Espacios Vectoriales

Leandro Marín

leandro@um.es

Octubre 2010

Índice

Definición y Ejemplos

Paramétricas vs. Implícitas

Bases y Coordenadas

- Para definir un espacio vectorial tenemos que empezar determinando un cuerpo sobre el que esté definido al que llamaremos K. Habitualmente K será el cuerpo $\mathbb{R}$, aunque puede ser cualquier otro.

- Para definir un espacio vectorial tenemos que empezar determinando un cuerpo sobre el que esté definido al que llamaremos K. Habitualmente K será el cuerpo $\mathbb{R}$, aunque puede ser cualquier otro.
- Los elementos del cuerpo se denominan escalares y se suelen representar por letras griegas como $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$

- Para definir un espacio vectorial tenemos que empezar determinando un cuerpo sobre el que esté definido al que llamaremos K. Habitualmente K será el cuerpo $\mathbb{R}$, aunque puede ser cualquier otro.
- Los elementos del cuerpo se denominan escalares y se suelen representar por letras griegas como $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$
- Los elementos del espacio vectorial se denominan vectores y se representan por letras como $u, v, w, \ldots$

- Para definir un espacio vectorial tenemos que empezar determinando un cuerpo sobre el que esté definido al que llamaremos K. Habitualmente K será el cuerpo $\mathbb{R}$, aunque puede ser cualquier otro.
- Los elementos del cuerpo se denominan escalares y se suelen representar por letras griegas como $\alpha, \beta, \lambda, \mu, ...$
- Los elementos del espacio vectorial se denominan vectores y se representan por letras como $u, v, w, ...$
- Los vectores se pueden sumar y restar entre si y también se pueden multiplicar por escalares cumpliendo las propiedades algebraicas hatibuales.

Sea K un cuerpo. Un espacio vectorial sobre K es un conjunto no vacío V con dos operaciones $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : K \times V \to V$ tales que:

- **0+** $\exists 0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$.
- **c+** $\forall u, v \in V$, $u + v = v + u$.
- **a+** $\forall u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
- **i+** $\forall u \in V$ existe un elmento en V al que llamaremos $-u$ tal que $u + (-u) = 0$.
- **1** $\forall v \in V$, $1v = v$.
- **d** $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in K$, $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ y $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
- **cmp** $\forall u \in V$, $\forall \lambda, \mu \in K$, $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$.

Ejemplo 1

Dado un cuerpo K y un número natural n, el conjunto formado por las matrices de tamaño $n \times 1$ (matrices columna de tamaño n) es un espacio vectorial.
Este espacio vectorial es el principal ejemplo de espacio vectorial y se denota K^n.

Ejemplo 2

Dado un cuerpo K y número naturales n y m, el conjunto formado por las matrices de tamaño $n \times m$ es un espacio vectorial.
Veremos más adelante que en un espacio vectorial lo importante son las *coordenadas* de los vectores, en el caso de matrices estas se corresponden con los números que los forman. Desde el punto de vista de los espacios vectoriales las matrices de tamaño $n \times m$ son como los vectores de tamaño $n \times m$ porque lo que nos importa realmente son *los números que determinan cada elemento*.

Ejemplo 3

El conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ no es un espaco vectorial.
Este conjunto es la circunferencia de radio 1 y no es un espacio vectorial porque no contiene al vector 0 (entre otras muchas razones).

Ejemplo 4

El conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ no es un espaco vectorial.
Este conjunto es el círculo de radio 1 y no es un espacio vectorial porque aunque ahora sí contiene al vector 0, sin embargo la operación de suma no está bien definida porque no es interna: Dados dos vectores del círculo de radio 1, por ejemplo el $(1, 0)$ y el $(0, 1)$, su suma $(1, 1)$ está fuera del círculo.

Ejemplo 5

El intervalo $[-1, 1]$ de la recta real no es un espacio vectorial, porque de nuevo la suma no es interna: El elemento 1 está, pero si sumamos $1 + 1 = 2$ no está dentro del conjunto.
Tampoco cumple que el producto por escalares sea interno, si consideramos el elemento $1/2$ que pertenece al conjunto, si lo multiplicamos por $6 \in \mathbb{R}$, tenemos $6 \cdot (1/2) = 3 \notin [-1, 1]$. Esta propiedad también fallaba en casos anteriores.

Ejemplo 6

El semieje positivo $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ tiene al 0 y la suma es interna, sin embargo no es un espacio vectorial.
La razón es porque no tiene los negativos y por tanto dado u en el conjunto, el elemento $-u$ no está en el conjunto y la existencia de inversos para la suma es obligatoria.
En ejemplos anteriores, esta propiedad sí se cumplía.

Ejemplo 7

El ejemplo anterior se puede aplicar a cualquier semirrecta: Supongamos que v es un vector distinto de 0 y consideramos $S = \{\lambda v : \lambda \geq 0\}$. Este conjunto no es un espacio vectorial porque $\lambda v \in S$ pero su negativo, $-\lambda v \notin V$.

Ejemplo 8

Una recta completa SI es un espacio vectorial:
Supongamos que v es un elemento de un espacio vectorial sobre K y consideremos el conjunto $R = \{\lambda v : \lambda \in K\}$, entonces R es un espacio vectorial.

Ejemplo 9

En el plano $\mathbb{R}^2$, los ejes X e Y son espacios vectoriales por ser rectas.
La unión de ambos conjuntos sin embargo no es un espacio vectorial:
El vector $(0,1)$ está en el eje X y el $(1,0)$ en el eje Y, sin embargo su suma $(1,1)$ no está ni en el eje X ni en el eje Y.
Este ejemplo prueba que la unión de espacios vectoriales no es en general un espacio vectorial.

Ejemplo 10

Si tenemos dos rectas, $R = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $S = \{\mu v : \mu \in \mathbb{R}\}$, la unión en general no es un espacio vectorial como hemos visto antes.
Si queremos garantizar que sea espacio vectorial tenemos que hacer todas las sumas posibles de elementos de R y elementos de S, es decir

$$P = \{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

sí es un espacio vectorial.

Suma de Espacios Vectoriales

Dados dos espacios vectoriales V y W, su unión no es un espacio vectorial en general, pero su suma sí lo es.

La suma de los espacios vectoriales V y W, que se denota como $V + W$, se define como todas el conjunto de todas las posibles sumas de vectores de V con vectores de W.

El el caso de las rectas R y S anteriores,

$R + S = \{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Podemos sumar cualquier número de espacios vectoriales, siempre que estén todos dentro de un mismo espacio que los contenga a todos (sean subespacios de un mismo espacio).

Ejemplo 11

Las rectas en el plano también se puden dar de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 10y = 0\}$$

En general, dada cualquier ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = 0$, los puntos que son solución de dicha ecuación forman un espacio vectorial contenido en $\mathbb{R}^k$ (subespacio).

Intersección de Espacios Vectoriales

Dados dos espacios vectoriales V y W, su intersecciń $V \cap W$ es un espacio vectorial.
Se puede intersecar cualquier cantidad de subespacios vectoriales y sigue siendo un subespacio vectorial.

Ejemplo 12

El conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$2x + 3y - z = 0$$

$$x - y + 2z = 0$$

es un espacio vectorial.
La razón es porque en realidad no es más que la intersección de los espacios dados por la primera y por la segunda ecuación.

Ejemplo 13

El conjunto de soluciones de cualquier sistema de ecuaciones homogéneo es un espacio vectorial.
Si el sistema no es homogéneo, no puede serlo porque no contiene al vector 0.

Definition

Cuando un espacio vectorial nos lo den a partir de las ecuaciones que tienen que cumplir sus puntos, diremos que nos lo están dando *en forma implícita*.

Combinaciones Lineales

Definition

Sean $v_1, v_2, \cdots, v_k$ elementos de un espacio vectorial V y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ elementos de K. Llamaremos combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ con coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ al vector

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$$

Espacios Generados por Vectores

Definition

Al conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ con coeficientes cualesquiera lo llamaremos *espacio vectorial generado por dichos vectores*. Lo representaremos por $\langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle$.

Cuando un espacio vectorial nos lo den de esta forma, diremos que está en forma paramétrica porque nos dicen que el espacio vectorial considerado es el de los vectores de la forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son parámetros cualesquiera.

Paramétricas vs. Implícitas

Hemos visto que un espacio vectorial nos lo pueden dar en forma paramétrica y en forma implícita.
Depende del tipo de operaciones que queramos hacer con el subespacio, a veces es conveniente tenerlo en una forma y a veces de otra, por lo que tenemos que aprender a pasar de forma implícita a paramétrica y viceversa.
El proceso es muy sencillo y lo veremos con un ejemplo.

Paso de Implícitas a Paramétricas

Supongamos que tenemos el espacio vectorial en forma impícita

$$2x + y - z = 0 \quad x - 2y + z = 0 \quad 3x - y = 0$$

y nos piden que lo pongamos en forma paramétrica.
En realidad este proceso lo hemos hecho muchas veces, puesto que no es más que resolver el sistema de ecuaciones.

Si reducimos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(en realidad la última columna no la necesitamos si el sistema es homogéneo porque siempre será 0). La reducida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de la reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deducimos que $(x, y, z) = (\lambda/5, 3\lambda/5, \lambda) = \lambda(1/5, 3/5, 1)$ donde λ es un número real cualquiera. Esta solución es la forma paramétrica del espacio anterior.

Paso de Paramétricas a Implícitas

Supongamos ahora el proceso inverso. Nos dan unos vectores $(1,1,2)$, $(2,-1,5)$, $(1,-2,3)$ y nos dicen que calculemos las ecuaciones implícitas del espacio generado por ellos:
Dicho de otra forma, tenemos que calcular todos los valores x, y, z tales que existe valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ con

$$a + 2b + c = x \quad a - b - 2c = y \quad 2a + 5b + 3c = z$$

Si tratamos de resolver el sistema considerando x, y, z como términos independientes tenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & -1 & -2 & y \\ 2 & 5 & 3 & z \end{pmatrix}$$

Si triangularizamos la matriz obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & -3 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & -3z-y+7x \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible y por lo tanto tenga solución, la relación que se tiene que cumplir entre x, y y z es precisamente

$$-3z - y + 7x = 0$$

que es la ecuación implícita del espacio considerado.

- Al hacer las reducciones de las matrices correspondientes nos podemos encontrar en mutitud de casos diferentes, que iremos viendo en prácticas.

- Al hacer las reducciones de las matrices correspondientes nos podemos encontrar en mutitud de casos diferentes, que iremos viendo en prácticas.
- El número de vectores que generan un espacio o las ecuaciones que lo definen de forma implícita dependen del ejemplo concreto. En estos casos ha sido uno en cada una de las soluciones, pero podrían ser varios.

- Al hacer las reducciones de las matrices correspondientes nos podemos encontrar en mutitud de casos diferentes, que iremos viendo en prácticas.
- El número de vectores que generan un espacio o las ecuaciones que lo definen de forma implícita dependen del ejemplo concreto. En estos casos ha sido uno en cada una de las soluciones, pero podrían ser varios.
- La representación en forma paramétrica o implícita no es única, por lo tanto la solución de un problema de cambio de una representación a otro tampoco lo es.

Recordemos lo que era una combinación lineal:

Definition

Sean $v_1, v_2, \cdots, v_k$ elementos de un espacio vectorial V y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ elementos de K. Llamaremos combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_k$ con coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ al vector

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$$

También vimos que el espacio generado por todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, \cdots, v_k$ era un espacio vectorial que llamábamos espacio generado por esos vectores y lo denotábamos $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle$.

Conjuntos Generadores

Definition

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$ diremos que es un conjunto generador de V si el subespacio generado por ellos es todo el espacio , es decir

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle = V.$$

- El que un conjunto sea generador, depende del espacio en el que lo consideremos.

- El que un conjunto sea generador, depende del espacio en el que lo consideremos.
- Los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$ son siempre un conjunto generador de $\langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle$, pero no son generadores de V si no se cumple la igualdad $\langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle = V$.

- El que un conjunto sea generador, depende del espacio en el que lo consideremos.
- Los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_k \in V$ son siempre un conjunto generador de $\langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle$, pero no son generadores de V si no se cumple la igualdad $\langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle = V$.
- Si un conjunto es generador y lo ampliamos con cualquier otro vector, el nuevo conjunto sigue siendo generador.

Vectores Linealmente Independientes

El vector 0 siempre se puede poner como combinación lineal de una familia de vectores, no hay más que poner todos los coeficientes a 0 y el resultado es 0.
Si esa es la única forma de ponerlo, diremos que los vectores son linealmente independientes.

Definition

Sean $v_1, v_2, \cdots, v_k$ vectores de un espacio vectorial V sobre K. Diremos que estos vectores son linealmente independientes si la única combinación lineal de estos vectores que cumple:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

es la que cumple $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

- La condición de independencia lineal no depende del espacio en el que se consideren los vectores, si unos vectores pertenecen a dos subespacios diferentes y son linealmente independientes considerados en el primero, también lo son en el segundo y viceversa.

- La condición de independencia lineal no depende del espacio en el que se consideren los vectores, si unos vectores pertenecen a dos subespacios diferentes y son linealmente independientes considerados en el primero, también lo son en el segundo y viceversa.
- Cualquier subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independiente es linealmente indendiente.

Bases

Definition

Un conjunto de vectores de V diremos que es una base de V si es linealmente independiente y generador de V.

Definition

Dada una base $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ de V y un vector $v \in V$, llamaremos coordenadas de v en la base B a los valores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k$. Estos valores existen por ser un conjunto generador y son únicos por la independencia lineal.

- Todos los espacios vectoriales tienen bases, en algunos casos pueden ser infinitas, pero nosotros trataremos sólo casos en los cuales las bases son finitas.

- Todos los espacios vectoriales tienen bases, en algunos casos pueden ser infinitas, pero nosotros trataremos sólo casos en los cuales las bases son finitas.
- Un espacio vectorial puede tener muchas bases diferentes, pero todas ellas tienen el mismo número de elementos.

- Todos los espacios vectoriales tienen bases, en algunos casos pueden ser infinitas, pero nosotros trataremos sólo casos en los cuales las bases son finitas.
- Un espacio vectorial puede tener muchas bases diferentes, pero todas ellas tienen el mismo número de elementos.
- Dicho número se llama la dimensión del espacio.

- Todos los espacios vectoriales tienen bases, en algunos casos pueden ser infinitas, pero nosotros trataremos sólo casos en los cuales las bases son finitas.
- Un espacio vectorial puede tener muchas bases diferentes, pero todas ellas tienen el mismo número de elementos.
- Dicho número se llama la dimensión del espacio.
- Utilizando coordenadas, un espacio vectorial de dimensión n se puede estudiar como si fuera exactamente K^n puesto que la base nos permite traducir todos los resultados.