

PRÁCTICA 1. ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA

ESCRIBE TU NOMBRE Y GRUPO

Ejercicio 1. Introduce las siguientes matrices sobre el cuerpo de los números racionales \mathbb{Q} usando un `sageblock`:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De los siguientes productos, determina cuales se pueden hacer y cuales no. En el caso de los que se puedan hacer, calcúlalos usando `sage` y pon el resultado en el archivo de la práctica.

$$AB, A^t B, AB^t, A^t B^t, BA, B^t A, BA^t, B^t A^t$$

Solución:

Ejercicio 2. Vamos a construir la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{array} \right)$$

suponiendo que tenemos definida en `sage` la matriz

$$A = \text{matrix}(\mathbb{Q}\mathbb{Q}, [[1, 1/2, 0, 2, 1, 2], [0, 0, 1, 3, -1, 0]])$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y las variables $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ son variables libres que operan con los números racionales sobre los que está definida la matriz A . Aunque hay varias formas de hacerlo, en este ejercicio te pedimos que lo hagas siguiendo los pasos que se te indican:

Vamos a construir la matriz por bloques utilizando `block_matrix`. Para ello nos damos cuenta de que los dos bloques de arriba (el rojo y el azul) están juntos en la matriz A .

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{array} \right)$$

Utilizaremos `subdivide` para partir la matriz A que nos han dado en las dos partes (la roja y la azul) que llamaremos respectivamente $A1$ y $A2$ y que sacaremos una vez subdividida la matriz A usando `subdivision`.

Para construir el bloque verde, que llamaremos $B1$ vamos a construir una matriz indicando únicamente su dimensión para que nos la llene con ceros y asignaremos 1 a las dos posiciones que tienen este valor.

Para construir la parte amarilla, que llamaremos $B2$ vamos a construir el anillo de polinomios con variables $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ sobre el cuerpo \mathbb{Q} y construiremos la matriz $B2$ sobre este anillo de polinomios.

Finalmente, uniremos las cuatro matrices que hemos construido usando `block_matrix`.

Solución:

Ejercicio 3. Construye la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 1 \\ 10 & 7 & -1 & 0 \\ 26 & 14 & 17 & -8 \\ 1 & 3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

sobre los números racionales. Ampliáala con la matriz identidad usando `block_matrix` y reduce la matriz ampliada por filas usando `echelon_form`. La parte que queda a la derecha de la matriz reducida es lo que se llama la matriz de paso. Llama P a esta matriz de paso y comprueba que si multiplicas P por A obtienes la matriz reducida por

filas de la matriz A . En este caso, como la matriz reducida es la matriz identidad, la matriz de paso es la inversa de A . Comprueba que esto es cierto imprimiendo la matriz inversa de A usando `sage{A^-1}`.

Solución:

Ejercicio 4. Consideremos el sistema de ecuaciones sobre \mathbb{Q} dado por

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2a + 1\end{aligned}$$

donde a es un parámetro libre.

- (1) Construye la matriz de los coeficientes sobre el anillo de los polinomios sobre \mathbb{Q} con variable a , así como la matriz columna de los términos independientes sobre el mismo anillo de polinomios.
- (2) Construye la matriz ampliada del sistema utilizando `block_matrix`.
- (3) Determina para qué valores de a el sistema tiene solución mediante una reducción de matrices.
- (4) Para el valor o valores en los cuales el sistema sea compatible (tenga solución) realiza la reducción completa de la matriz ampliada y determina todas las soluciones del sistema.

Solución: