Repaso de Sistemas de ecuaciones.

Álgebra y Matemática Discreta (AMD) - Grado en Informática

Facultad de Informática. Universidad de Murcia

Septiembre-2016

Ecuaciones lineales

Definición

Sea $\mathbb{K}$ (por ejemplo, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_5$) un cuerpo de números. Una ecuación lineal definida en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde los $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ son elementos (números) conocidos, llamados coeficientes de la ecuación, las $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$, son elementos desconocidos, llamadas las incógnitas de la ecuación y el número $b \in \mathbb{K}$, que también es conocido, se llama término independiente (o coeficiente del lado derecho)

Ejemplos ecuaciones lineales definidas en $\mathbb{R}$

- $2x - \sqrt{3}\,y = 1$
  coeficientes, $2, -\sqrt{3}$, incógnitas x, y, y término independiente 1.
- $2x + 3y–2z + 5t = 12$
  coeficientes, $2, 3, -2, 5$, incógnitas, x, y, z, t y término independiente, 12

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$
2. $xy + 3z - 5t = 3$

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$
2. $xy + 3z - 5t = 3$
3. $2x + cos(\frac{\pi}{3})\,y - 2z + 5t = 12$

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$
2. $xy + 3z - 5t = 3$
3. $2x + cos(\frac{\pi}{3})\,y - 2z + 5t = 12$
4. $\sqrt{2x} + 3y = 0$

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$
2. $xy + 3z - 5t = 3$
3. $2x + cos(\frac{\pi}{3})\,y – 2z + 5t = 12$
4. $\sqrt{2x} + 3y = 0$
5. $3x^2 - 6x + 12 = 0$

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$
2. $xy + 3z - 5t = 3$
3. $2x + cos(\frac{\pi}{3})\,y - 2z + 5t = 12$
4. $\sqrt{2x} + 3y = 0$
5. $3x^2 - 6x + 12 = 0$
6. $2x - 3y + 5z^3 - 4t = 2$

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$
2. $xy + 3z - 5t = 3$
3. $2x + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)y - 2z + 5t = 12$
4. $\sqrt{2x} + 3y = 0$
5. $3x^2 - 6x + 12 = 0$
6. $2x - 3y + 5z^3 - 4t = 2$
7. $x + y + z - t + 4r - 3s = 4$

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$
2. $xy + 3z - 5t = 3$
3. $2x + cos(\frac{\pi}{3})\,y - 2z + 5t = 12$
4. $\sqrt{2x} + 3y = 0$
5. $3x^2 - 6x + 12 = 0$
6. $2x - 3y + 5z^3 - 4t = 2$
7. $x + y + z - t + 4r - 3s = 4$
8. $2x - 3y + sen(3z) - t = -2$

Ejercicio

Indica cuales de las siguientes ecuaciones, definidas en $\mathbb{R}$, son lineales y cuales no.

1. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}\,y = -3$
2. $xy + 3z - 5t = 3$
3. $2x + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) y - 2z + 5t = 12$
4. $\sqrt{2x} + 3y = 0$
5. $3x^2 - 6x + 12 = 0$
6. $2x - 3y + 5z^3 - 4t = 2$
7. $x + y + z - t + 4r - 3s = 4$
8. $2x - 3y + sen(3z) - t = -2$
9. $\dfrac{x - 2y + 3z - t}{2} = 3$

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición

Se llama sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de ecuaciones lineales definidas sobre el mismo cuerpo de números . Lo escribiremos en la forma

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

y diremos que es un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

Ejemplos

- $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right\}$ Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.
- $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 4z = 1 \\ -x + 2y \qquad = 2 \\ 5x \qquad + z = -2 \\ -y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 4z = -1 \end{array}\right\}$ Sistema de 5 ecuaciones y 3 incógnitas.

Definiciones

- Dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

a) Una secuencia ordenada de números $(s_1, \cdots, s_n)$ se dice una **solución** del sistema si, al sustituir en las ecuaciones cada incógnita x_i por el correspondiente s_i, se verifican todas las igualdades resultantes.

b) Si un sistema tiene alguna solución diremos que es **compatible**; si, por el contrario, no tiene ninguna solución diremos que es **incompatible**.

c) Si un sistema es **compatible** diremos que es **determinado** si la solución es única, en otro caso, es decir, si tiene más de una solución, diremos que es **indeterminado**.

d) Diremos que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

Ejemplos

- Sistema incompatible: $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ No tiene ninguna solución.

- Sistema compatible determinado: $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\}$ Tiene solución única: $(s_1, s_2) = (1, 1)$

- Sistema compatible indeterminado: $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+2z=-1 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$ Tiene más de una solución, por ejemplo: $(s_1, s_2, s_3) = (1, 1, 0)$; $(s_1, s_2, s_3) = (0, 1, 1)$

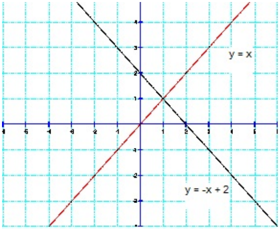
Observación

En el caso de dos o tres incógnitas, es posible dar una interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales.

• Así, en dos variables (incógnitas), un sistema de ecuaciones se corresponde con la intersección de rectas en el plano.

Así, el sistema, $\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$

se corresponde gráficamente a la intersección de dos rectas: $\left\{\begin{array}{l} y = x \\ y = -x + 2 \end{array}\right.$



El punto de intersección de las dos rectas es $P(1,1)$ de manera que el sistema tiene solución única: $(s_1, s_2) = (1,1)$

- En tres incógnitas (variables) cualquier ecuación del tipo,

$$a_1x + a_2y + a_3z = b$$

se corresponde con la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, un sistema de ecuaciones con tres incógnitas nos habla de las posibles intersecciones entre planos en el espacio. Resolver gráficamente este tipo de sistemas no es tan fácil como en el caso anterior. Sin embargo, este punto de vista nos proporciona alguna idea acerca de cuales pueden ser las soluciones de un sistema.

En dos variables (es decir, en un mismo plano) dos rectas pueden no cortarse (si son paralelas), cortarse en un solo punto o ser la misma recta. Por tanto, el conjunto de soluciones de un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas puede ser vacío, una sola solución, correspondiente al punto de intersección, o tener infinitas soluciones correspondientes a los puntos de la recta.

Análogamente, un sistema con tres incógnitas puede no tener soluciones, o bien tener como soluciones un único punto, una recta o un plano.

Resolución de sistemas

Dado un sistema de ecuaciones, el problema central que vamos a estudiar es saber si tiene solución o no. Y, en caso de tener solución, encontrar todas las soluciones del sistema.

Si tenemos que resolver un sistema como el (1), podría parecer complicado.

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \tag{1}$$

En cambio, la resolución de un **sistema triangular** como el (2):

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = b_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n = b_2 \\ c_{33}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \tag{2}$$

parece sencillo.

Por ello, dado un sistema de ecuaciones lineales, vamos a estudiar cómo encontrar un sistema triangular, equivalente al sistema dado.

- Dado un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Que escribiremos más breve como:

$$\left.\begin{array}{r} Eq_1(x_1, \cdots, x_n) = b_1 \\ Eq_2(x_1, \cdots, x_n) = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ Eq_m(x_1, \cdots, x_n) = b_m \end{array}\right\}$$

hay tres modos de manipular las ecuaciones que no varían las soluciones.

1. Cambiar el orden de las ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por un número no nulo.
3. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

Es decir

1. Podemos cambiar de orden las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} Eq_1(x_1,\cdots,x_n)=b_1 \\ \vdots \\ Eq_i(x_1,\cdots,x_n)=b_i \\ \vdots \\ Eq_j(x_1,\cdots,x_n)=b_j \\ \vdots \\ Eq_m(x_1,\cdots,x_n)=b_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} Eq_1(x_1,\cdots,x_n)=b_1 \\ \vdots \\ Eq_j(x_1,\cdots,x_n)=b_j \\ \vdots \\ Eq_i(x_1,\cdots,x_n)=b_i \\ \vdots \\ Eq_m(x_1,\cdots,x_n)=b_m \end{array}\right\}$$

2. Multiplicar una ecuación por un número no nulo

$$\left.\begin{array}{r} Eq_1(x_1,\cdots,x_n) = b_1 \\ \vdots \\ Eq_i(x_1,\cdots,x_n) = b_i \\ \vdots \\ Eq_m(x_1,\cdots,x_n) = b_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} Eq_1(x_1,\cdots,x_n) = b_1 \\ \vdots \\ \lambda\, Eq_i(x_1,\cdots,x_n) = \lambda\, b_i \\ \vdots \\ Eq_m(x_1,\cdots,x_n) = b_m \end{array}\right\}$$

con $\lambda \neq 0$

3. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra

$$\left.\begin{array}{r} Eq_1(x_1,\cdots,x_n)=b_1 \\ \vdots \\ Eq_i(x_1,\cdots,x_n)=b_i \\ \vdots \\ Eq_j(x_1,\cdots,x_n)=b_j \\ \vdots \\ Eq_m(x_1,\cdots,x_n)=b_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} Eq_1(x_1,\cdots,x_n)=b_1 \\ \vdots \\ Eq_i(x_1,\cdots,x_n)=b_i \\ \vdots \\ Eq_j(x_1,\cdots,x_n)+\lambda Eq_i(x_1,\cdots,x_n)=b_j+\lambda b_i \\ \vdots \\ Eq_m(x_1,\cdots,x_n)=b_m \end{array}\right\}$$

Estas tres operaciones se llaman **operaciones elementales en las ecuaciones del sistema**.

• Obviamente, cualquiera de estas operaciones puede deshacerse: En efecto, si hemos sumado a una ecuación un múltiplo de otra basta con restarle el mismo múltiplo para restaurar la ecuación inicial. Si multiplicamos por un número no nulo basta con dividir esta ecuación por el mismo número. Finalmente, si intercambiamos dos ecuaciones, basta con volverlas a intercambiar.

• A continuación veremos como, adoptando una notación matricial más fácil de manejar, se pasa de un sistema dado a otro triangular utilizando sólo operaciones elementales.

Notación matricial de un sistema de ecuaciones

Notación matricial

Dado un siste de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

si prescindimos de las incógnitas y de los signos de igualdad nos queda la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Llamada **matriz ampliada del sistema**, donde está toda la información necesaria para resolver el sistema.

• Además, las operaciones elementales en las ecuaciones del sistema equivalen a hacer las mismas operaciones (elementales) en las filas de la matriz ampliada, tal como sigue:

1. Cambiar el orden de las ecuaciones = Cambiar el orden de las filas en la matriz ampliada
2. Multiplicar la ecuación i por un número no nulo = Multiplicar la fila i de la matriz ampliada por dicho número
3. Sumar a la ecuación j la ecuación i multiplicada por λ = Sumar a la fila j la fila i multiplicada por λ

Observación

Recordemos que dos matrices se dice que son **equivalentes** por filas si se puede pasar de una a otra mediante una sucesión de operaciones elementales por filas. Así, matrices equivalentes por filas representan sistemas de ecuaciones equivalentes.

Reducción de un sistema a otro equivalente triangular

- Veamos, a través de un ejemplo, como se reduce un sistema de ecuaciones a otro sistema equivalente triangular más fácil de resolver.

Ejemplo

Encuentra todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 - 8x_6 = 8 \\ 3x_3 + x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 7x_5 + x_6 = 2 \\ 6x_1 - 9x_2 \quad + 11x_4 - 19x_5 + 3x_6 = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

En primer lugar escribimos la matriz ampliada del sistema:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, realizando operaciones elementales por filas en esta matriz, la reducimos a una forma escalonada. Esto se hace siguiendo los siguientes pasos:

Paso-1

Localizamos la primera columna, desde la izquierda, no nula. La columna diferente de cero que está más a la izquierda es la primera columna, y ésta será la primera columna pivote. La primera posición pivote es la posición más elevada de esta columna y ahí ha de estar el primer pivote, que ha de ser una entrada diferente de cero.

Primera columna desde la izquierda no nula

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Pivote} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Paso-2

Si es necesario, intercambiar la primera fila y la fila que contiene al pivote.

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos intercambiado las filas 1 y 3 para tener un pivote distinto de cero en la posición pivote

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Paso-3

Hacer cero todas las entradas de la columna pivote que están por debajo del pivote, sumando el múltiplo adecuado de la primera fila a las otras filas.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Hemos sumado -3 veces la fila 1 a la fila 4.

Paso-4

"Tachamos" (ignoramos) la primera fila y repetimos los pasos del 1 al 3. Continuar de esta forma hasta que la matriz quede en forma escalonada por filas. Lo más importante es que cada vez que regresemos al paso-1 ignoremos todas las filas "tachadas".

Volvemos pues al Paso-1

Paso-1

Localizar la primera columna no nula desde la izquierda, en la matriz que queda tras ignorar la primera fila; a continuación, localizar al pivote.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Pivote} \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Primera columna no nula desde la izquierda

Paso-2

El intercambio de filas no es necesario pues el pivote ya está situado en la posición pivote.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \color{red}{2} & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \color{red}{3} & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Paso-3

Hacer cero todas las entradas de la columna pivote que están por debajo del pivote, sumando el múltiplo adecuado de la fila donde está el nuevo pivote (es decir, la segunda fila) a las otras filas (de abajo).

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \color{red}{2} & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & \color{red}{3} & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Hemos sumado -2 veces la fila 2 a la fila 3. Y también, hemos sumado 1 vez la fila 2 a la fila 4.

Paso-4

"Tachamos" (ignoramos) las filas 1 y 2 y repetimos los pasos del 1 al 3.

Volvemos pues al Paso-1

Paso-1

Localizar la primera columna no nula desde la izquierda, en la matriz que queda tras ignorar las filas 1 y 2; a continuación, localizar al pivote.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Primera columna no nula desde la izquierda

Pivote

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \color{red}{2} & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \color{red}{3} & 1 & -2 & -4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{-4} & -2 \end{array}\right)$$

Paso-2

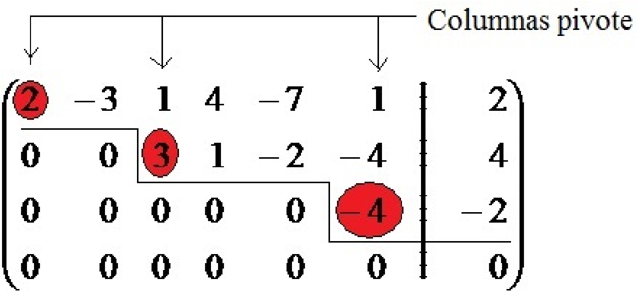
Si es necesario, intercambiar la primera fila y la fila que contiene al pivote, en la submatriz con la que estamos trabajando (que es la matriz que queda tras ignorar las filas 1 y 2).

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \color{red}{2} & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \color{red}{3} & 1 & -2 & -4 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{-4} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos intercambiado las filas 3 y 4 para tener un pivote distinto de cero en la posición pivote

Paso-3

Este paso ya no es necesario, pues la matriz ya está en forma escalonada por filas.



De manera que ya hemos reducido la matriz ampliada del sistema a una forma escalonada por filas:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como la última columna (la correspondiente a los términos independientes de las ecuaciones) de la matriz ampliada del sistema reducida a una forma escalonada, NO ES COLUMNA PIVOTE, el sistema es **compatible**.

A la vista de la matriz ampliada del sistema, reducida a una forma escalonada por filas,

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podemos sustituir el sistema original,

$$\left.\begin{array}{r} 6x_3 + 2x_4 - 4x_5 - 8x_6 = 8 \\ 3x_3 + x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 7x_5 + x_6 = 2 \\ 6x_1 - 9x_2 \quad + 11x_4 - 19x_5 + 3x_6 = 0 \end{array}\right\}$$

por el siguiente **sistema equivalente**:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 7x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_3 + x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 4 \\ -4x_6 = -2 \end{array}\right\}$$

Las variables x_1, x_3 y x_6 corresponden a los pivotes de la matriz ampliada en forma escalonada y se llaman **variables principales** (o variables dependientes, o variables básicas). El resto de las variables se llaman **variables libres** (o variables independientes, o variables no básicas).

A continuación pasamos las variables libres al lado derecho de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 7x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_3 + x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 4 \\ -4x_6 = -2 \end{array}\right\}$$

(Pasamos las variables libres al lado derecho) $\downarrow$

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 + x_3 + x_6 = & 2 + 3x_2 - 4x_4 + 7x_5 \\ x_3 - 4x_6 = & 4 \qquad\quad - x_4 + 2x_5 \\ -4x_6 = & -2 \end{array}\right\}$$

Como podemos ver nos queda un sistema triangular que podemos resolver por sustitución hacia atrás, expresando a las variables principales en función de las variables libres, que como su nombre indica pueden tomar cualquier valor. De manera que habremos encontrado las infinitas soluciones del sistema.

- De la última ecuación despejamos x_6: $-4x_6 = -2 \to x_6 = \dfrac{1}{2}$
- Después sustituimos este valor en la penúltima ecuación y despejamos x_3:

$$x_3 - 4\frac{1}{2} = 4 - x_4 + 2x_5 \to x_3 = 2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5$$

- Por último, sustituimos los valores de x_6 y x_3 en la primera ecuación y despejamos x_1:

$$2x_1+(2-\frac{1}{3}x_4+\frac{2}{3}x_5)+\frac{1}{2} = 2+3x_2-4x_4+7x_5 \to x_1 = -\frac{1}{4}+\frac{3}{2}x_2-\frac{11}{6}x_4+\frac{19}{6}x_5$$

De manera que la solución del sistema es:

$$\left.\begin{array}{lcl}
x_1 & = & -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{11}{6}x_4 + \frac{19}{6}x_5 \\
x_2 & & \text{libre} \\
x_3 & = & 2 \qquad\qquad - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \\
x_4 & & \text{libre} \\
x_5 & & \text{libre} \\
x_6 & = & \frac{1}{2}
\end{array}\right\}$$

donde las variables x_2, x_4 y x_5 pueden tomar cualquier valor en el cuerpo de los números en el que estemos resolviendo el sistema.

Observación:

Por último, observemos que si hubiésemos calculado la forma escalonada reducida por filas de la matriz ampliada del sistema, las variables principales estarían despejadas en dicha forma escalonada reducida.

En efecto, a partir de la matriz ampliada del sistema, reducida a una forma escalonada por filas,

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Continuemos haciendo el siguiente paso del algoritmo que nos lleva a la forma escalonada reducida (que como sabemos es única).

Paso-5

Comenzando con el pivote más a la derecha y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda, haga ceros encima de cada pivote. Si el pivote no vale 1, divida esa fila por el valor del pivote.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos dividido la fila 3 por -4

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hemos sumado 4 veces la fila 3 a la fila 2 y hemos restado la fila 3 a la fila 1.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora hemos dividido la fila 2 por 3.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -3 & 0 & 11/3 & -19/3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ Hemos restado la fila 2 a la fila 1}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3/2 & 0 & 11/6 & -19/6 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ Hemos dividido la fila 1 por 2}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -3/2 & 0 & 11/6 & -19/6 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esta es **la forma escalonada reducida por filas** de la matriz ampliada del sistema de ecuaciones.

Si ahora introducimos las incógnitas y los signos de igualdad, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones, equivalente al sistema inicial:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 - \frac{3}{2}x_2 \qquad + \frac{11}{6}x_4 - \frac{19}{6}x_5 = & -\frac{1}{4} \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 = & 2 \\ x_6 = & \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Como ya hicimos antes, a las variables x_1, x_3 y x_6 correspondientes a los pivotes de la matriz ampliada en forma escalonada reducida les llamaremos **variables principales** (o variables dependientes, o variables básicas). El resto de las variables se llaman **variables libres** (o variables independientes, o variables no básicas).

A continuación pasamos las variables libres al lado derecho de las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lllll}
x_1 = & -\frac{1}{4} & + \frac{3}{2}x_2 & - \frac{11}{6}x_4 & + \frac{19}{6}x_5 \\
x_2 & \text{libre} & & & \\
x_3 = & 2 & & - \frac{1}{3}x_4 & + \frac{2}{3}x_5 \\
x_4 & \text{libre} & & & \\
x_5 & \text{libre} & & & \\
x_6 = & \frac{1}{2} & & &
\end{array}\right\}$$

Y, como podemos ver, las variables principales (variables dependientes) ya están despejadas en función de las variables libres (variables independientes).

Teorema (de existencia y unicidad de solución)

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si la columna del extremo derecho de la matriz ampliada no es una columna pivote, esto es, si y sólo si una forma escalonada por filas de la matriz ampliada no tiene ninguna fila de la forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{array}\right)$$

con $b \neq 0$.

Si un sistema lineal es compatible, entonces tiene

- Una única solución si no hay variables libres.
- Más de una solución si hay variables libres.

• El siguiente procedimiento describe cómo encontrar y describir todas las soluciones de un sistema lineal.

REDUCCIÓN POR FILAS PARA RESOLVER UN SISTEMA LINEAL:

1. Escriba la matriz ampliada del sistema.
2. Utilice un algoritmo de reducción por filas para obtener una matriz ampliada equivalente de forma escalonada. Decida si el sistema es o no compatible. Si no hay solución, deténgase, en caso contrario, continúe con el siguiente paso.
3. Continúe la reducción por filas para obtener la forma escalonada reducida.
4. Escriba el sistema de ecuaciones que corresponda a la matriz obtenida en el paso 3.
5. Reescriba cada ecuación diferente de cero del paso 4 de manera que su única variable principal esté expresada (despajada) en términos de cualquier variables libres que aparezcan en la ecuación.