] \neq [\![\begin{smallmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}]\!] = [\![\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}]\!] + [\![\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]\!].$$

Sin embargo, en el producto de matrices sí podemos escribir $[AB] = [A][B]$ puesto que para todo $\lambda, \mu \in K$ distintos de 0, tenemos que $[AB] = [A][B] = [(\lambda A)][(\mu B)] = [(\lambda\mu)AB]$. El hecho de que esta propiedad se comporte bien para productos, hará que podamos definir las inversas laterales o las inversas de matrices "salvo múltiplos no nulos".

1.2. Definiciones Básicas

Definición 1. *Sea V un subespacio vectorial no nulo de K^{m+1} de dimensión $n+1$.*

1. *Sea $v \in V$ un vector no nulo. Llamaremos* **punto proyectivo representado por el vector** v *al conjunto $[v]$ de múltiplos no nulos del vector v.*

2. *Llamaremos* **espacio proyectivo asociado a** V **y lo denotaremos** $\mathcal{P}(V)$ *al conjunto de todos los puntos representados por vectores no nulos de V.*

3. *Llamaremos* **dimensión del espacio proyectivo** $\mathcal{P}(V)$ *a $n = \mathsf{dim}(V) - 1$. A los espacios proyectivos de dimensión 0 los llamaremos puntos, a los de dimensión 1 rectas y a los de dimensión 2 planos.*

4. *En el caso particular de $V = K^{n+1}$, utilizaremos la notación $\mathcal{P}(K^{n+1}) = \mathcal{P}^n(K)$ que es la forma canónica del espacio proyectivo de dimensión n.*

Cuando el número de elementos de K es finito, podemos determinar el número de elementos del espacio proyectivo.

Proposición 2. *El número de puntos de una recta proyectiva sobre un cuerpo finito K es $|K| + 1$. El del plano proyectivo es $|K|^2 + |K| + 1$. En general, el número de elementos de un espacio proyectivo de dimensión n es $|K|^n + |K|^{n-1} + \cdots + 1$.*

Demostración. El número de elementos de K^{n+1} es $|K|^{n+1}$ y si quitamos el elemento 0, tendremos $|K|^{n+1} - 1$ elementos. Estos elementos se distribuyen en clases de equivalencia y cada vector v es equivalente a todos los de la forma λv con $\lambda \in K$, pero el valor $\lambda = 0$ no es válido y por lo tanto cada clase de equivalencia tiene

$|K|-1$ elementos (los valores posibles de λ). El número de clases de equivalencia será el total de elementos dividido por el número de elementos de cada clase, es decir $\frac{|K|^{n+1}-1}{|K|-1} = |K|^n + |K|^{n-1} + \cdots + 1$. □

Definición 3. *Sean $P_i = \pi(v_i)$ una familia de puntos en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$. Llamaremos* **variedad proyectiva generada por estos puntos** *al espacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ siendo W el espacio vectorial generado por los vectores v_i. Esta definición no depende de los representantes v_i elegidos sino únicamente de los puntos P_i.*

Demostración. Supongamos que tenemos otra familia de representantes w_i tal que $P_i = \pi(v_i) = \pi(w_i)$. Por definición de la relación de equivalencia, podemos encontrar elementos no nulos $\lambda_i \in K$ tales que $v_i = \lambda_i w_i$ para todo i. Si un vector v está en el espacio generado por los v_i, podemos encontrar una combinación lineal $v = \sum_i \mu_i v_i$, pero entonces v también está en el espacio generado por los w_i porque $v = \sum_i \mu_i v_i = \sum_i \mu_i \lambda_i w_i$. El recíproco se demuestra de forma similar porque $w_i = \lambda_i^{-1} v_i$ para todo i. □

Definición 4. *Dada una familia de puntos P_i del espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$, diremos que son* **generadores** *cuando la variedad proyectiva generada por dichos puntos sea todo el espacio $\mathcal{P}(V)$.*

Para calcular las variedades proyectivas generadas por puntos o si unos puntos son generadores, únicamente tenemos que elegir vectores que representen a los puntos y comprobar las propiedades correspondientes en los espacios vectoriales tal y como hemos hecho en temas anteriores. Al no depender el resultado final de los representantes elegidos, podemos elegirlos de la forma que más nos interese en cada caso. Lo mismo va a suceder con el concepto de puntos linealmente independientes.

Definición 5. *Sean $P_i = \pi(v_i)$ una familia de puntos en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$. Diremos que estos puntos son* **linealmente independientes** *si los vectores v_i son linealmente independientes. Esta definición no depende de los representantes v_i elegidos sino únicamente de los puntos P_i.*

Demostración. Supongamos que tenemos otra familia de representantes w_i tal que $P_i = \pi(v_i) = \pi(w_i)$ y que los vectores v_i son linealmente independientes. Consideremos una combinación lineal igualada a 0, $0 = \sum_i \mu_i w_i$. Por definición de la relación de equivalencia, podemos encontrar elementos no nulos $\lambda_i \in K$ tales que $v_i = \lambda_i w_i$ para todo i y por lo tanto tenemos que $0 = \sum_i \mu_i \lambda_i v_i$. Como los v_i son linealmente independientes, todos los coeficientes tienen que ser 0 y por lo tanto $\mu_i \lambda_i = 0$ para todo i, pero como $\lambda_i \neq 0$, podemos deducir que $\mu_i = 0$ para todo i, lo que nos prueba que los vectores w_i son linealmente independientes. El recíproco se demuestra de forma similar. □

1.3. Inmersión canónica del afín en el proyectivo

Una herramienta que nos resultaba muy útil al estudiar los puntos del espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$ eran las coordenadas homogéneas, que consistía en introducir una coordenada extra en la primera posición con un valor constante igual a 1. Esta coordenada *artificial* nos va a permitir considerar los puntos del espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$ dentro del espacio proyectivo $\mathcal{P}^n(K)$. Esta inmersión, que llamaremos **inmersión canónica del afín en el proyectivo** nos conservará las definiciones de puntos independientes y generadores.

Proposición 6. *Sea K un cuerpo y $n \geq 1$ un número natural. La aplicación*

$$\varphi : \mathcal{A}^n(K) \to \mathcal{P}^n(K) \qquad \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

es inyectiva. Además, unos puntos P_i son linealmente independientes (generadores) en $\mathcal{A}^n(K)$ si y solo si los puntos $\varphi(P_i)$ son linealmente independientes (generadores) en $\mathcal{P}^n(K)$.

Demostración. Es inyectiva porque si $\left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}\right]\!\!\right]$ entonces existe $\lambda \in K$ tal que $\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$. De la primera coordenada deducimos que $\lambda = 1$ y de las demás que $x_i = y_i$ para todo i.

Los puntos del proyectivo que provienen de puntos del espacio afín mediante esta inmersión son precisamente aquellos que tienen primera coordenada no nula y que podemos siempre representar mediante vectores de K^{n+1} con primera coordenada 1. Unos puntos eran linealmente independientes (generadores) en el espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$ si y solo si lo eran al considerarlos con la coordenada homogénea en el espacio vectorial K^{n+1}, pero, puesto que estos son representantes de los puntos en el proyectivo, esta definición coincide con la que hemos dado de linealmente independientes (generadores) en el espacio $\mathcal{P}^n(K)$. □

Esta inmersión canónica del espacio afín $\mathcal{A}^n(K)$ en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^n(K)$ no cubre todos los puntos del proyectivo. Aquellos puntos que tienen primera coordenada 0 no provienen de ninguno del afín. Estos puntos nuevos se denominan **puntos del infinito** o **puntos impropios**.

Nota 7. *En este curso se ha hecho la elección de poner las coordenadas homogéneas del espacio afín utilizando la primera coordenada igual a* 1*. Esta es únicamente una elección posible, algunos libros utilizan la última coordenada (de hecho es lo más habitual en la recta y el plano proyectivo), pero también podríamos utilizar otras combinaciones. Los puntos impropios del espacio proyectivo no son especiales en sí mismos dentro del espacio proyectivo, son especiales desde el momento en que fijamos la inmersión del afín en el proyectivo que queremos utilizar.*

1.4. Sistemas de referencia proyectivos

Puesto que las condiciones de linealmente independientes y generadores para una familia de puntos se generalizan bien en el proyectivo, nuestro objetivo es que también pudiera extenderse un concepto similar al de coordenadas baricéntricas para el caso proyectivo. El problema que tenemos en este caso es que no disponemos de una forma *natural* de normalizar los representantes como teníamos en el afín (poner la primera coordenada igual a 1). Para solucionar el problema hay que añadir un punto extra que llamaremos punto unidad y que utilizaremos para seleccionar los representantes adecuados de los puntos. La definición es la siguiente:

Definición 8. *Un* **sistema de referencia proyectivo en** $\mathcal{P}(V)$ *es un conjunto de* $n+2$ *puntos de forma que si quitamos cualquiera de ellos, los* $n+1$ *restantes son linealmente idependientes y generadores.*

Ejemplo 9. *Un sistema de referencia proyectivo en la recta proyectiva está formado por cualesquiera* 3 *puntos distintos.*

Demostración. Una recta proyectiva es un espacio proyectivo de dimensión $n = 1$. Para construirla necesitamos un espacio vectorial V de dimensión $n + 1 = 2$. Para que dos vectores $u, v \in V$ formen una base tienen que ser no nulos y además no pueden ser linealmente dependientes, lo cual puede suceder únicamente cuando son proporcionales, pero esta condición es equivalente a que los puntos $\pi(u)$ y $\pi(v)$ sean distintos en $\mathcal{P}(V)$. Por lo tanto un sistema de referencia proyectivo estará formado por tres puntos y dos de ellos no pueden ser iguales. Una vez elegidos estos tres puntos, tenemos que seleccionar quienen harán el papel de P_0, P_1 y U, que son $3! = 6$ formas distintas. □

Proposición 10. *Consideremos* $n + 2$ *puntos en un espacio proyectivo* $\mathcal{P}(V)$*. Vamos a llamar* U *a uno cualquiera de ellos y a los otros los denotaremos* $P_0, P_1, \cdots, P_n$*. Tomemos representantes cualesquiera* $U = \pi(u)$*,* $P_i = \pi(v_i)$ *para* $i = 0, \cdots, n$*. Fijadas estas notaciones, los puntos son un sistema de referencia proyectivo si y solo si* $\{v_0, \cdots, v_n\}$ *son una base de* V *y al poner* u *como combinación lineal de los vectores de la base,* $u = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$*, se cumple que* $\lambda_i \neq 0$ *para todo* i*.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Si los puntos forman un sistema de referencia proyectivo, los puntos $P_0, \cdots, P_n$ son linealmente independientes y generadores, por lo tanto $\{v_0, \cdots, v_n\}$ es una base. Para probar la última parte supongamos que uno de los λ_i es igual a 0, entonces

$$u = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Vamos a ver que el conjunto de puntos $\{P_0, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_n, U\}$ no puede ser independiente ya que

$$u - \lambda_0 v_0 - \lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_n v_n = 0$$

es una combinación lineal no trivial de los vectores representantes igualada a 0.
($\Leftarrow$). Los primeros puntos $\{P_0, \cdots, P_n\}$ son independientes y generadores porque $\{v_0, \cdots, v_n\}$ son una base. Consideremos ahora cualquier subconjunto $\{P_0, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_n, U\}$. Para probar que estos puntos son linealmente independientes, consideremos una combinación lineal igualada a 0,

$$0 = \mu_0 v_0 + \cdots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \mu_n v_n + \alpha u$$

$$= (\mu_0 + \alpha\lambda_0) v_0 + \cdots + (\mu_{i-1} + \alpha\lambda_{i-1}) v_{i-1} + \alpha v_i + (\mu_{i+1} + \alpha\lambda_{i+1}) v_{i+1} + \cdots + (\mu_n + \alpha\lambda_n) v_n$$

Utilizando que los vectores $\{v_0, \cdots, v_n\}$ son linealmente independientes, deducimos que todos los coeficientes tienen que ser 0, en particular $\alpha = 0$ (por ser el coeficiente de v_i) y para todo j, $0 = \mu_j + \alpha\lambda_j = \mu_j$. Como son $n + 1$ vectores independientes, también tienen que ser generadores porque su número coincide con la dimensión de V. □

Definición 11. *Para establecer coordenadas proyectivas, seleccionaremos uno de esos puntos que llamaremos U (punto unidad) y los otros los ordenaremos de la forma $P_0, P_1, \cdots, P_n$. Dados esos puntos, llamaremos una* **base normalizada para este sistema de referencia** *a una base $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ de V de forma que*

$$P_0 = \pi(v_0), P_1 = \pi(v_1), \cdots, P_n = \pi(v_n), U = \pi(v_0 + v_1 + \cdots + v_n).$$

Dado un sistema de referencia proyectivo, sabemos que tomando una base $v_0, \cdots, v_n$ tal que $P_i = \pi(v_i)$, tendremos $u = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n$. Como $P_i = \pi(v_i) = \pi(\lambda_i v_i)$, podemos cambiar los vectores v_i por sus múltiplos $\lambda_i v_i$ y así obtener una base normalizada. Veámoslo con un ejemplo.

Ejercicio 12. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{array} \right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que $\begin{bmatrix} 4\\2\\1\\2 \end{bmatrix} = 3\underbrace{\begin{bmatrix} 4\\1\\2\\3 \end{bmatrix}}_{v_0} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 2\\2\\3\\2 \end{bmatrix}}_{v_1} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\2\\2\\0 \end{bmatrix}}_{v_2} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 0\\2\\4\\2 \end{bmatrix}}_{v_3}$.

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Proposición 13. *Sea $U, P_0, P_1, \cdots, P_n$ un sistema de referencia proyectivo en $\mathcal{P}(V)$ y sean $\{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ y $\{w_0, w_1, \cdots, w_n\}$ dos bases normalizadas para este sistema de referencia, entonces existe un valor no nulo $\lambda \in K$ tal que $v_0 = \lambda w_0, v_1 = \lambda w_1, \cdots, v_n = \lambda w_n$.*

Demostración. Como ambas son bases normalizadas, tenemos que $U = \pi(v_0 + \cdots + v_n) = \pi(w_0 + \cdots + w_n)$ y que $P_i = \pi(w_i) = \pi(v_i)$ para todo $i = 0, 1, \cdots, n$. Por definición de la relación de equivalencia en V, podemos encontrar valores $\lambda, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ tales que

$$w_0 + \cdots + w_n = \lambda(v_0 + \cdots + v_n), w_0 = \lambda_0 v_0, w_1 = \lambda_1 v_1, \cdots, w_n = \lambda_n v_n.$$

Entonces tenemos que $\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n = w_0 + \cdots + w_n = \lambda v_0 + \cdots + \lambda v_n$ y por tanto $(\lambda - \lambda_0)v_0 + (\lambda - \lambda_1)v_1 + \cdots + (\lambda - \lambda_n)v_n = 0$ y usando que los v_i son linealmente independientes concluimos que $\lambda = \lambda_0 = \cdots = \lambda_n$. $\square$

Cuando tengamos una base normalizada para un sistema de referencia proyectivo $R = \{U, P_0, \cdots, P_n\}$ en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^n(K)$, podemos poner las columnas de v_i como columnas de una matriz que estará definida salvo múltiplos no nulos, así que podemos escribir

$$R = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \end{matrix} \right]\!\!\right]$$

lo cual significará que R es el sistema de referencia dado por la base normalizada

$$v_0 = \begin{bmatrix} 2\\3\\1\\4 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 4\\4\\1\\4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3\\1\\1\\0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0\\4\\3\\4 \end{bmatrix}, u = v_0 + \cdots + v_3 = \begin{bmatrix} 4\\2\\1\\2 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2\\3\\1\\4 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 4\\4\\1\\4 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3\\1\\1\\0 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0\\4\\3\\4 \end{matrix} \right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 4\\2\\1\\2 \end{matrix} \right]\!\!\right]$$

Esto nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 14. *Sea $\{U, P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ un sistema de referencia proyectivo. Llamaremos matriz de este sistema de referencia a la matriz (definida salvo múltiplos no nulos) cuyas columnas son los vectores de cualquier base normalizada del sistema, es decir,*

$$\left[\!\!\left[\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \right]\!\!\right]$$

Definición 15. *Llamaremos sistema de referencia canónico de $\mathcal{P}^n(K)$ al dado por la matriz identidad, es decir, la formada por los siguientes puntos*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], \cdots, P_n = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right].$$

Utilizando la matriz de un sistema de referencia proyectivo, podemos establecer una biyección que nos dará las coordenadas proyectivas asociadas a un punto.

Proposición 16. *Sea $\mathcal{P}(V)$ un espacio proyectivo sobre K y sean $U, P_0, \cdots, P_n$ un sistema de referencia proyectivo. Consideremos una base normalizada $\{v_0, \cdots, v_n\}$. Entonces la aplicación $\phi : \mathcal{P}^n(K) \to \mathcal{P}(V)$ dada por $\phi\left(\left[\!\!\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right]\!\!\right]\right) = \pi(x_0v_0 + \cdots + x_nv_n)$ no depende de la base normalizada elegida y es biyectiva.*

Demostración.

- Vamos a demostrar que la definición no depende de la base normalizada considerando otra base normalizada $\{w_0, \cdots, w_n\}$. Para esta base normalizada podemos encontrar $\lambda \neq 0$ tal que $w_i = \lambda v_i$ para todo $i = 0, 1, \cdots, n$, por lo tanto , para todo $x_0, \cdots, x_n$,

  $$\pi(x_0w_0 + \cdots + x_nw_n) = \pi(\lambda(x_0v_0 + \cdots + x_nv_n)) = \pi(x_0v_0 + \cdots + x_nv_n),$$

  lo que prueba que ambas bases normalizadas nos dan la misma definición de $\phi\left(\left[\!\!\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right]\!\!\right]\right)$.

- Para demostrar que ϕ es inyectiva, si $\phi\left(\left[\!\!\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right]\!\!\right]\right) = \phi\left(\left[\!\!\left[\begin{smallmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{smallmatrix}\right]\!\!\right]\right)$, entonces $\pi(x_0v_0+\cdots+x_nv_n) = \pi(y_0v_0+\cdots+y_nv_n)$ por lo que existirá $\lambda \in K$ tal que $x_0v_0+\cdots+x_nv_n = \lambda(y_0v_0+\cdots+y_nv_n) = \lambda y_0v_0+\cdots+\lambda y_nv_n$. Como los v_i son una base, concluimos que $x_i = \lambda y_i$ para $i = 0, \cdots, n$ y eso implica que $\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right] = \lambda \left[\begin{smallmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{smallmatrix}\right]$ y por tanto $\left[\!\!\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{smallmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{smallmatrix}\right]\!\!\right]$.

- La aplicación ϕ es suprayectiva porque para todo $P \in \mathcal{P}(V)$, podemos tomar un representante $v \in V$ tal que $\pi(v) = P$ y usando que $\{v_0, \cdots, v_n\}$ es una base, existen $x_0, \cdots, x_n$ tal que $v = x_0v_0 + \cdots + x_nv_n$.

□

Definición 17. *Sea $\mathcal{P}(V)$ un espacio proyectivo sobre K y sea $R = \left[\!\!\left[\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right]\!\!\right]$ un sistema de referencia proyectivo (es decir, $P_i = \pi(v_i)$ para $i = 0, 1, \cdots, n$ y $U = \pi(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$). Dado un punto $P \in \mathcal{P}(V)$, llamaremos* **coordenadas proyectivas de P en el sistema de referencia R** *al único elemento $\left[\!\!\left[\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right]\!\!\right] \in \mathcal{P}^n(K)$ tal que $P = \pi(x_0v_0 + \cdots + x_nv_n)$. Esta relación en forma matricial se escribirá $P = RX$ ya que* $\pi(x_0v_0 + \cdots + x_nv_n) = \left[\!\!\left[\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right]\!\!\right] \left[\!\!\left[\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right]\!\!\right].$

2. Erratas

(No detectadas)

3. Ejercicios

Ejercicio 18. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -12 \\ -24 \\ 5 \\ -8 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \left[\begin{array}{r} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{array}\right], w_1 = \left[\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right], w_2 = \left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right], w_3 = \left[\begin{array}{r} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], u = \left[\begin{array}{r} -12 \\ -24 \\ 5 \\ -8 \end{array}\right]$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\left[\begin{array}{rrrr} 0 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & -1 & -2 & -12 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & -24 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\left[\begin{array}{r} -12 \\ -24 \\ 5 \\ -8 \end{array}\right] = \underbrace{5\left[\begin{array}{r} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{array}\right]}_{v_0} + \underbrace{2\left[\begin{array}{r} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right]}_{v_1} + \underbrace{2\left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]}_{v_2} + \underbrace{7\left[\begin{array}{r} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 19. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 18 \\ \frac{51}{2} \\ -\frac{19}{2} \\ 15 \\ 39 \\ -\frac{5}{2} \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 18 \\ \frac{51}{2} \\ -\frac{19}{2} \\ 15 \\ 39 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{51}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{19}{2} \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 2 & -1 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & -\frac{1}{2} & 39 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 18 \\ \frac{51}{2} \\ -\frac{19}{2} \\ 15 \\ 39 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{9\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{18\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{5\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. ♢

Ejercicio 20. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -34 \\ 8 \\ 30 \\ -\frac{7}{2} \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -34 \\ 8 \\ 30 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & -1 & -1 & -34 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 30 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -34 \\ 8 \\ 30 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{14\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. ◊

Ejercicio 21. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right], P_1 = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right], P_2 = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right], P_3 = \left[\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right], U = \left[\begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ -9 \\ -4 \end{bmatrix}\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ -9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -8 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ -9 \\ -4 \end{bmatrix} = \underbrace{3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. ◊

Ejercicio 22. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 70 \\ \frac{61}{2} \\ 138 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 70 \\ \frac{61}{2} \\ 138 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 70 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{61}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 138 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 67 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -\frac{13}{2} \\ 0 \\ 70 \\ \frac{61}{2} \\ 138 \end{bmatrix} = 3\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + 4\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + 67\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_3} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 23. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -3 \\ 4 \\ 19 \\ 6 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 19 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 19 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 19 \\ 6 \end{bmatrix} = 13\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + 6\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_2} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 24. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1\\ 0\\ 2\\ 0\\ 2\\ -2 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ -1\\ 1\\ \frac{1}{2} \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\\ -2\\ -2 \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1\\ 0\\ -1\\ -2\\ \frac{1}{2}\\ 2 \end{array}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2\\ -\frac{1}{2}\\ 0\\ -2\\ 0\\ 2 \end{array}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 2\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\\ -\frac{1}{2}\\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 5\\ \frac{3}{2}\\ 9\\ -12\\ -\frac{9}{2}\\ -11 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 2\\ 0\\ 2\\ -2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ -1\\ 1\\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\\ -2\\ -2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ -2\\ \frac{1}{2}\\ 2 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} -2\\ -\frac{1}{2}\\ 0\\ -2\\ 0\\ 2 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 2\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\\ -\frac{1}{2}\\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 5\\ \frac{3}{2}\\ 9\\ -12\\ -\frac{9}{2}\\ -11 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{1}{2} & -2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 5\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9\\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -12\\ 2 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2}\\ -2 & \frac{1}{2} & -2 & 2 & 2 & 0 & -11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 5\\ \frac{3}{2}\\ 9\\ -12\\ -\frac{9}{2}\\ -11 \end{bmatrix} = \underbrace{4\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 2\\ 0\\ 2\\ -2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ -1\\ 1\\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{7\begin{bmatrix} 1\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 0\\ -2\\ -2 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ -2\\ \frac{1}{2}\\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3\begin{bmatrix} -2\\ -\frac{1}{2}\\ 0\\ -2\\ 0\\ 2 \end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 2\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\\ -\frac{1}{2}\\ 0 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 25. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -196 \\ 33 \\ -213 \\ -\frac{5}{2} \\ 54 \\ -\frac{71}{2} \end{array} \right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \left[\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right], w_1 = \left[\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], w_2 = \left[\begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right], w_3 = \left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right], w_4 = \left[\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], w_5 = \left[\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right], u = \left[\begin{array}{r} -196 \\ 33 \\ -213 \\ -\frac{5}{2} \\ 54 \\ -\frac{71}{2} \end{array} \right]$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\left[\begin{array}{rrrrrr} -2 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} -2 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 & -196 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 33 \\ -2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 1 & -213 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 54 \\ -2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{71}{2} \end{array} \right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\left[\begin{array}{r} -196 \\ 33 \\ -213 \\ -\frac{5}{2} \\ 54 \\ -\frac{71}{2} \end{array} \right] = \underbrace{4 \left[\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right]}_{v_0} + \underbrace{3 \left[\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]}_{v_1} + \underbrace{25 \left[\begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right]}_{v_2} + \underbrace{2 \left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{v_3} + \underbrace{81 \left[\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]}_{v_4} + \underbrace{3 \left[\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right]}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 26. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{array}\right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{array}\right]\!\right], P_5 = \left[\!\left[\begin{array}{r} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{array}{r} \frac{15}{2} \\ -7 \\ -\frac{67}{2} \\ -\frac{97}{2} \\ -\frac{65}{2} \\ 13 \end{array}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ -7 \\ -\frac{67}{2} \\ -\frac{97}{2} \\ -\frac{65}{2} \\ 13 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} \frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & \frac{15}{2} \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -7 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{67}{2} \\ -2 & 0 & -2 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{97}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 2 & -2 & -\frac{65}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2} \\ -7 \\ -\frac{67}{2} \\ -\frac{97}{2} \\ -\frac{65}{2} \\ 13 \end{bmatrix} = \underbrace{15 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{8 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 27. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -3 \\ \frac{5}{2} \\ -13 \\ 2 \\ -\frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{5}{2} \\ -13 \\ 2 \\ -\frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & -13 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{15}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{9}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{5}{2} \\ -13 \\ 2 \\ -\frac{15}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{5\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{2\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 28. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2\\ -1\\ -2\\ -\frac{1}{2}\\ 2\\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0\\ 0\\ -1\\ -1\\ 0\\ -2 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1\\ -1\\ \frac{1}{2}\\ -2\\ -\frac{1}{2}\\ -2 \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 2\\ 1\\ 2\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1\\ 0\\ 1\\ 0\\ -\frac{1}{2}\\ 2 \end{array}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -5\\ -9\\ -\frac{11}{2}\\ -\frac{53}{2}\\ \frac{33}{2}\\ -14 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \left[\begin{array}{r} -2\\ -1\\ -2\\ -\frac{1}{2}\\ 2\\ 0 \end{array}\right], w_1 = \left[\begin{array}{r} 0\\ 0\\ -1\\ -1\\ 0\\ -2 \end{array}\right], w_2 = \left[\begin{array}{r} 1\\ -1\\ \frac{1}{2}\\ -2\\ -\frac{1}{2}\\ -2 \end{array}\right], w_3 = \left[\begin{array}{r} 2\\ 1\\ 2\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ 1 \end{array}\right], w_4 = \left[\begin{array}{r} 1\\ 0\\ 1\\ 0\\ -\frac{1}{2}\\ 2 \end{array}\right], w_5 = \left[\begin{array}{r} -2\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{array}\right], u = \left[\begin{array}{r} -5\\ -9\\ -\frac{11}{2}\\ -\frac{53}{2}\\ \frac{33}{2}\\ -14 \end{array}\right]$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\left[\begin{array}{rrrrrr} -2 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ -2 & -1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} -2 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -5\\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -9\\ -2 & -1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & -\frac{11}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{53}{2}\\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{33}{2}\\ 0 & -2 & -2 & 1 & 2 & 0 & -14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\left[\begin{array}{r} -5\\ -9\\ -\frac{11}{2}\\ -\frac{53}{2}\\ \frac{33}{2}\\ -14 \end{array}\right] = \underbrace{9\left[\begin{array}{r} -2\\ -1\\ -2\\ -\frac{1}{2}\\ 2\\ 0 \end{array}\right]}_{v_0} + \underbrace{6\left[\begin{array}{r} 0\\ 0\\ -1\\ -1\\ 0\\ -2 \end{array}\right]}_{v_1} + \underbrace{7\left[\begin{array}{r} 1\\ -1\\ \frac{1}{2}\\ -2\\ -\frac{1}{2}\\ -2 \end{array}\right]}_{v_2} + \underbrace{4\left[\begin{array}{r} 2\\ 1\\ 2\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ 1 \end{array}\right]}_{v_3} + \underbrace{4\left[\begin{array}{r} 1\\ 0\\ 1\\ 0\\ -\frac{1}{2}\\ 2 \end{array}\right]}_{v_4} + \underbrace{3\left[\begin{array}{r} -2\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{array}\right]}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 29. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -4 \\ -5 \\ -6 \\ 12 \end{matrix} \right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} = \underbrace{4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2 \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 30. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -2 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -12 \\ -\frac{15}{2} \\ 11 \\ -19 \end{matrix} \right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -12 \\ -\frac{15}{2} \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & -2 & -12 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{15}{2} \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 11 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -19 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -12 \\ -\frac{15}{2} \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix} = \underbrace{8 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{5 \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. ◊

Ejercicio 31. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right], P_1 = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right], P_2 = \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right], P_3 = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right], P_4 = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right], P_5 = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right], U = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 51 \\ -\frac{19}{2} \\ -\frac{55}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 51 \\ -\frac{19}{2} \\ -\frac{55}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 51 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{19}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 & -\frac{55}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -\frac{9}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 51 \\ -\frac{19}{2} \\ -\frac{55}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{13\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{6\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{18\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. ♢

Ejercicio 32. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -35 \\ -\frac{193}{2} \\ 166 \\ 18 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -35 \\ -\frac{193}{2} \\ 166 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pero como

también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -35 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & -\frac{193}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 166 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 86 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -35 \\ -\frac{193}{2} \\ 166 \\ 18 \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{9\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{6\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{86\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. ♢

Ejercicio 33. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -29 \\ 4 \\ 27 \\ 54 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -29 \\ 4 \\ 27 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -29 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 27 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 2 & 54 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -29 \\ 4 \\ 27 \\ 54 \end{bmatrix} = \underbrace{5\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{20\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{4\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. ♢

Ejercicio 34. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo* $\mathcal{P}^4(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -\frac{9}{2} \\ -5 \\ 11 \\ 5 \\ 13 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{R})$. *Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.*

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ -5 \\ 11 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -5 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 & -1 & -1 & 11 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ -5 \\ 11 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix} = \underbrace{4\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{15\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. ♢

Ejercicio 35. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo* $\mathcal{P}^4(\mathbb{R})$,

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{array}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -2 \\ -16 \\ -\frac{143}{2} \\ -60 \\ 11 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -2 \\ -16 \\ -\frac{143}{2} \\ -60 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 0 & -16 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{143}{2} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -60 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -16 \\ -\frac{143}{2} \\ -60 \\ 11 \end{bmatrix} = \underbrace{28 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{17 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{4 \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{14 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 36. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix} \right]\!\right], P_5 = \left[\!\left[\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ -\frac{21}{2} \\ 4 \\ -18 \\ -28 \\ \frac{23}{2} \end{matrix} \right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{21}{2} \\ 4 \\ -18 \\ -28 \\ \frac{23}{2} \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{21}{2} \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 & -18 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & -28 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{23}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{21}{2} \\ 4 \\ -18 \\ -28 \\ \frac{23}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{9\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{7\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. ♢

Ejercicio 37. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} -17 \\ -29 \\ \frac{53}{2} \\ 20 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{185}{2} \end{matrix} \right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} -17 \\ -29 \\ \frac{53}{2} \\ 20 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{185}{2} \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -17 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -29 \\ 0 & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{53}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 20 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 2 & 1 & \frac{185}{2} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} -17 \\ -29 \\ \frac{53}{2} \\ 20 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{185}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{15\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{12\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{42\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. ♢

Ejercicio 38. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underbrace{4\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. ◊

Ejercicio 39. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. ♢

Ejercicio 40. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ pero como

también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. ◊

Ejercicio 41. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right], P_1 = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right], P_2 = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right], P_3 = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right], P_4 = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right], U = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_0} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 42. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 4 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 43. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo* $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$*,*

$$P_0 = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right], P_1 = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right], P_2 = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right], P_3 = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right], U = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$*. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.*

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \underbrace{4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 44. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo* $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$*,*

$$P_0 = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right], P_1 = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right], P_2 = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right], P_3 = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right], P_4 = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right], U = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$*. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.*

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \underbrace{2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. ♢

Ejercicio 45. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. ♢

Ejercicio 46. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ pero como

también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 47. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_0} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + 4\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_3} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_4} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 48. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 4 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_0} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + 3\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_2} + 4\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_4} + 4\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. ♢

Ejercicio 49. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_0} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_1} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_2} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\lozenge$

Ejercicio 50. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{array} \right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{array} \right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_0} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_1} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\lozenge$

Ejercicio 51. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo* $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$*,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}3\\4\\4\\0\\1\end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}3\\4\\2\\4\\0\end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}0\\3\\0\\0\\0\end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}1\\4\\1\\0\\3\end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}1\\0\\1\\1\\4\end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix}3\\3\\3\\0\\1\end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$*. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.*

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix}3\\4\\4\\0\\1\end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix}3\\4\\2\\4\\0\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}0\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix}1\\4\\1\\0\\3\end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\4\end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix}3\\3\\3\\0\\1\end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix}3&3&0&1&1\\4&4&3&4&0\\4&2&0&1&1\\0&4&0&0&1\\1&0&0&3&4\end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}3&3&0&1&1&3\\4&4&3&4&0&3\\4&2&0&1&1&3\\0&4&0&0&1&0\\1&0&0&3&4&1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&3\\0&1&0&0&0&3\\0&0&1&0&0&2\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&1&3\end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix}3\\3\\3\\0\\1\end{bmatrix} = \underbrace{3\begin{bmatrix}3\\4\\4\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{3\begin{bmatrix}3\\4\\2\\4\\0\end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix}0\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix}1\\4\\1\\0\\3\end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\4\end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 52. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo* $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$*,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}0\\4\\1\\2\\4\end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}0\\3\\4\\3\\2\end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}4\\3\\2\\1\\4\end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}2\\2\\0\\4\\3\end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}3\\1\\2\\4\\1\end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix}4\\3\\3\\3\\3\end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_5)$*. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.*

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0\\4\\1\\2\\4 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0\\3\\4\\3\\2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 4\\3\\2\\1\\4 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 2\\2\\0\\4\\3 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 3\\1\\2\\4\\1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 4\\3\\3\\3\\3 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 0&0&4&2&3\\4&3&3&2&1\\1&4&2&0&2\\2&3&1&4&4\\4&2&4&3&1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0&0&4&2&3&4\\4&3&3&2&1&3\\1&4&2&0&2&3\\2&3&1&4&4&3\\4&2&4&3&1&3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&3\\0&1&0&0&0&2\\0&0&1&0&0&3\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&1&3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 4\\3\\3\\3\\3 \end{bmatrix} = \underbrace{3\begin{bmatrix} 0\\4\\1\\2\\4 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0\\3\\4\\3\\2 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 4\\3\\2\\1\\4 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 2\\2\\0\\4\\3 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 3\\1\\2\\4\\1 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 53. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1\\3\\2\\1\\3\\2 \end{matrix} \right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix} 2\\0\\1\\0\\1\\4 \end{matrix} \right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix} 4\\4\\1\\0\\3\\1 \end{matrix} \right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3\\2\\2\\1\\1\\1 \end{matrix} \right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{matrix} 3\\1\\2\\0\\0\\2 \end{matrix} \right]\!\right], P_5 = \left[\!\left[\begin{matrix} 4\\4\\0\\4\\0\\1 \end{matrix} \right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix} 0\\3\\1\\0\\3\\1 \end{matrix} \right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1\\3\\2\\1\\3\\2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 2\\0\\1\\0\\1\\4 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 4\\4\\1\\0\\3\\1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 3\\2\\2\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 3\\1\\2\\0\\0\\2 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 4\\4\\0\\4\\0\\1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0\\3\\1\\0\\3\\1 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 54. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pero como

también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. ◊

Ejercicio 55. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \underbrace{4\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 56. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix}4\\4\\4\\2\\1\\3\end{matrix}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix}0\\4\\1\\1\\0\\0\end{matrix}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix}0\\1\\2\\0\\2\\4\end{matrix}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix}0\\0\\2\\3\\1\\4\end{matrix}\right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{matrix}2\\1\\2\\2\\2\\4\end{matrix}\right]\!\right], P_5 = \left[\!\left[\begin{matrix}3\\4\\0\\1\\1\\4\end{matrix}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix}2\\2\\0\\0\\4\\0\end{matrix}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix}4\\4\\4\\2\\1\\3\end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix}0\\4\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\\2\\4\end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\3\\1\\4\end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\\2\\2\\4\end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix}3\\4\\0\\1\\1\\4\end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\4\\0\end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix}4&0&0&0&2&3\\4&4&1&0&1&4\\4&1&2&2&2&0\\2&1&0&3&2&1\\1&0&2&1&2&1\\3&0&4&4&4&4\end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}4&0&0&0&2&3&2\\4&4&1&0&1&4&2\\4&1&2&2&2&0&0\\2&1&0&3&2&1&0\\1&0&2&1&2&1&4\\3&0&4&4&4&4&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&0&0&3\\0&1&0&0&0&0&3\\0&0&1&0&0&0&3\\0&0&0&1&0&0&3\\0&0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&0&1&4\end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\4\\0\end{bmatrix} = \underbrace{3\begin{bmatrix}4\\4\\4\\2\\1\\3\end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{3\begin{bmatrix}0\\4\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{3\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\\2\\4\end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix}0\\0\\2\\3\\1\\4\end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{4\begin{bmatrix}2\\1\\2\\2\\2\\4\end{bmatrix}}_{v_4} + \underbrace{4\begin{bmatrix}3\\4\\0\\1\\1\\4\end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 57. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_5)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{3\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 58. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. ◊

Ejercicio 59. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ pero como

también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. ♢

Ejercicio 60. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 0\\0\\2\\2\\1\\2 \end{bmatrix} = 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\1\\2\\0\\0\\0 \end{bmatrix}}_{v_0} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 2\\2\\2\\2\\0\\0 \end{bmatrix}}_{v_1} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\0\\2\\0\\0\\1 \end{bmatrix}}_{v_2} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 2\\0\\1\\0\\0\\1 \end{bmatrix}}_{v_3} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 2\\0\\0\\2\\0\\2 \end{bmatrix}}_{v_4} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\2\\0 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 61. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}\right], P_1 = \left[\begin{bmatrix} 1\\2\\0\\2 \end{bmatrix}\right], P_2 = \left[\begin{bmatrix} 2\\1\\2\\2 \end{bmatrix}\right], P_3 = \left[\begin{bmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{bmatrix}\right], U = \left[\begin{bmatrix} 2\\0\\1\\2 \end{bmatrix}\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1\\2\\0\\2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2\\1\\2\\2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 2\\0\\1\\2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 0&1&2&1\\1&2&1&2\\0&0&2&0\\0&2&2&0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0&1&2&1&2\\1&2&1&2&0\\0&0&2&0&1\\0&2&2&0&2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 2\\0\\1\\2 \end{bmatrix} = 2\underbrace{\begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}}_{v_0} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\2\\0\\2 \end{bmatrix}}_{v_1} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 2\\1\\2\\2 \end{bmatrix}}_{v_2} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 62. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{array}{c}2\\0\\1\\0\end{array}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{array}{c}1\\2\\1\\1\end{array}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{array}{c}2\\0\\0\\1\end{array}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{array}{c}0\\2\\2\\0\end{array}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{array}{c}1\\2\\2\\1\end{array}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\\1\end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix}0\\2\\2\\0\end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix}2&1&2&0\\0&2&0&2\\1&1&0&2\\0&1&1&0\end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2&1&2&0&1\\0&2&0&2&2\\1&1&0&2&2\\0&1&1&0&1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&2\end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix}2\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix}0\\2\\2\\0\end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 63. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\!\left[\begin{array}{c}2\\1\\2\\0\\2\end{array}\right]\!\right], P_1 = \left[\!\left[\begin{array}{c}0\\2\\0\\1\\1\end{array}\right]\!\right], P_2 = \left[\!\left[\begin{array}{c}0\\0\\1\\0\\2\end{array}\right]\!\right], P_3 = \left[\!\left[\begin{array}{c}0\\2\\0\\2\\0\end{array}\right]\!\right], P_4 = \left[\!\left[\begin{array}{c}2\\0\\0\\2\\2\end{array}\right]\!\right], U = \left[\!\left[\begin{array}{c}2\\1\\0\\1\\2\end{array}\right]\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 64. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^3(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_0} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \underbrace{2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_3}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_3\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_3$. $\Diamond$

Ejercicio 65. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 2&0&1&1&1&0&1\\ 0&2&2&0&1&0&1\\ 0&2&0&0&2&2&0\\ 1&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&1&2&1&2&1\\ 0&1&2&2&2&0&2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&0&0&0&0&0&2\\ 0&1&0&0&0&0&2\\ 0&0&1&0&0&0&2\\ 0&0&0&1&0&0&2\\ 0&0&0&0&1&0&2\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix} = 2\underbrace{\begin{bmatrix}2\\0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_0} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}0\\2\\2\\1\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_1} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}}_{v_2} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\2\\2\end{bmatrix}}_{v_3} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\\1\\2\end{bmatrix}}_{v_4} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\2\\1\\2\\0\end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 66. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\\1\end{bmatrix}\right], P_1 = \left[\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right], P_2 = \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right], P_3 = \left[\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\0\end{bmatrix}\right], P_4 = \left[\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right], U = \left[\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix}\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^4(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\\1\end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\1\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\0\end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix} 2&2&1&1&2\\ 1&2&0&1&1\\ 0&0&0&2&1\\ 2&0&1&2&0\\ 1&1&1&0&1 \end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2&2&1&1&2&1\\ 1&2&0&1&1&1\\ 0&0&0&2&1&0\\ 2&0&1&2&0&1\\ 1&1&1&0&1&2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&2\\ 0&1&0&0&0&2\\ 0&0&1&0&0&2\\ 0&0&0&1&0&2\\ 0&0&0&0&1&2 \end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{bmatrix} = 2\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\\1\end{bmatrix}}_{v_0} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_1} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_2} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\0\end{bmatrix}}_{v_3} + 2\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_4}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_4\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_4$. $\Diamond$

Ejercicio 67. *Consideremos los siguientes puntos en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_3)$,*

$$P_0 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}0\\2\\1\\1\\2\\1\end{matrix}\right]\!\!\right], P_1 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}2\\1\\0\\1\\1\\2\end{matrix}\right]\!\!\right], P_2 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}2\\2\\0\\0\\0\\1\end{matrix}\right]\!\!\right], P_3 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}1\\2\\0\\0\\1\\2\end{matrix}\right]\!\!\right], P_4 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}1\\1\\1\\2\\0\\2\end{matrix}\right]\!\!\right], P_5 = \left[\!\!\left[\begin{matrix}1\\0\\0\\0\\1\\2\end{matrix}\right]\!\!\right], U = \left[\!\!\left[\begin{matrix}2\\1\\1\\2\\1\\2\end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Demostrar que forman un sistema de referencia proyectivo de $\mathcal{P}^5(\mathbb{Z}_3)$. Calcula una base normalizada para este sistema de referencia.

Solución: Vamos a tomar como representantes para estos puntos los siguientes vectores

$$w_0 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\\2\\1\end{bmatrix}, w_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\\1\\2\end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\\0\\2\end{bmatrix}, w_5 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\2\end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\\1\\2\end{bmatrix}$$

Para que los puntos P_i sean linealmente independientes y generadores, tenemos que comprobar si los w_i son linealmente independientes y generadores. Para ello reduciremos la matriz $\begin{bmatrix}0&2&2&1&1&1\\2&1&2&2&1&0\\1&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&2&0\\2&1&0&1&0&1\\1&2&1&2&2&2\end{bmatrix}$ pero como también queremos poner el vector u como combinación lineal de los vectores w_i, vamos a reducir la matriz ampliada con la columna u.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}0&2&2&1&1&1&2\\2&1&2&2&1&0&1\\1&0&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&2&0&2\\2&1&0&1&0&1&1\\1&2&1&2&2&2&2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&0&0&2\\0&1&0&0&0&0&2\\0&0&1&0&0&0&2\\0&0&0&1&0&0&2\\0&0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0&1&2\end{array}\right].$$

Esto prueba que los puntos P_i son linealmente independientes y generadores (en la parte izquierda nos ha quedado la matriz identidad), además también nos dice que

$$\begin{bmatrix} 2\\1\\1\\2\\1\\2 \end{bmatrix} = 2\underbrace{\begin{bmatrix} 0\\2\\1\\1\\2\\1 \end{bmatrix}}_{v_0} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 2\\1\\0\\1\\1\\2 \end{bmatrix}}_{v_1} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 2\\2\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}}_{v_2} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\2\\0\\0\\1\\2 \end{bmatrix}}_{v_3} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\1\\1\\2\\0\\2 \end{bmatrix}}_{v_4} + 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\1\\2 \end{bmatrix}}_{v_5}.$$

Esto nos permite definir los v_i como múltiplos no nulos de los w_i con lo que $\{v_0, \cdots, v_5\}$ son una base normalizada ya que $u = v_0 + \cdots + v_5$. $\Diamond$

Ejercicio 68. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{rrr} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -5 \end{array} \right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -8 \\ 3 \\ -11 \\ -7 \\ -12 \end{array} \right]\!\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 4 & -3 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -11 \\ -1 & 2 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & -5 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & \frac{3}{2} & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 & -11 \\ -1 & 2 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & -5 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 2 & -5 & -11 \\ -1 & 2 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & -5 & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -7 \\ -1 & 2 & -3 & -7 \\ -2 & 2 & -5 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ -2 & 2 & -5 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{2}{7}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{3}{2}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{r} -8 \\ 3 \\ -11 \\ -7 \\ -12 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 69. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{r} -14 \\ -3 \\ -14 \\ 12 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -14 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -14 \\ -1 & 0 & 5 & -17 \\ 1 & 2 & 6 & -14 \\ 0 & -1 & -4 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -14 \\ -1 & 0 & 5 & -17 \\ 1 & 0 & -4 & 14 \\ 0 & -1 & -4 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -14 \\ -1 & 0 & 5 & -17 \\ 1 & 0 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -14 \\ 1 & 0 & -5 & 17 \\ 1 & 0 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 5 & -14 \\ 1 & 0 & -5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. $\Diamond$

Ejercicio 70. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right]\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\left[\begin{array}{r} 7 \\ -7 \\ -1 \\ -12 \end{array}\right]\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & 8 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-5(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\left[\begin{array}{r} 7 \\ -7 \\ -1 \\ -12 \end{array}\right]\right] = \left[\left[\begin{array}{r} 2 \\ -2 \\ -1 \end{array}\right]\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 71. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\left[\begin{array}{rrr} 1 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \\ -3 & -5 & -9 \end{array}\right]\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\left[\begin{array}{r} 13 \\ -7 \\ -13 \end{array}\right]\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 6 & 13 \\ -1 & -2 & -4 & -7 \\ -3 & -5 & -9 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ -3 & -5 & -9 & -13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 9 & 26 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-5\\ 0&1&2&6\\ 0&4&9&26\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-5\\ 0&1&2&6\\ 0&0&1&2\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-5\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&2\end{array}\right]$$
.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{r} 13\\ -7\\ -13\end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{r} -5\\ 2\\ 2\end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 72. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{rrr} 2&1&4\\ -3&4&9\\ -1&-2&-6\\ -5&2&3\end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{r} 27\\ 17\\ -29\\ -19\end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2&1&4&27\\ -3&4&9&17\\ -1&-2&-6&-29\\ -5&2&3&-19\end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&\frac{1}{2}&2&\frac{27}{2}\\ -3&4&9&17\\ -1&-2&-6&-29\\ -5&2&3&-19\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&\frac{1}{2}&2&\frac{27}{2}\\ 0&\frac{11}{2}&15&\frac{115}{2}\\ -1&-2&-6&-29\\ -5&2&3&-19\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&\frac{1}{2}&2&\frac{27}{2}\\ 0&\frac{11}{2}&15&\frac{115}{2}\\ 0&-\frac{3}{2}&-4&-\frac{31}{2}\\ -5&2&3&-19\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+5(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&\frac{1}{2}&2&\frac{27}{2}\\ 0&\frac{11}{2}&15&\frac{115}{2}\\ 0&-\frac{3}{2}&-4&-\frac{31}{2}\\ 0&\frac{9}{2}&13&\frac{97}{2}\end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{2}{11}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&\frac{1}{2}&2&\frac{27}{2}\\ 0&1&\frac{30}{11}&\frac{115}{11}\\ 0&-\frac{3}{2}&-4&-\frac{31}{2}\\ 0&\frac{9}{2}&13&\frac{97}{2}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&0&\frac{7}{11}&\frac{91}{11}\\ 0&1&\frac{30}{11}&\frac{115}{11}\\ 0&-\frac{3}{2}&-4&-\frac{31}{2}\\ 0&\frac{9}{2}&13&\frac{97}{2}\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{3}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&0&\frac{7}{11}&\frac{91}{11}\\ 0&1&\frac{30}{11}&\frac{115}{11}\\ 0&0&\frac{1}{11}&\frac{2}{11}\\ 0&\frac{9}{2}&13&\frac{97}{2}\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{9}{2}(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&0&\frac{7}{11}&\frac{91}{11}\\ 0&1&\frac{30}{11}&\frac{115}{11}\\ 0&0&\frac{1}{11}&\frac{2}{11}\\ 0&0&\frac{8}{11}&\frac{16}{11}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{11(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&0&\frac{7}{11}&\frac{91}{11}\\ 0&1&\frac{30}{11}&\frac{115}{11}\\ 0&0&1&2\\ 0&0&\frac{8}{11}&\frac{16}{11}\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{7}{11}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&0&0&7\\ 0&1&\frac{30}{11}&\frac{115}{11}\\ 0&0&1&2\\ 0&0&\frac{8}{11}&\frac{16}{11}\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{30}{11}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&0&0&7\\ 0&1&0&5\\ 0&0&1&2\\ 0&0&\frac{8}{11}&\frac{16}{11}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{8}{11}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1&0&0&7\\ 0&1&0&5\\ 0&0&1&2\\ 0&0&0&0\end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{r} 27\\ 17\\ -29\\ -19\end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{r} 7\\ 5\\ 2\end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 73. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\left[\begin{array}{rrr} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{array}\right]\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\left[\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\left[\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right]\right] = \left[\left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right]\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 74. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\left[\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 4 \\ -1 & 5 & 7 & -2 \end{array}\right]\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\left[\begin{array}{r} 29 \\ -14 \\ 53 \\ -59 \end{array}\right]\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & 29 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -14 \\ 1 & -4 & -7 & 4 & 53 \\ -1 & 5 & 7 & -2 & -59 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & 29 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -14 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 24 \\ -1 & 5 & 7 & -2 & -59 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & 29 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -14 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -30 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -14 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 24 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -30 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -30 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 29 \\ -14 \\ 53 \\ -59 \end{array}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ -6 \\ -4 \\ 0 \end{array}\right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 75. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 9 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 5 & -9 & 0 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} -3 \\ 21 \\ 32 \\ 10 \end{array}\right]\!\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ -4 & 9 & 6 & 21 \\ 0 & 3 & 7 & 32 \\ 5 & -9 & 0 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 32 \\ 5 & -9 & 0 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-5(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 32 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 32 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
.

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. ♢

Ejercicio 76. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{rrrr} -1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -6 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \\ 10 \end{array}\right]\!\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 0 & -5 & -6 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -8 & -5 \\ -2 & 0 & -2 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -8 & -5 \\ -2 & 0 & -2 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & -8 & -5 \\ -2 & 0 & -2 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -3 & 3 & -8 & -5 \\ -2 & 0 & -2 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -23 & -23 \\ -2 & 0 & -2 & 4 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -23 & -23 \\ 0 & 0 & -2 & 14 & 22 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 & 22 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-5(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+5(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-4(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -6 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \\ 10 \end{array} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{array} \right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 77. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{rrrrr} -9 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 6 \\ 5 & -2 & -4 & 0 & -1 \end{array} \right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -87 \\ -2 \\ 6 \\ -22 \\ 48 \end{array} \right]\!\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -9 & 3 & 7 & 1 & 0 & -87 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 6 & -22 \\ 5 & -2 & -4 & 0 & -1 & 48 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{9}(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{29}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 6 & -22 \\ 5 & -2 & -4 & 0 & -1 & 48 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{29}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{19}{9} & -3 & -\frac{11}{3} \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 6 & -22 \\ 5 & -2 & -4 & 0 & -1 & 48 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{29}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{19}{9} & -3 & -\frac{11}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{13}{9} & -\frac{29}{9} & 6 & -\frac{8}{3} \\ 5 & -2 & -4 & 0 & -1 & 48 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-5(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{29}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{19}{9} & -3 & -\frac{11}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{13}{9} & -\frac{29}{9} & 6 & -\frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{10}{9} & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{19}{9} & -3 & -\frac{11}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{13}{9} & -\frac{29}{9} & 6 & -\frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{5}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{10}{9} & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{13}{9} & -\frac{26}{9} & 7 & -7 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{13}{9} & -\frac{29}{9} & 6 & -\frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{4}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{10}{9} & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{13}{9} & -\frac{26}{9} & 7 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{10}{9} & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{13}{9} & -\frac{26}{9} & 7 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{\frac{9}{13}(3)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{10}{9} & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{63}{13} & -\frac{63}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{4}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{54}{13} & \frac{89}{13} \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{63}{13} & -\frac{63}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{54}{13} & \frac{89}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{15}{13} & \frac{37}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{63}{13} & -\frac{63}{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-\frac{1}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{54}{13} & \frac{89}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{15}{13} & \frac{37}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{63}{13} & -\frac{63}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{2}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{54}{13} & \frac{89}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{15}{13} & \frac{37}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{63}{13} & -\frac{63}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{13} & \frac{103}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{15}{13} & \frac{37}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{63}{13} & -\frac{63}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{13} & \frac{103}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{18}{13} & \frac{44}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{63}{13} & -\frac{63}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{13} & \frac{103}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{18}{13} & \frac{44}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & -\frac{49}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-13(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{13} & \frac{103}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{18}{13} & \frac{44}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & -\frac{49}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{12}{13}(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{18}{13} & \frac{44}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & -\frac{49}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{18}{13}(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{13} & -\frac{49}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{3}{13}(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{33}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{33}{13}(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{r} -87 \\ -2 \\ 6 \\ -22 \\ 48 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{r} 7 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 78. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{rrr} 1 & -6 & -9 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{matrix} -35 \\ -14 \\ -12 \\ -22 \\ 14 \end{matrix}\right]\!\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R*.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -9 & -35 \\ 2 & -3 & -4 & -14 \\ 0 & -2 & -3 & -12 \\ 2 & -2 & -6 & -22 \\ -2 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -9 & -35 \\ 0 & 9 & 14 & 56 \\ 0 & -2 & -3 & -12 \\ 2 & -2 & -6 & -22 \\ -2 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -9 & -35 \\ 0 & 9 & 14 & 56 \\ 0 & -2 & -3 & -12 \\ 0 & 10 & 12 & 48 \\ -2 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -9 & -35 \\ 0 & 9 & 14 & 56 \\ 0 & -2 & -3 & -12 \\ 0 & 10 & 12 & 48 \\ 0 & -11 & -14 & -56 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{\frac{1}{9}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -9 & -35 \\ 0 & 1 & \frac{14}{9} & \frac{56}{9} \\ 0 & -2 & -3 & -12 \\ 0 & 10 & 12 & 48 \\ 0 & -11 & -14 & -56 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+6(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{14}{9} & \frac{56}{9} \\ 0 & -2 & -3 & -12 \\ 0 & 10 & 12 & 48 \\ 0 & -11 & -14 & -56 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{14}{9} & \frac{56}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 10 & 12 & 48 \\ 0 & -11 & -14 & -56 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-10(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{14}{9} & \frac{56}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{32}{9} & -\frac{128}{9} \\ 0 & -11 & -14 & -56 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+11(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{14}{9} & \frac{56}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{32}{9} & -\frac{128}{9} \\ 0 & 0 & \frac{28}{9} & \frac{112}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{9(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{14}{9} & \frac{56}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{32}{9} & -\frac{128}{9} \\ 0 & 0 & \frac{28}{9} & \frac{112}{9} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-\frac{1}{3}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{14}{9} & \frac{56}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{32}{9} & -\frac{128}{9} \\ 0 & 0 & \frac{28}{9} & \frac{112}{9} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-\frac{14}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{32}{9} & -\frac{128}{9} \\ 0 & 0 & \frac{28}{9} & \frac{112}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+\frac{32}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28}{9} & \frac{112}{9} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-\frac{28}{9}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{matrix} -35 \\ -14 \\ -12 \\ -22 \\ 14 \end{matrix}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 79. *Sea* M *la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{matrix} -2 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 48 \\ -15 \\ 4 \\ 15 \\ -3 \end{array}\right]\!\!\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R*.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -8 & -6 & 48 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & -24 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & -24 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & -24 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-4(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -9 & 36 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -9 & 36 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & 25 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -9 & 36 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & 25 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{5}(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -9 & 36 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+9(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. $\Diamond$

Ejercicio 80. *Sea* M *la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\left[\begin{array}{r} -8 \\ -9 \\ -9 \\ -10 \\ -16 \end{array}\right]\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R*.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 3 & -10 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & 1 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 3 & -10 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & 1 & -16 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 5 & -18 \\ 2 & -3 & 2 & -5 & 1 & -16 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 5 & -18 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 5 & -18 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 8 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 5 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(3)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 5 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-2(3)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-1(4)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(4)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-2(4)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-5(5)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-5(5)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} -8 \\ -9 \\ -9 \\ -10 \\ -16 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 81. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} -14 \\ -9 \\ 13 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & -14 \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{2}(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+\frac{1}{2}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{1}{2}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} -14 \\ -9 \\ 13 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -3 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 82. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccccc} -3 & 4 & 0 & -3 & 4 \\ -3 & 7 & 0 & 6 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 8 & -4 \\ -4 & 6 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ -13 \\ -15 \\ 4 \\ -2 \end{array}\right]\!\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 4 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 0 & 6 & -6 & -13 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -7 & -15 \\ 1 & 1 & -1 & 8 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & 0 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-\frac{1}{3}(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -3 & 7 & 0 & 6 & -6 & -13 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -7 & -15 \\ 1 & 1 & -1 & 8 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & 0 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -10 & -14 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -7 & -15 \\ 1 & 1 & -1 & 8 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & 0 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -10 & -14 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{43}{3} \\ 1 & 1 & -1 & 8 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & 0 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -10 & -14 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{43}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 7 & -\frac{8}{3} & \frac{13}{3} \\ -4 & 6 & 0 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 9 & -10 & -14 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{43}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 7 & -\frac{8}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{43}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 7 & -\frac{8}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+\frac{4}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & -\frac{52}{9} & -\frac{59}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{43}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 7 & -\frac{8}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{1}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & -\frac{52}{9} & -\frac{59}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{49}{9} & -\frac{143}{9} \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 7 & -\frac{8}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-\frac{7}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & -\frac{52}{9} & -\frac{59}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{49}{9} & -\frac{143}{9} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{46}{9} & \frac{137}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 & -\frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-\frac{2}{3}(2)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & -\frac{52}{9} & -\frac{59}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{49}{9} & -\frac{143}{9} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{46}{9} & \frac{137}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 & -\frac{52}{9} & -\frac{59}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{49}{9} & -\frac{143}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-5(4)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{9} & -\frac{29}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -\frac{10}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{49}{9} & -\frac{143}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-3(4)}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{9} & -\frac{29}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{49}{9} & -\frac{143}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-1(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{9} & -\frac{29}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{46}{9} & -\frac{137}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-9(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{9} & -\frac{29}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{46}{9} & -\frac{137}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+\frac{37}{9}(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{46}{9} & -\frac{137}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+\frac{7}{3}(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{46}{9} & -\frac{137}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+\frac{46}{9}(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+\frac{1}{3}(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ -13 \\ -15 \\ 4 \\ -2 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 83. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & -1 & -5 & -9 \\ -1 & 1 & -1 & -4 & -6 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -6 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} -6 \\ -13 \\ 33 \\ 19 \\ -6 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & -5 & -9 & -6 \\ -1 & 1 & -1 & -4 & -6 & -13 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & -7 & 33 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -6 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -6 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & -5 & -9 & -6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -7 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & -7 & 33 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -6 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -6 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)-1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & -5 & -9 & -6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -7 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & -7 & 33 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -6 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & -5 & -9 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & -7 & 33 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -6 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-5(2)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & -5 & -9 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -6 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(2)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & -5 & -9 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)-1(3)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(4)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-3(4)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)-5(5)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(5)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-3(5)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} -6 \\ -13 \\ 33 \\ 19 \\ -6 \end{array}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{array}\right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 84. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} -9 \\ 15 \\ 3 \\ 11 \end{array}\right]\!\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & -4 & 11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)-1(1)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{-1(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)-2(4)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -9 \\ 15 \\ 3 \\ 11 \end{array}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{array}\right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 85. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -8 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & 5 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{r} -15 \\ -31 \\ 16 \\ 21 \end{array}\right]\!\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -4 & -15 \\ 2 & 3 & -8 & -31 \\ -1 & 1 & 5 & 16 \\ -2 & -2 & 5 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)-2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 16 \\ -2 & -2 & 5 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 21 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)-1(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-2(2)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -4 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&3\\ 0&0&-3&-9\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&-2\\ 0&1&0&-1\\ 0&0&1&3\\ 0&0&0&0\end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} -15\\ -31\\ 16\\ 21\end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} -2\\ -1\\ 3\end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 86. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccc} 1&-1&-2\\ -3&4&6\\ 3&-6&-5\end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 3\\ -9\\ 8\end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&-1&-2&3\\ -3&4&6&-9\\ 3&-6&-5&8\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&-1&-2&3\\ 0&1&0&0\\ 3&-6&-5&8\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)-3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&-1&-2&3\\ 0&1&0&0\\ 0&-3&1&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&-2&3\\ 0&1&0&0\\ 0&-3&1&-1\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&-2&3\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&-1\end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&-1\end{array}\right]$$

.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 3\\ -9\\ 8\end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1\\ 0\\ -1\end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 87. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{cccc} -1&3&-5&-4\\ -2&5&-8&-5\\ -2&6&-9&-8\\ -3&4&-2&4\end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} -21\\ -32\\ -42\\ -11\end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -5 & -4 & -21 \\ -2 & 5 & -8 & -5 & -32 \\ -2 & 6 & -9 & -8 & -42 \\ -3 & 4 & -2 & 4 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 4 & 21 \\ -2 & 5 & -8 & -5 & -32 \\ -2 & 6 & -9 & -8 & -42 \\ -3 & 4 & -2 & 4 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 4 & 21 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 10 \\ -2 & 6 & -9 & -8 & -42 \\ -3 & 4 & -2 & 4 & -11 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 4 & 21 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 4 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 4 & 21 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 13 & 16 & 52 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{-1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 13 & 16 & 52 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 13 & 16 & 52 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+5(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)-3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+5(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} -21 \\ -32 \\ -42 \\ -11 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 88. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{array}\right]\right] = \left[\left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right]\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 89. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\left[\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right]\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{array}\right]\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 90. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\lozenge$

Ejercicio 91. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\left[\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}\right]\right] = \left[\left[\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right]\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 92. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\left[\begin{matrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\left[\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right]\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. ♢

Ejercicio 93. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{array}\right]\!\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. $\Diamond$

Ejercicio 94. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 95. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{matrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]\!\!\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R*.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 96. *Sea* M *la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo* $\mathbb{Z}_5$ *que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{array} \right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{array}\right]\!\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. $\Diamond$

Ejercicio 97. *Sea* M *la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo* $\mathbb{Z}_5$ *que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{matrix}1\\2\\0\\0\\0\end{matrix}\right]\!\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2&1&3&1&3&1\\ 1&0&3&4&0&2\\ 0&1&4&2&4&0\\ 0&0&3&3&3&0\\ 4&3&2&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&3&4&3&4&3\\ 1&0&3&4&0&2\\ 0&1&4&2&4&0\\ 0&0&3&3&3&0\\ 4&3&2&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&3&4&3&4&3\\ 0&2&4&1&1&4\\ 0&1&4&2&4&0\\ 0&0&3&3&3&0\\ 4&3&2&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&3&4&3&4&3\\ 0&2&4&1&1&4\\ 0&1&4&2&4&0\\ 0&0&3&3&3&0\\ 0&1&1&3&0&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&3&4&3&4&3\\ 0&1&2&3&3&2\\ 0&1&4&2&4&0\\ 0&0&3&3&3&0\\ 0&1&1&3&0&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&3&4&0&2\\ 0&1&2&3&3&2\\ 0&1&4&2&4&0\\ 0&0&3&3&3&0\\ 0&1&1&3&0&3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&3&4&0&2\\ 0&1&2&3&3&2\\ 0&0&2&4&1&3\\ 0&0&3&3&3&0\\ 0&1&1&3&0&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&3&4&0&2\\ 0&1&2&3&3&2\\ 0&0&2&4&1&3\\ 0&0&3&3&3&0\\ 0&0&4&0&2&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&3&4&0&2\\ 0&1&2&3&3&2\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&3&3&3&0\\ 0&0&4&0&2&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&3&1&0\\ 0&1&2&3&3&2\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&3&3&3&0\\ 0&0&4&0&2&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&3&1&0\\ 0&1&0&4&2&4\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&3&3&3&0\\ 0&0&4&0&2&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&3&1&0\\ 0&1&0&4&2&4\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&0&2&4&3\\ 0&0&4&0&2&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&3&1&0\\ 0&1&0&4&2&4\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&0&2&4&3\\ 0&0&0&2&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&3&1&0\\ 0&1&0&4&2&4\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&0&1&2&4\\ 0&0&0&2&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&3\\ 0&1&0&4&2&4\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&0&1&2&4\\ 0&0&0&2&0&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&4&3\\ 0&0&1&2&3&4\\ 0&0&0&1&2&4\\ 0&0&0&2&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&4&3\\ 0&0&1&0&4&1\\ 0&0&0&1&2&4\\ 0&0&0&2&0&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&4&3\\ 0&0&1&0&4&1\\ 0&0&0&1&2&4\\ 0&0&0&0&1&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&1\\ 0&0&0&1&2&4\\ 0&0&0&0&1&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&3\\ 0&0&0&1&2&4\\ 0&0&0&0&1&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&3\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&2 \end{array}\right]$$

.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\diamondsuit$

Ejercicio 98. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\diamondsuit$

Ejercicio 99. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 100. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{cccc} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ♢

Ejercicio 101. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2&4&3&2&0&4\\ 0&1&0&2&2&1\\ 4&2&0&3&0&3\\ 3&3&1&0&3&0\\ 3&2&3&3&0&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&4&1&0&2\\ 0&1&0&2&2&1\\ 4&2&0&3&0&3\\ 3&3&1&0&3&0\\ 3&2&3&3&0&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&4&1&0&2\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&4&4&4&0&0\\ 3&3&1&0&3&0\\ 3&2&3&3&0&3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&4&1&0&2\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&4&4&4&0&0\\ 0&2&4&2&3&4\\ 3&2&3&3&0&3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&2&4&1&0&2\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&4&4&4&0&0\\ 0&2&4&2&3&4\\ 0&1&1&0&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&4&2&1&0\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&4&4&4&0&0\\ 0&2&4&2&3&4\\ 0&1&1&0&0&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&4&2&1&0\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&4&1&2&1\\ 0&2&4&2&3&4\\ 0&1&1&0&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&4&2&1&0\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&4&1&2&1\\ 0&0&4&3&4&2\\ 0&1&1&0&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&4&2&1&0\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&4&1&2&1\\ 0&0&4&3&4&2\\ 0&0&1&3&3&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&4&2&1&0\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&1&4&3&4\\ 0&0&4&3&4&2\\ 0&0&1&3&3&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&4&4\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&1&4&3&4\\ 0&0&4&3&4&2\\ 0&0&1&3&3&1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&4&4\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&1&4&3&4\\ 0&0&0&2&2&1\\ 0&0&1&3&3&1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&4&4\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&1&4&3&4\\ 0&0&0&2&2&1\\ 0&0&0&4&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&4&4\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&1&4&3&4\\ 0&0&0&1&1&3\\ 0&0&0&4&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&3&1\\ 0&1&0&2&2&1\\ 0&0&1&4&3&4\\ 0&0&0&1&1&3\\ 0&0&0&4&0&2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&3&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&4&3&4\\ 0&0&0&1&1&3\\ 0&0&0&4&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&3&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&2\\ 0&0&0&1&1&3\\ 0&0&0&4&0&2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&3&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&2\\ 0&0&0&1&1&3\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&4&2\\ 0&0&0&1&1&3\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2\\ 0&0&0&1&1&3\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&2\\ 0&0&0&1&0&3\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 4\\1\\3\\0\\3 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1\\0\\2\\3\\0 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 102. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}\right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 103. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right]\!\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4,5)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. ♢

Ejercicio 104. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+4(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 105. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+3(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+3(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+3(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 106. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determina si el punto $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+4(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 107. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+4(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+3(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. ◊

Ejercicio 108. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right]\!\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 109. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2,4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3,4)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 110. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\!\left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]\!\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right]\!\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]\!\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 111. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+1(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(5)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 112. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. ◊

Ejercicio 113. *Sea* M *la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo* $\mathbb{Z}_3$ *que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right]\!\right]$ *está en* M *y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia* R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 114. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right]\!\right] = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right]\!\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$

Ejercicio 115. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right]\!\right]$ está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(2)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{(3)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(2)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

.

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. ◊

Ejercicio 116. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right]\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+1(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+1(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(4)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(1,2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1,3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2,3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Como la columna de los términos independientes es una columna pivote, concluimos que el sistema no tiene solución y por lo tanto P no está en la variedad proyectiva M. $\Diamond$

Ejercicio 117. *Sea M la variedad proyectiva definida sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_3$ que tiene el sistema de referencia proyectivo dado por la matriz*

$$R = \left[\!\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]\!\right]$$

Determina si el punto $P = \left[\!\left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]\!\right]$ *está en M y en caso de estarlo, calcula sus coordenadas proyectivas en el sistema de referencia R.*

Solución: Las coordenadas de P se puede obtener resolviendo el sistema $RX = P$ y para ello , tomamos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(3)+1(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(3)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(4)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{(1)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(2)+1(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{(5)+2(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

.

Por lo tanto P escrito en el sistema de referencia R es $P = \left[\left[\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right]\right] = \left[\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]\right]_R$. Estas coordenadas están definidas salvo múltiplos no nulos. $\Diamond$