Repaso de matrices.

Álgebra y Matemática Discreta (AMD) - Grado en Informática

Facultad de Informática. Universidad de Murcia

Septiembre-2016

Observación previa

Definición

Llamamos **cuerpo** a cualquier conjunto $\mathbb{K}$ de números que se puedan sumar, restar, multiplicar y dividir (exceptuando la división por cero), con la condición de que cuando realicemos una de estas operaciones entre dos números del conjunto $\mathbb{K}$ el resultado sea otro número perteneciente a dicho conjunto $\mathbb{K}$.

Ejemplos

Los siguientes conjuntos son cuerpos:

- $\mathbb{Q} \longrightarrow$ Conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{R} \longrightarrow$ Conjunto de los números reales.
- $\mathbb{C} \longrightarrow$ Conjunto de los números complejos.
- $\mathbb{Z}_5 \longrightarrow$ Conjunto de los restos de la división entera entre un número entero cualquiera y el número 5.

Los siguientes conjuntos NO son cuerpos:

- $\mathcal{N} \longrightarrow$ Conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z} \longrightarrow$ Conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{Z}_4 \longrightarrow$ Conjunto de los restos de la división entera por 4.

MATRICES

Definiciones

- Una **matriz** de tamaño $m \times n$, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, es un conjunto de $m \cdot n$ elementos de $\mathbb{K}$ dispuestos en m-filas y n-columnas.
- Al conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ lo denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (o simplemente por $\mathcal{M}_{m\times n}$, si está claro de que cuerpo $\mathbb{K}$ se trata)
- Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, usualmente la escribiremos como, $A = (a_{ij})$, donde a_{ij} representa al elemento que ocupa la fila i y columna j, o dicho de otra forma la posición i, j.
- Cuando $m = n$, diremos que la matriz A es cuadrada.
- Para cualquier matriz cuadrada los elementos a_{ii}, es decir, aquellos en los que el nº de fila es igual al nº de columna, forman la "*diagonal principal*" de la matriz.

Matrices

Ejemplos de matrices

Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Q}), \quad B = \begin{pmatrix} -2 & \pi & e \\ 100 & 5/6 & tg(\pi/5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 8}(\mathbb{Z}_5)$$

Matrices

Más ejemplos de matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matriz diagonal}, \ E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matriz columna}$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matriz fila}$$

$$D \in \mathcal{M}_{4\times 4}\,, \quad E \in \mathcal{M}_{3\times 1}\,, \quad F \in \mathcal{M}_{1\times 4}$$

- Las matrices surgen de forma natural en muchos ámbitos, por ejemplo:

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & & & - & 3z & = & 1 \\ & & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Los coeficientes de las incógnitas x, y, z forman un arreglo rectangular de números,

Matrices

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & & & - & 3z & = & 1 \\ & & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Los coeficientes de las incógnitas x, y, z forman un arreglo rectangular de números,

$$\text{Matriz de coeficientes del sistema} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se suele ampliar con los coeficientes del lado derecho de las ecuaciones,

$$\text{Matiz ampliada del sistema} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

• La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales contiene toda la información de dicho sistema.

Operaciones con matrices

Definición (Suma de matrices)

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es decir, sean dos matrices A y B del mismo tamaño. Entonces se define,

$$A + B$$

Como,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Definición (Producto de un número por una matriz)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y sea $r \in \mathbb{K}$, es decir, sea una matriz A y sea r un número. Entonces se define,

$$r \cdot A$$

Como,

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} & \cdots & r \cdot a_{1n} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} & \cdots & r \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r \cdot a_{m1} & r \cdot a_{m2} & \cdots & r \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Recuerda

Las operaciones de suma de matrices y producto de una matriz por un número se realizan "**elemento a elemento**" y, por tanto, tienen las propiedades usuales de la suma y el producto en el cuerpo $\mathbb{K}$ (al que pertenecen los números que forman las matrices).

¡Ojo!

Las matrices A y B se pueden sumar si:

n° de filas de A = n° de filas de B

y

n° de columnas de A = n° de columnas de B

Ejemplos

Suma de dos matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 & 2+5 & 0-3 \\ 3+1 & 0-1 & -4+2 \\ 1+4 & -1-2 & 2+0 \\ 4+1 & 2-1 & -1+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Producto de un número por una matriz

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 0 & 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

• La matriz de orden $m \times n$ en la que todas sus entradas (elementos) son cero se llama "la matriz cero (o nula) de orden $m \times n$" y se denota por $0_{m \times n}$ o simplemente por 0 cuando está claro cual es su tamaño. Por ejemplo:

$$0 = 0_{2\times 5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición

La suma de matrices cumple las siguientes propiedades,

a) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ entonces $A + B = B + A$

b) $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ entonces $(A + B) + C = A + (B + c)$

c) Existe $0_{m\times n} = 0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $0 + A = A + 0 = A$ para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

d) Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ existe $-A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + (-A) = 0_{m\times n}$

Operaciones con matrices

Definición. **Producto de matrices**

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, llamaremos **producto de A por B** y lo denotaremos por, $A \cdot B$, a la matriz

$$A \cdot B = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$$

donde cada una de sus entradas (elementos) c_{ij} vale:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

• Es decir el elemento i,j de la matriz producto es el resultado de multiplicar, elemento a elemento, la fila i de A por la columna j de B y sumar todos esos productos.

• Para que el producto de A por B se pueda realizar, es necesario que el nº de columnas de A sea igual que el nº de filas de B.

$$\underbrace{A \cdot B}_{(m\times n)\,(n\times p)} = \underbrace{C}_{(m\times p)}$$

Ejemplos

Producto de matrices

Para las siguientes matrices con entradas (elementos) en $\mathbb{Q}$ explica qué productos se podrían realizar y calcula alguno de ellos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos

Producto de matrices

Para las siguientes matrices con entradas (elementos) en $\mathbb{Q}$ explica qué productos se podrían realizar y calcula alguno de ellos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como,

$$A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{Q}),\ B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{Q}),\ C \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{Q})$$

podemos realizar los siguientes productos,

$$A \cdot C \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{Q}), \quad B \cdot A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{Q})$$

cada matriz cuadrada se puede multiplicar por ella misma tantas veces como queramos, de manera que también podemos realizar el producto:

$$B \cdot B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{Q})$$

Un ejemplo con resultado

Calcula los siguientes productos de matrices y compara los resultados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con resultado

Calcula los siguientes productos de matrices y compara los resultados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con resultado

Calcula los siguientes productos de matrices y compara los resultados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo con resultado

Calcula los siguientes productos de matrices y compara los resultados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resultado

Luego, en general, aún en el caso de que se puedan realizar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ sucede que el producto de matrices **NO ES CONMUTATIVO**. Es decir, en general, $A \cdot B \neq B \cdot A$, aún cuando existan ambos productos.

Propiedades del producto de matrices

• Llamamos "matriz identidad de orden n" y la denotamos por, I_n, a la matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1 y los demás elementos iguales a 0. Por ejemplo,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición

En cada uno de los siguientes apartados se considera que A, B, C son matrices sobre $\mathbb{K}$ tales que las correspondientes operaciones pueden realizarse, entonces:

a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

b) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

c) $A \cdot (r \cdot B) = (r \cdot A) \cdot B = r \cdot (A \cdot B), \quad \forall r \in \mathbb{K}$

d) Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ entonces $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$

Algunas definiciones

Definición

Dada una matriz cuadrada A denotaremos por A^n al producto de matrices

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n veces } A}$$

Definición

Dada una matriz A llamaremos "transpuesta de A" y la denotaremos por A^t, a la matriz que tiene por columnas las filas de A.

Luego si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ entonces $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$

Ejemplo de matriz transpuesta

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{Q})$. Entonces,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Se demuestra fácilmente el siguiente resultado:

Proposición

Sean A y B matrices con entradas (elementos) en el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y de tamaños adecuados, entonces:

a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

b) $(r \cdot A)^t = r \cdot A^t \ , \quad \forall r \in \mathbb{K}$

c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Definición

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice que es:

a) Simétrica si $A^t = A$

b) Antisimétrica si $A^t = -A$

c) Diagonal si $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$

d) Triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$

e) Triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$

Ejercicio

Indica de que tipo son las siguientes matrices:

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

¿Hay alguna relación entre las matrices D y E?. Si la hay, qué conclusión sacas de dicha relación.

Matrices invertibles

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n, diremos que A es *invertible* si existe otra matriz B (necesariamente cuadrada y del mismo tamaño que A) tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

En este caso, esta segunda matriz B es única, con dicha propiedad, se llama *inversa de A* y la denotaremos mediante A^{-1}

- Veamos la unicidad de la inversa

Matrices invertibles

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n, diremos que A es *invertible* si existe otra matriz B (necesariamente cuadrada y del mismo tamaño que A) tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

En este caso, esta segunda matriz B es única, con dicha propiedad, se llama *inversa de A* y la denotaremos mediante A^{-1}

- Veamos la unicidad de la inversa

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y supongamos que existen $B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tales que:

$$\left.\begin{aligned} A \cdot B = B \cdot A &= I_n \\ A \cdot C = C \cdot A &= I_n \end{aligned}\right\} \quad \text{Entonces}$$

$$B = B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$$

Luego si existe la inversa de A, es única.

Propiedades de las matrices invertibles

Ejercicio

- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ comprueba que su inversa es:
  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no es invertible

¡OJO!

No toda matriz cuadra es invertible!.

Proposición

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n invertibles. Entonces:

a) $A \cdot B$ es invertible y su inversa es $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

b) A^t es invertible y su inversa es $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Operaciones elementales por filas en una matriz

• Dada una matriz A, hacer una operación elemental por filas sobre A, consiste en realizar una de las siguientes operaciones, en dicha matriz:

- Intercambiar las filas i y j de lugar.
- Multiplicar la fila i por un número distinto de cero.
- Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un número λ.

Definición

Dos matrices se dice que son equivalentes por filas si se puede pasar de una a otra mediante una sucesión de operaciones elementales por filas.

Reducción por filas y formas escalonadas de una matriz:

- En las definiciones siguientes, una **fila** (o columna) **diferente de cero** en una matriz significa una fila (o columna) que contiene por lo menos una entrada diferente de cero.
- En una **fila diferente de cero**, llamamos **entrada principal**, de dicha fila, a la entrada diferente de cero que está más a la izquierda.

Forma escalonada de una matriz

Definición

Diremos que una matriz está en forma escalonada por filas si tiene tres siguientes propiedades:

1. Las filas no nulas están situadas encima de las filas nulas.
2. Cada entrada principal de una fila está más a la derecha que la entrada principal de las filas superiores.
3. Las entradas de una columna que están debajo de una entrada principal son cero.

Si una matriz en forma escalonada por filas satisface además las dos siguientes condiciones, diremos que está en forma escalonada reducida por filas.

4. Las entradas principales valen 1.
5. Cada 1 principal es la única entrada diferente de cero en su columna.

Ejemplos de matrices escalonadas

- Matriz en forma escalonada $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$

- Las siguientes matrices están en forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las entradas principales($\blacksquare$) pueden tener cualquier valor diferente de cero; las entradas con asterisco (*) pueden tener cualquier valor, incluido el cero.

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas

- Matriz en forma escalonada reducida $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida, porque las entradas principales son 1, y hay 0 debajo y arriba de cada 1 principal.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma escalonada de una matriz

• Una matriz cualquiera se puede **reducir por filas** (esto es, transformarse por operaciones elementales de fila) a más de una matriz escalonada, si se usan sucesiones diferentes de operaciones por fila. Sin embargo, la forma escalonada reducida que se obtiene para una matriz es única.

Teorema

Cada matriz es equivalente por filas a una y sólo una matriz escalonada reducida.

• En vista del resultado del teorema anterior, las entradas principales se encuentran siempre en las mismas posiciones sea cual sea la forma escalonada por filas obtenida a partir de una matriz dada.

Definición (Posiciones pivote)

- Una **posición pivote** de una matriz A es una posición de A que corresponde a una entrada principal en una forma escalonada de A.
- Una **columna pivote** de A es una columna de A que contiene una posición pivote.
- Los **pivotes** son las entradas principales de la forma escalonada.

ALGORITMO DE REDUCCIÓN POR FILAS (GAUSS-JORDAN)

Consta de cuatro pasos que proporciona una matriz escalonada más un quinto paso que nos da la forma reducida.

1. Comenzamos con la columna distinta de cero colocada más a la izquierda. Ésta es una columna pivote. La posición pivote está en lo más alto de esta columna.
2. Seleccionar como pivote una entrada no nula de la columna pivote. Si es necesario intercambiar filas para poner el elemento pivote en la posición pivote.
3. Sumar a cada fila por debajo de la posición pivote el múltiplo adecuado de la fila del pivote para hacer ceros toda la columna debajo del pivote.
4. Cubra (o ignore) la fila que contiene la posición pivote y cubra todas las filas, si las hubiese, que estén por encima. Aplique los pasos 1-3 a la matriz que queda. Repita el proceso hasta que no queden filas diferentes de cero que modificar.
5. Comenzando con el pivote más a la derecha y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda, haga ceros encima de cada pivote. Si el pivote no vale 1, divida esa fila por el valor del pivote.

Observaciones

- Los pasos 1-4 se llama la parte progresiva del algoritmo y el paso 5 se llama la fase regresiva.
- Para reducir los errores de redondeo, en el paso 2 se suele elegir como pivote el elemento de la columna que tenga mayor valor absoluto.

Ejercicio

Encuentra la forma escalonada reducida por filas de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$