Matrices_Sistemas_17_18

```
# Ejercicio_1
```

1. Dadas las matrices A, B y C definidas en $\mathbb{R}$, calcula

$$A - A \cdot B^t + 3A \cdot B \cdot C$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

```
# (a)
```

```
A=matrix(QQ,[[2,1],[0,1]])
B=matrix(QQ,[[1,1],[-1,1]])
C=matrix(QQ,[[2,1],[2,1]])
show(A);show(B);show(C)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
# latex(A);latex(B);latex(C)
```

```
A-A*B.transpose()+3*A*B*C
```

```
[23 14]
[-1  0]
```

```
# (b)
```

```
A=matrix(QQ,[[1,2],[1,1],[0,1]])
B=matrix(QQ,[[1,1],[0,1]])
C=matrix(QQ,[[2,1],[1,1]])
show(A);show(B);show(C)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
# latex(A);latex(B);latex(C)
```

```
A-A*B.transpose()+3*A*B*C
```

```
[13 12]
[11  9]
[ 2  3]
```

```
# (c)
```

```
A=matrix(QQ,[[1,1,0],[1,2,1]])
B=matrix(QQ,[[1,0,1],[1,-2,1],[0,0,1]])
C=matrix(QQ,[[2,2,2],[1,1,1],[1,2,2]])
show(A);show(B);show(C)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
#latex(A);latex(B);latex(C)
```

```
A-A*B.transpose()+3*A*B*C
```

```
[12 20 18]
[17 34 30]
```

```
##
```

```
# Ejercicio_2
```

2. Para las matrices A, B y C definidas en $\mathbb{R}$, calcula todos los posibles productos de dos de ellas.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

```
# (a)
```

```
A=matrix(QQ,[[2,1],[0,1]])
B=matrix(QQ,[[1,1],[-1,1]])
C=matrix(QQ,[[2,1],[2,1]])
show(A);show(B);show(C)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A*A; A*B; A*C; B*A; B*B; B*C
```

```
[4 3]
[0 1]
[ 1  3]
[-1  1]
[6 3]
[2 1]
[ 2  2]
[-2  0]
[ 0  2]
[-2  0]
[4 2]
[0 0]
```

```
# (b)
```

```
A=matrix(QQ,[[1,2],[1,1],[0,1]])
B=matrix(QQ,[[1,1],[0,1]])
C=matrix(QQ,[[2,1],[1,1]])
show(A);show(B);show(C)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
A*B; A*C
```

```
[1 3]
[1 2]
[0 1]
[4 3]
[3 2]
[1 1]
```

```
# B*A No se puede hacer
```

```
# (c)
```

```
A=matrix(QQ,[[1,2,0,0],[1,2,0,0],[0,1,1,0],[0,0,1,1]])
B=matrix(QQ,[[0,1,1,2],[1,1,1,2],[1,0,0,0],[0,1,1,1]])
C=matrix(QQ,[[1,2,1,1],[1,1,2,1],[2,1,1,1],[1,1,1,2]])
show(A);show(B);show(C)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
show(A*B);show(B*A)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
show(A*C);show(C*A)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

```
show(B*C);show(C*B)
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

```
# Ejercicio_3
```

3. Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales definidos en $\mathbb{R}$

(a) $\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x+2y=1 \end{array}\right\}$

Matriz de coeficientes = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; Matriz ampliada = $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

```
M=matrix(QQ,[[1,1],[1,2]]); show(M); MA=M.augment(column_matrix(QQ,
[0,1]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

```
# latex(M); latex(MA)
```

```
# Calculamos la forma escalonada reducida de la matriz ampliada.
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[ 1  0|-1]
[ 0  1| 1]
```

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

```
'''
A la vista de la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada
del sistema, concluimos que el sistema tiene solución única (compatible
determinado), siendo dicha solución:

    x = -1
    y =  1
'''
```

(b) $\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ x+y=2 \\ 2x+y=1 \end{array}\right\}$

```
M=matrix(QQ,[[1,2],[1,1],[2,1]]); show(M); MA=M.augment(column_matrix(QQ,
[1,2,1]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[1 0|0]
[0 1|0]
[0 0|1]
```

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
'''
A la vista de la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada
del sistema, concluimos que el sistema no tiene solución única
```

```
(incompatible), ya que la columna del lado derecho ha quedado como columna
pivote en la forma escalonada, por filas, de la matriz ampliada.

'''
```

(c) $\left.\begin{array}{r} 2x+4z=0 \\ -x-z=3 \\ 2x+y+5z=-4 \end{array}\right\}$

```
M=matrix(QQ,[[2,0,4],[-1,0,-1],[2,1,5]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[0,3,-4]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[ 1  0  0|-6]
[ 0  1  0|-7]
[ 0  0  1| 3]
```

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

```
'''
A la vista de la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada
del sistema, concluimos que el sistema tiene solución única (compatible
determinado), siendo dicha solución:

    x = -6
    y = -7
    z =  3
'''
```

(d) $\left.\begin{array}{r} y+z=3 \\ x+z=4 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$

```
M=matrix(QQ,[[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[3,4,1]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[1 0 0|1]
[0 1 0|0]
[0 0 1|3]
```

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

```
'''
A la vista de la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada
del sistema, concluimos que el sistema tiene solución única (compatible
determinado), siendo dicha solución:

    x = 1
    y = 0
    z = 3
'''
```

(e) $\left.\begin{array}{r} x+2z+5t=2 \\ y-3z=1 \end{array}\right\}$

```
M=matrix(QQ,[[1,0,2,5],[0,1,-3,0]]); show(M); MA=M.augment(column_matrix(QQ,
[2,1]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - 2z - 5t \\ y = 1 + 3z \\ z \quad \text{libre} \\ t \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

(f) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z + t = 4 \\ z + 4t = 2 \end{array}\right\}$

```
M=matrix(QQ,[[2,1,1,1],[0,0,1,4]]); show(M); MA=M.augment(column_matrix(QQ,
[4,2]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[   1  1/2    0 -3/2|   1]
[   0    0    1    4|   2]
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2}\,t \\ z = 2 \qquad\quad - 4t \\ y \quad \text{libre} \\ t \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

(g) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2z + 5t = 2 \\ y - 3z = 1 \\ 4z = 12 \end{array}\right\}$

```
M=matrix(QQ,[[3,0,2,5],[0,1,-3,0],[0,0,4,0]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[2,1,12]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[   1    0    0  5/3|-4/3]
[   0    1    0    0|  10]
[   0    0    1    0|   3]
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}\,t \\ y = 10 \\ z = 3 \\ t \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

(h) $$\left.\begin{array}{r} 3x + y + 3z + 5t + 2u = 3 \\ 3z + 3t + u = 1 \\ 4u = 12 \end{array}\right\}$$

```
M=matrix(QQ,[[3,1,3,5,2],[0,0,3,3,1],[0,0,0,0,4]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[3,1,12]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[   1  1/3    0  2/3    0|-1/3]
[   0    0    1    1    0|-2/3]
[   0    0    0    0    1|   3]
```

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,y - \frac{2}{3}\,t \\ z = -\frac{2}{3} \qquad\qquad - t \\ u = 3 \\ y \quad \text{libre} \\ t \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

$$\text{(i)}\quad \left.\begin{array}{r} x+y+z+t=1 \\ x+y+3z+4t=2 \\ x+y+5z+7t=3 \end{array}\right\}$$

```
M=matrix(QQ,[[1,1,1,1],[1,1,3,4],[1,1,5,7]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[1,2,3]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[   1    1    0 -1/2| 1/2]
[   0    0    1  3/2| 1/2]
[   0    0    0    0|   0]
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2}\,t \\ z = \frac{1}{2} \qquad - \frac{3}{2}\,t \\ y \quad \text{libre} \\ t \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

(j) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 3x + z = 2 \end{array}\right\}$

```
M=matrix(QQ,[[2,1,0],[3,0,1]]); show(M); MA=M.augment(column_matrix(QQ,
[4,2]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Como en la matriz ampliada, en el lado izquierdo, ya hay una identidad no hace falta buscarla y podemos despajar directamente las variables básicas en función de las libres.

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4 - 2x \\ z = 2 - 3x \\ x \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

(k) $$\left.\begin{array}{r} x-y+z+t=1 \\ 2x+y-t=2 \\ y-2z+t=0 \\ 3x+y+z+t=3 \end{array}\right\}$$

```
M=matrix(QQ,[[1,-1,1,1],[2,1,0,-1],[0,1,-2,1],[3,1,1,1]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[1,2,0,3]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[1 0 0 0|1]
[0 1 0 0|0]
[0 0 1 0|0]
[0 0 0 1|0]
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{array}\right\}$$

```
#
```

(l) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z+t=1 \\ 2x+y-t=2 \\ y+2z+3t=0 \end{array}\right\}$$

```
M=matrix(QQ,[[2,-1,1,1],[2,1,0,-1],[0,1,2,3]]); show(M);
```

```
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[1,2,0]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

```
MA.echelon_form(); show(MA.echelon_form())
```

```
[   1    0    0 -2/5| 4/5]
[   0    1    0 -1/5| 2/5]
[   0    0    1  8/5|-1/5]
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\,t \\ y = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\,t \\ z = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\,t \\ t \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

$$\text{(m)}\quad \left.\begin{array}{r} -x - 5z + v = -1 \\ 3x + y + z + u = 0 \\ -2x + t = 3 \end{array}\right\}$$

Las variables las considero en el siguiente orden: x, y, z, t, u, v

```
M=matrix(QQ,[[-1,0,-5,0,0,1],[3,1,1,0,1,0],[-2,0,0,1,0,0]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[-1,0,3]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} -1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Si observamos la matriz ampliada del sistema vemos que tenemos la identidad, en el lado izquierdo de la matriz. De hecho tenemos dos identidades:

- Una mirando en las columnas correspondientes a las variables v, u, t, en el orden aquí dado.

- Otra mirando en las columnas correspondientes a las variables v, y, t, en el orden aquí dado.

Luego podemos resolver directamente el sistema, o bien tomamos como variables básicas a las variables v, u, t y las despejamos en función de las restantes que se tomarían como libres (parámetros).

O bien tomamos como variables básicas a las variables v, y, t y las despejamos en función de las restantes que se tomarían como libres (parámetros)

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} v = -1 + x + 5z \\ u = -3x - y - z \\ t = 3 + 2x \\ x \quad \text{libre} \\ y \quad \text{libre} \\ z \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

O también podríamos haber escrito:

$$\left.\begin{array}{l} v = -1 + x + 5z \\ y = -3x - z - u \\ t = 3 + 2x \\ x \quad \text{libre} \\ z \quad \text{libre} \\ u \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

```
## Ahora vamos a resolver el sistema (m) en Z_7
```

Ahora vamos a resolver el sistema de ecuaciones,

$$\text{(m)}\ \left.\begin{array}{r} -x-5z+v=-1 \\ 3x+y+z+u=0 \\ -2x+t=3 \end{array}\right\}\ \text{ en } \mathbb{Z}_7$$

```
M=matrix(Zmod(7),[[-1,0,-5,0,0,1],[3,1,1,0,1,0],[-2,0,0,1,0,0]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(Zmod(7),[-1,0,3]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

```
H=MA.echelon_form();H;show(H)
```

```
[1 0 0 3 0 0|2]
[0 1 0 0 1 3|4]
[0 0 1 5 0 4|4]
```

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Luego las soluciones, en $\mathbb{Z}_7$, del sistema

$$\text{(m)}\ \left.\begin{array}{r} -x-5z+v=-1 \\ 3x+y+z+u=0 \\ -2x+t=3 \end{array}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+2z+v=6 \\ 3x+y+z+u=0 \\ 5x+t=3 \end{array}\right\}$$

son:

$$\left.\begin{array}{lllll} x=2 & +4t & & \\ y=4 & & +6u & +4v \\ z=4 & +2t & & +3v \\ t & \text{libre} & & \\ u & \text{libre} & & \\ v & \text{libre} & & \end{array}\right\}$$

```
##
```

(n) $\left.\begin{array}{r} 3x+y-z=2 \\ 2x+z+u=1 \\ x+t=7 \end{array}\right\}$

Las variables las considero en el siguiente orden: x, y, z, t, u

```
M=matrix(QQ,[[3,1,-1,0,0],[2,0,1,0,1],[1,0,0,1,0]]); show(M);
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[2,1,7]),subdivide=true);show(MA)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Como se puede ver tenemos la identidad en el lado izquierdo de la matriz ampliada en las columnas correspondientes a las variables $y, u, t,$ en el orden aquí dado.

Entonces podemos tomar como variables básicas a las variables y, u, t y las despejamos en función de las restantes que serán libres (o parámetros).

Luego las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{l} y=2-3x+z \\ u=1-2x-z \\ t=7-x \\ x \quad \text{libre} \\ z \quad \text{libre} \end{array}\right\}$$

```
#
```

```
# Ejercicio_4
```

4.- Encuentra cuando sea posible las inversas de las siguientes matrices definidas en $\mathbb{R}$

a. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b. $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
A=matrix(QQ,[[2,1],[0,1]]);
B=matrix(QQ,[[1,1],[-1,1]]);
C=matrix(QQ,[[2,1],[2,1]]);
D=matrix(QQ,[[1,1,0],[1,2,1]]);
E=matrix(QQ,[[2,2,2],[1,1,1],[1,2,2]]);
F=matrix(QQ,[[1,2,1],[1,1,2],[2,1,1]]);
G=matrix(QQ,[[1,2,1],[6,0,4],[2,4,3]]);
H=matrix(QQ,[[-1,0,1,0],[0,3,2,-1],[5,2,1,1],[-1,2,0,1]])
```

```
# latex(A);latex(B);latex(C);latex(D);latex(E);latex(F);latex(G);latex(H)
```

```
A1=A.augment(identity_matrix(2),subdivide=true);show(A1)
```

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
A1.echelon_form()
```

```
[   1    0| 1/2 -1/2]
[   0    1|   0    1]
```

```
B1=B.augment(identity_matrix(2),subdivide=true);show(B1)
```

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
B1.echelon_form()
```

```
[   1    0| 1/2 -1/2]
[   0    1| 1/2  1/2]
```

```
C1=C.augment(identity_matrix(2),subdivide=true);show(C1)
```

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
C1.echelon_form()
```

```
[  1 1/2|  0 1/2]
[  0   0|  1  -1]
```

```
##
```

```
E1=E.augment(identity_matrix(3),subdivide=true);show(E1);E1.echelon_form()
```

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
[ 1  0  0| 0  2 -1]
[ 0  1  1| 0 -1  1]
[ 0  0  0| 1 -2  0]
```

```
F1=F.augment(identity_matrix(3),subdivide=true);show(F1);F1.echelon_form()
```

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
[   1    0    0|-1/4 -1/4  3/4]
[   0    1    0| 3/4 -1/4 -1/4]
[   0    0    1|-1/4  3/4 -1/4]
```

```
G1=G.augment(identity_matrix(3),subdivide=true);show(G1);G1.echelon_form()
```

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
[    1     0     0|  4/3   1/6  -2/3]
[    0     1     0|  5/6 -1/12  -1/6]
[    0     0     1|   -2     0     1]
```

```
H1=H.augment(identity_matrix(4),subdivide=true);show(H1);H1.echelon_form()
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
[     1      0      0      0|  -1/7      0    1/7   -1/7]
[     0      1      0      0|-13/35    1/5  -1/35   8/35]
[     0      0      1      0|   6/7      0    1/7   -1/7]
[     0      0      0      1|   3/5   -2/5    1/5    2/5]
```

```
##
```

```
# Ejercicio_5
```

5.- Para los siguientes conjuntos de vectores, comprueba si el vector v se puede escribir como combinación lineal de ellos y si la combinación es única.

(a) $\{(1,3),(2,1)\}$ y $v=(1,1)$ en $\mathbb{R}^2$

(b) $\{(1,3),(2,6)\}$ y $v=(1,1)$ en $\mathbb{R}^2$

(c) $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1)\}$y $v=(1,1,2)$ en $\mathbb{R}^3$

(d) $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$y $v=(1,1,2)$ en $\mathbb{R}^3$

(e) $\{(1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$y $v=(1,1,0,1)$ en $\mathbb{R}^4$

(f) $\{(1,1,1,1),(1,2,1,0),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$y $v=(1,1,0,1)$ en $\mathbb{R}^4$

```
##
```

```

```

Definiciones:

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo (sistema de números donde podemos sumar, restar, multiplicar y dividir, excepto por cero, permaneciendo el resultado dentro del conjunto).

Un vector de longitud n, con componentes en el cuerpo $\mathbb{K}$, es una "lista ordenada", formada por n números de $\mathbb{K}$ encerrados entre paréntesis.

Ejemplos:

- $(3,4/5,6,-2)$ es un vector de longitud 4, es decir, de cuatro componentes, con componentes en el cuerpo $\mathbb{Q}$
- $(\sqrt{2},-1,0)$ es un vector de longitud 3, con componentes en el cuerpo $\mathbb{R}$
- $(1,2,0,2,1,4,3)$ es un vector de longitud 7, con componentes en el cuerpo $\mathbb{Z}_5$

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y n un número natural, $\mathbb{K}^n$, denota al conjunto formado por todos los vectores de longitud n con componentes en el cuerpo $\mathbb{K}$, es decir, $\mathbb{K}^n$, denota al conjunto formado por todas las "listas ordenadas" de longitud n con componentes en $\mathbb{K}$.

Ejemplos:

- $\mathbb{Q}^4=\{(a,b,c,d)/a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}\Rightarrow(3,4/5,6,-2)\in\mathbb{Q}^4$
- $\mathbb{R}^3=\{(a,b,c)/a,b,c\in\mathbb{R}\}\Rightarrow\ (\sqrt{2},-1,0)\in\mathbb{R}^3$
- $\mathbb{Z}_5^7=\{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)/\ a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\in\mathbb{Z}_5\}\Rightarrow\ (1,2,0,2,1,4,3)\in\mathbb{Z}_5^7$

En el conjunto de vectores $\mathbb{K}^n$ se definen dos operaciones:

<u>Suma de vectores</u>:

Dados $u, v \in \mathbb{K}^n$, siendo, $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ se define:

$$u + v = (u_1, u_2, \cdots, u_n) + (v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n)$$

Número por vector:

Dado $u \in \mathbb{K}^n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, siendo, $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, se define:

$$\alpha\, u = \alpha\,(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (\alpha\, u_1, \alpha\, u_2, \cdots, \alpha\, u_n)$$

Definición: Sea $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ un conjunto formado por r vectores de $\mathbb{K}^n$, una combinación lineal de dichos vectores es cualquier vector de $\mathbb{K}^n$ obtenido de la siguiente forma:

$$\alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2 + \cdots + \alpha_r\, u_r$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ son números del cuerpo $\mathbb{K}$ cualesquiera.

Ejemplos: Dado el conjunto $\{(1,3,1),(2,1,-1)\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$, los siguientes vectores son combinaciones lineales de dichos vectores:

- $(4,7,1) = 2\,(1,3,1) + 1\,(2,1.-1)$
- $(1,-2,-2) = -1\,(1,3,1) + 1\,(2,1,-1)$
- $(1,3,1) = 1\,(1,3,1) + 0\,(2,1,-1)$
- $(\sqrt{2}-4, 3\sqrt{2}-2, \sqrt{2}+2) = \sqrt{2}\,(1,3,1) - 2\,(2,1,-1)$

```
##
```

Para el siguiente conjunto de vectores, comprueba si el vector v se puede escribir como combinación lineal de ellos y si la combinación es única.

(a) $\{(1,3),(2,1)\}$ y $v = (1,1)$ en $\mathbb{R}^2$

El vector $(1,1)$ será combinación lineal de los vectores $\{(1,3),(2,1)\}$ si existen dos números $x, y \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1,1) = x\,(1,3) + y\,(2,1) = (x+2y, 3x+y)$$

Es decir, si se cumple que el siguiente sistema tiene solución (es compatible).

$\left.\begin{array}{l} x+2y=1 \\ 3x+y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$ matriz ampliada del sistema.

En el caso de que el sistema sea compatible (tenga solución), si la solución es única entonces decimos que el vector $v = (1,1)$ se expresa como combinación lineal de los vectores $\{(1,3),(2,1)\}$ de forma única.

Resolvamos, pues, el sistema de ecuaciones, para ello escribimos la matriz ampliada del sistema y calculamos su forma escalonada reducida por filas.

```
M=matrix(QQ,[[1,2],[3,1]])
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[1,1]),subdivide=true)
show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

```
# latex(MA)
```

```
show(MA.echelon_form())
```

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

Observando la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada del sistema, concluimos que el sistema es compatible determinado siendo la solución única:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Luego el vector $v = (1,1)$ se expresa como combinación lineal de los vectores $\{(1,3),(2,1)\}$ de forma única. Siendo dicha combinación la siguiente:

$$(1,1) = \frac{1}{5}\ (1,3) + \frac{2}{5}\ (2,1)$$

```
##
```

Observación:

Observa que para comprobar si el vector $v = (1,1)$ se expresa como combinación lineal de los vectores $\{(1,3),(2,1)\}$ hemos construido un sistema de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{array}\right\}$$

que tiene como matriz ampliada,

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Es decir, una matriz donde los vectores $\{(1,3),(2,1)\}$ aparecen como las columnas de la matriz del sistema y el vector $v=(1,1)$ aparece como la columna de la derecha de la matriz ampliada.

Esto va a ocurrir siempre, como comprobaremos en todos los ejemplos.

```
#
```

Para el siguiente conjunto de vectores, comprueba si el vector v se puede escribir como combinación lineal de ellos y si la combinación es única.

(b) $\{(1,3),(2,6)\}$ y $v=(1,1)$ en $\mathbb{R}^2$

El vector $(1,1)$ será combinación lineal de los vectores $\{(1,3),(2,6)\}$ si existen dos números $x,y\in\mathbb{R}$ tales que:

$$(1,1)=x\,(1,3)+y\,(2,6)=(x+2y,3x+6y)$$

Es decir, si se cumple que el siguiente sistema tiene solución (es compatible).

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 3x+6y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$$ matriz ampliada del sistema.

Resolvamos, pues, el sistema de ecuaciones, para ello escribimos la matriz ampliada del sistema y calculamos su forma escalonada reducida por filas.

```
M=matrix(QQ,[[1,2],[3,6]])
MA=M.augment(column_matrix(QQ,[1,1]),subdivide=true)
show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

```
show(MA.echelon_form())
```

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Observando la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada del sistema, concluimos que el sistema es incompatible, ya que la columna del lado derecho ha quedado como columna pivote en la forma escalonada reducida.

Como el sistema es incompatible concluimos que no existen números $x, y \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1,1) = x\,(1,3) + y\,(2,6) = (x+2y, 3x+6y)$$

Es decir, el vector $v = (1,1)$ no se puede expresar como combinación lineal de los vectores $\{(1,3),(2,6)\}$.

Observa como se cumple la observación antes dicha:

"La matriz ampliada del sistema que hemos de resolver para comprobar si existen números $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $(1,1) = x\,(1,3) + y\,(2,6)$,

tiene como columnas a los vectores $(1,3)$ y $(2,6)$ en la parte izquierda de la matriz y al vector $v = (1,1)$ como la columna del lado derecho"

```
##
```

Para el siguiente conjunto de vectores, comprueba si el vector v se puede escribir como combinación lineal de ellos y si la combinación es única.

(c) $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1)\}$y $v = (1,1,2)$ en $\mathbb{R}^3$

El vector $(1,1,2)$ será combinación lineal de los vectores $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1)\}$si existen tres números $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1,1,2) = x\,(1,1,3) + y\,(2,1,1) + z\,(1,1,1) = (x+2y+z, x+y+z, 3x+y+z)$$

Es decir, si se cumple que el siguiente sistema tiene solución (es compatible).

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ 3x+y+z=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \text{ matriz ampliada del sistema.}$$

Observa, de nuevo, como se cumple la observación antes dicha:

"La matriz ampliada del sistema que hemos de resolver para comprobar si existen números $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $(1,1,2) = x\,(1,1,3) + y\,(2,1,1) + z\,(1,1,1)$,

tiene como columnas a los vectores $(1,1,3)$, $(2,1,1)$ y $(1,1,1)$ en la parte izquierda de la matriz y al vector $v = (1,1,2)$ como la columna del lado derecho"

Resolvamos, pues, el sistema de ecuaciones, para ello escribimos la matriz ampliada del sistema y calculamos su forma escalonada reducida por filas.

```
v=vector(QQ,[1,1,2])
u1=vector(QQ,[1,1,3])
u2=vector(QQ,[2,1,1])
u3=vector(QQ,[1,1,1])
M=column_matrix([u1,u2,u3]) # Matriz del sistema
MA=M.augment(column_matrix(v),subdivide=true) # Matriz ampliada del sistema
show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

```
show(MA.echelon_form())
```

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Observando la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada del sistema, concluimos que el sistema es compatible determinado siendo la solución única:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego el vector $v = (1,1,2)$ se expresa como combinación lineal de los vectores $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1)\}$de forma única. Siendo dicha combinación la siguiente:

$$(1,1,2) = \frac{1}{2}\ (1,1,3) + 0\,(2,1,1) + \frac{1}{2}\ (1,1,1)$$

```
##
```

Para el siguiente conjunto de vectores, comprueba si el vector v se puede escribir como combinación lineal de ellos y si la combinación es única.

(d) $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$y $v = (1,1,2)$ en $\mathbb{R}^3$

El vector $(1,1,2)$ será combinación lineal de los vectores $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$ si existen cuatro números $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1,1,2) = x\,(1,1,3) + y\,(2,1,1) + z\,(1,1,1) + t\,(1,2,3) \leftrightarrow$$

$$(1,1,2) = (x + 2y + z + t, x + y + z + 2t, 3x + y + z + 3t)$$

Es decir, si se cumple que el siguiente sistema tiene solución (es compatible).

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + z + 2t = 1 \\ 3x + y + z + 3t = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$ matriz ampliada del sistema.

Observa, de nuevo, como se cumple la observación antes dicha:

"La matriz ampliada del sistema que hemos de resolver para comprobar si existen números $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tales que $(1,1,2) = x\,(1,1,3) + y\,(2,1,1) + z\,(1,1,1) + t\,(1,2,3)$

tiene como columnas a los vectores $(1,1,3)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$ y $(1,2,3)$ en la parte izquierda de la matriz y al vector $v = (1,1,2)$ como la columna del lado derecho"

Resolvamos, pues, el sistema de ecuaciones, para ello escribimos la matriz ampliada del sistema y calculamos su forma escalonada reducida por filas.

```
v=vector(QQ,[1,1,2])
u1=vector(QQ,[1,1,3])
u2=vector(QQ,[2,1,1])
u3=vector(QQ,[1,1,1])
u4=vector(QQ,[1,2,3])
M=column_matrix([u1,u2,u3,u4]) # Matriz del sistema
MA=M.augment(column_matrix(v),subdivide=true) # Matriz ampliada del sistema
show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

```
show(MA.echelon_form())
```

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Observando la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada del sistema, concluimos que el sistema es compatible indeterminado siendo las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,t \\ y = \qquad t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\,t \\ t \quad \text{libre} \end{cases}$$

Luego el vector $v = (1,1,2)$ se expresa como combinación lineal de los vectores $\{(1,1,3),(2,1,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$de infinitas formas.

```
'''
Vamos a comprobar que efectivamente sea cual sea el valor de t la combinación lineal
        (1/2-1/2*t)*u1 + t*u2 + (1/2-5/2*t)*u3 + t*u4

siempre es: (1,1,2)
'''
```

```
var('t')
```

```
t
```

```
(1/2-1/2*t)*u1 + t*u2 + (1/2-5/2*t)*u3 + t*u4
```

```
(1, 1, 2)
```

```
restore('t')
```

Para el siguiente conjunto de vectores, comprueba si el vector v se puede escribir como combinación lineal de ellos y si la combinación es única.

(e) $\{(1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$y $v = (1,1,0,1)$ en $\mathbb{R}^4$

El vector $(1,1,0,1)$ será combinación lineal de los vectores $\{(1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$si existen cuatro números $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1,1,0,1) = x\,(1,1,1,1) + y\,(1,1,2,2) + z\,(1,0,0,1) + t\,(0,2,1,0) \leftrightarrow$$

$$(1,1,0,1) = (x+y+z, x+y+2t, x+2y+t, x+2y+z)$$

Es decir, si se cumple que el siguiente sistema tiene solución (es compatible).

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y+2t=1 \\ x+2y+t=0 \\ x+2y+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{matriz ampliada del sistema.}$$

De nuevo podemos ver como se cumple la observación antes dicha:

"La matriz ampliada del sistema que hemos de resolver para comprobar si existen números $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ tales que $(1,1,0,1) = x\,(1,1,1,1) + y\,(1,1,2,2) + z\,(1,0,0,1) + t\,(0,2,1,0)$

tiene como columnas a los vectores $(1,1,1,1)$, $(1,1,2,2)$, $(1,0,0,1)$ y $(0,2,1,0)$ en la parte izquierda de la matriz y al vector $v=(1,1,0,1)$ como la columna del lado derecho"

Resolvamos, pues, el sistema de ecuaciones, para ello escribimos la matriz ampliada del sistema y calculamos su forma escalonada reducida por filas.

```
v=vector(QQ,[1,1,0,1])
u1=vector(QQ,[1,1,1,1])
u2=vector(QQ,[1,1,2,2])
u3=vector(QQ,[1,0,0,1])
u4=vector(QQ,[0,2,1,0])
M=column_matrix([u1,u2,u3,u4]) # Matriz del sistema
MA=M.augment(column_matrix(v),subdivide=true) # Matriz ampliada del sistema
show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

```
show(MA.echelon_form())
```

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Observando la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada del sistema, concluimos que el sistema es compatible determinado siendo la solución única:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Luego el vector $v=(1,1,0,1)$ se expresa como combinación lineal de los vectores $\{(1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$de forma única. Siendo dicha combinación la siguiente:

$$(1,1,0,1) = -1\,(1,1,1,1) + 0\,(1,1,2,2) + 2\,(1,0,0,1) + 1\,(0,2,1,0)$$

```
(-1)*u1 + 0*u2 + 2*u3 + 1*u4
```

```
(1, 1, 0, 1)
```

```
#
```

Para el siguiente conjunto de vectores, comprueba si el vector v se puede escribir como combinación lineal de ellos y si la combinación es única.

(f) $\{(1,1,1,1),(1,2,1,0),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$ y $v=(1,1,0,1)$ en $\mathbb{R}^4$.

El vector $(1,1,0,1)$ será combinación lineal de los vectores $\{(1,1,1,1),(1,2,1,0),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$ si existen cinco números $x,y,z,t,r\in\mathbb{R}$ tales que:

$$(1,1,0,1)=x\,(1,1,1,1)+y\,(1,2,1,0)+z\,(1,1,2,2)+t\,(1,0,0,1)+r\,(0,2,1,0)\leftrightarrow$$

$$(1,1,0,1)=(x+y+z+t,x+2y+z+2r,x+y+2z+r,x+2z+t)$$

Es decir, si se cumple que el siguiente sistema tiene solución (es compatible).

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z+t=1\\x+2y+z+2r=1\\x+y+2z+r=0\\x+2z+t=1\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&0&1\\1&2&1&0&2&1\\1&1&2&0&1&0\\1&0&2&1&0&1\end{array}\right)$$ matriz ampliada del sistema.

De nuevo podemos ver como se cumple la observación antes dicha:

"La matriz ampliada del sistema que hemos de resolver para comprobar si existen números $x,y,z,t,r\in\mathbb{R}$ tales que
$(1,1,0,1)=x\,(1,1,1,1)+y\,(1,2,1,0)+z\,(1,1,2,2)+t\,(1,0,0,1)+r\,(0,2,1,0)$

tiene como columnas a los vectores $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,0)$, $(1,1,2,2)$, $(1,0,0,1)$ y $(0,2,1,0)$ en la parte izquierda de la matriz y al vector $v=(1,1,0,1)$ como la columna del lado derecho"

Resolvamos, pues, el sistema de ecuaciones, para ello escribimos la matriz ampliada del sistema y calculamos su forma escalonada reducida por filas.

```
v=vector(QQ,[1,1,0,1])
u1=vector(QQ,[1,1,1,1])
u2=vector(QQ,[1,2,1,0])
u3=vector(QQ,[1,1,2,2])
u4=vector(QQ,[1,0,0,1])
u5=vector(QQ,[0,2,1,0])
M=column_matrix([u1,u2,u3,u4,u5]) # Matriz del sistema
MA=M.augment(column_matrix(v),subdivide=true) # Matriz ampliada del sistema
show(MA)
```

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&0&1\\1&2&1&0&2&1\\1&1&2&0&1&0\\1&0&2&1&0&1\end{array}\right)$$

```
show(MA.echelon_form())
```

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Observando la forma escalonada reducida, por filas, de la matriz ampliada del sistema, concluimos que el sistema es compatible indeterminado siendo las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x = \ 5 - 3t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + t \\ t \qquad \text{libre} \\ r = 1 \end{cases}$$

Luego el vector $v = (1,1,0,1)$ se expresa como combinación lineal de los vectores $\{(1,1,1,1),(1,2,1,0),(1,1,2,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)\}$de infinitas formas.

```
'''
Vamos a comprobar que efectivamente sea cual sea el valor de t la combinación
lineal
        (5-3*t)*u1 + (-2+t)*u2 + (-2+t)*u3 + t*u4 + 1*u5

siempre es: (1,1,0,1)
'''
```

```
var('t')
```

t

```
(5-3*t)*u1 + (-2+t)*u2 + (-2+t)*u3 + t*u4 + 1*u5
```

(1, 1, 0, 1)

```
restore('t')
```