

PRÁCTICA 4. VECTORES INDEPENDIENTES Y GENERADORES. INVERSAS LATERALES. ECUACIONES IMPLÍCITAS Y PARAMÉTRICAS.

ESCRIBE TU NOMBRE Y GRUPO

1. VECTORES INDEPENDIENTES Y GENERADORES

Una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n es una expresión de la forma $x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$ donde los x_i son escalares que llamaremos coeficientes de la combinación. Cuando trabajemos con conjuntos de vectores, habitualmente los pondremos como columnas de una única matriz y en ese caso, las combinaciones lineales se pueden escribir de forma compacta en lo que llamaremos representación matricial de una combinación lineal:

$$\underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{Combinación Lineal en forma vectorial}} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\text{Combinación Lineal en forma matricial}}$$

Unos vectores se dicen **linealmente independientes** si la única combinación lineal que nos da el vector 0 es la que tiene todos sus coeficientes iguales a 0. En forma matricial: Las columnas de A son linealmente independientes si $AX = 0$ implica $X = 0$. Esto a veces también se denomina que A es cancelable ¹ por la izquierda.

La propiedad fundamental es que si P es una matriz invertible, las columnas de A son linealmente independientes si y solo si las columnas de PA son linealmente independientes. Si esto lo aplicamos a la matriz de paso, PA es la matriz reducida por filas. Entonces podemos decir que las columnas de A son linealmente independientes si y solo si las de su reducida por filas lo son, y en las matrices reducidas por filas esa propiedad es inmediata: En una matriz reducida por filas, sus columnas son linealmente independientes si y solo si todas son columnas pivote (o lo que es lo mismo: el **ranko**, que es el número de pivotes, coincide con el número de columnas). De hecho, si de un conjunto de vectores queremos extraer un conjunto linealmente independiente con el mayor número de elementos posible, lo que tenemos que hacer es reducir, ver qué columnas son pivote y esas columnas de la matriz original serán linealmente independientes. Vamos a ver unos ejemplos:

Ejemplo 1. Para cada una de las siguientes matrices, determina si sus columnas son linealmente independientes. Si no lo son, encuentra un conjunto de columnas linealmente independientes de dicha matriz que tenga el máximo número de elementos.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ en el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(2) B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ en el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(3) C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ en el cuerpo } \mathbb{Z}_7.$$

¹Esta terminología es para "cosas que se pueden multiplicar", no solo matrices. Hablando en general, todos los elementos invertibles son cancelables, pero puede haber elementos cancelables no invertibles, por ejemplo, en la ecuación $3x = 0$ en los números enteros, nosotros sabemos que $x = 0$, aunque no podemos multiplicar por el inverso de 3 porque no existe en el conjunto de los números enteros. En el caso concreto de matrices, cancelable por la izquierda va a ser equivalente a tener inversa por la izquierda, pero eso lo veremos más adelante.

Solución:

- (1) $A = \text{matrix}(\text{Zmod}(5), [[4, 2, 3, 1, 2], [0, 3, 1, 1, 1], [2, 3, 0, 4, 1], [0, 4, 1, 4, 2]])$
 $AR = A.\text{echelon_form}()$
 Reducimos por filas la matriz A .

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como no todas las columnas son pivote los vectores no son linealmente independientes. Las cuatro primera columnas sí lo son, y podemos tomar

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

como conjunto linealmente independiente con el máximo número de elementos.

- (2) $B = \text{matrix}(\text{Zmod}(5), [[4, 1, 0, 2], [3, 2, 4, 0], [4, 0, 1, 0], [1, 0, 3, 1], [2, 1, 3, 0]])$
 $BR = B.\text{echelon_form}()$
 Reducimos por filas la matriz B .

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Todas las columnas son pivote, por lo tanto estos vectores son linealmente independientes.

- (3) $C = \text{matrix}(\text{Zmod}(7), [[5, 1, 5, 2, 1], [3, 3, 4, 4, 4], [2, 4, 5, 4, 5], [2, 0, 0, 0, 5], [3, 0, 3, 5, 1]])$
 $CR = C.\text{echelon_form}()$
 Reducimos por filas la matriz C .

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No todas las columnas son pivote, por lo tanto los vectores no son linealmente independientes. Si quitamos la cuarta columna que es la que nos ha salido "no pivote" obtenemos un conjunto de vectores independientes con el número máximo de elementos.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dados v_1, v_2, \dots, v_n en el espacio K^m para un cuerpo K , diremos que son **generadores** si todo vector de K^m se puede poner como combinación lineal de dichos vectores. Si consideramos los vectores v_i como columnas de una matriz B , esta matriz tendrá tamaño m filas y n columnas y la relación de ser generadores es equivalente a decir que $BX = Y$ tiene solución para cualquier Y de K^m .

Si B es una matriz $m \times n$ sobre K y E una operación elemental por filas, entonces las columnas de B son generadoras (de K^m) si y solo si las de EB son generadoras (de K^m). Este resultado que es muy fácil de demostrar nos permite reducir el problema de saber si las columnas de B son generadoras al de si su reducida por filas tiene sus columnas generadoras. En el caso de una matriz reducida R , las columnas de R son generadoras si y solo si R no tiene ninguna fila de ceros, o lo que es lo mismo, el número de pivotes (el rango) coincide con el número de filas.

Ejemplo 2. Para cada una de las siguientes matrices de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo K , determina si sus columnas son generadoras de K^m .

$$(1) A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ en el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(2) B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ en el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(3) C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ en el cuerpo } \mathbb{Z}_7.$$

Solución:

- (1) Empecemos reduciendo por filas la matriz y viendo los pivotes que aparecen:

AR = A.echelon_form()

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estas columnas no son generadoras porque el rango (4) no coincide con el número de filas (5).

- (2) Empecemos reduciendo por filas la matriz y viendo los pivotes que aparecen:

BR = B.echelon_form()

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Estas columnas son generadoras porque el rango (4) coincide con el número de filas (4).

- (3) Empecemos reduciendo por filas la matriz y viendo los pivotes que aparecen:

CR = C.echelon_form()

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estas columnas no son generadoras porque el rango no coincide con el número de filas. En este caso no hubiese sido necesario ni siquiera hacer la reducción porque 4 columnas solo podrían tener como máximo 4 pivotes y nunca 5 (que es el número de filas).

Los conjuntos que son al mismo tiempo linealmente independientes y generadores se denominan **bases**. De cualquier conjunto generador se puede extraer una base eligiendo un conjunto linealmente independiente con el máximo número de vectores (maximal). Dado cualquier conjunto de vectores, si le añadimos un conjunto generador obtenemos evidentemente un conjunto generador, por lo tanto si a un conjunto linealmente independiente le añadimos una base (por ejemplo la canónica) obtendremos un conjunto generador. Si sacamos de este conjunto uno linealmente independiente mediante una reducción de matrices, obtendremos que las primeras columnas son pivotes (porque ya eran linealmente independientes) y luego nos aparecerán pivotes en la parte que hemos añadido. Estas columnas pivote, si volvemos a la matriz original, formarán una base que amplía al conjunto independiente que nos han dado inicialmente.

Ejemplo 3. Comprueba que las columnas de la matriz A son linealmente independientes y que las de B son generadoras de K^5 para el cuerpo $K = \mathbb{Z}_7$. Amplía los vectores de A para conseguir extender el conjunto a una base de K^5 usando los vectores que necesites de la base B.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

```
AR = A.echelon_form()
BR = B.echelon_form()
AB = block_matrix([[A,B]])
ABR = AB.echelon_form()
```

Para responder a las preguntas del ejercicio vamos a reducir las matrices A y B por filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores de A son independientes porque su reducida tiene pivotes en todas las columnas.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los vectores de B son independientes y generadores (y por tanto una base) porque al reducir, el número de pivotes coincide con el número de columnas y de filas. Para la última parte construimos el conjunto de vectores formados por las columnas de la matriz A y los de la matriz B . Este conjunto será claramente generador porque los de B ya son generadores. Si reducimos por filas obtendremos lo siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 5 & 5 & 4 & 6 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 6 & 1 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Esto nos muestra que si añadimos el primer y el tercer vector de B (que nos dan los pivotes que nos faltan) obtendríamos un conjunto linealmente independiente y generador que amplía los vectores de A . Los vectores que nos piden son

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar que es realmente es base reduciendo esta matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 1. Para cada una de las matrices siguientes de tamaño $m \times n$ sobre el cuerpo K determina si las columnas de la matriz son linealmente independientes, generadores de K^m y/o bases de K^m . En el caso de los conjuntos generadores que no sean base, extrae una base de los mismos. En el caso de los linealmente independientes que no son bases, amplíalos a bases utilizando los vectores que sean necesarios de la base canónica.

$$(1) A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ sobre } K = \mathbb{Z}_5.$$

$$(2) B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ sobre } K = \mathbb{Z}_5.$$

$$(3) C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ sobre } K = \mathbb{Z}_7.$$

$$(4) D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ sobre } K = \mathbb{Z}_7.$$

$$(5) E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ sobre } K = \mathbb{Q}.$$

$$(6) F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \text{ sobre } K = \mathbb{Q}.$$

Solución:

2. INVERSAS LATERALES

Dos matrices cuadradas A y B se dicen inversas una de la otra si $AB = I = BA$. Sabemos que en el conjunto de las matrices el producto no es conmutativo, sin embargo en el caso de las matrices cuadradas, si $AB = I$ podemos estar seguros de que $BA = I$. Otra propiedad importante que tienen las matrices cuadradas es que si una matriz tiene inversa, esa inversa es única, no pueden haber dos inversas diferentes para la misma matriz cuadrada.

En el caso de las matrices no cuadradas tenemos la posibilidad de que dos matrices A y B cumplan que $AB = I$ pero BA no sea la identidad. En ese caso diremos que A es inversa por la izquierda de B o que B es inversa por la derecha de A . En matrices no cuadradas las inversas laterales no son únicas y si son inversas por un lado, no lo pueden ser por el otro.

Si nos dan una matriz A para la que queremos encontrar, por ejemplo, sus inversas por la derecha, podríamos plantear la ecuación matricial $AX = I$ y despejar X utilizando las técnicas de la Práctica 2, pero para este caso particular existe otra técnica que puede resultar más efectiva y que también nos ayudará a entender otros problemas posteriores.

Antes de iniciar el ejemplo, vamos a darnos cuenta de que encontrar las inversas laterales por la izquierda o la derecha son problemas simétricos y si sabemos resolver uno de ellos, el otro es inmediato ya que si $AB = I$ entonces $B^t A^t = (AB)^t = I^t = I$. Por lo tanto, tomando traspuestas podemos reducir un problema a otro de forma inmediata.

Ejemplo 4. Determina si las siguientes matrices tienen inversas laterales y en el caso en que las tengan, calcúlalas:

$$(1) M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ sobre el cuerpo } \mathbb{Q}.$$

$$(2) N = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ sobre el cuerpo } \mathbb{Q}.$$

Solución:

- (1) Ampliamos la matriz con la matriz identidad a la derecha y reducimos por filas:

```
M1 = block_matrix([[M,1]])
M1R = M1.echelon_form()
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

La condición necesaria y suficiente para tener una inversa por la izquierda es que al reducir, todas las columnas sean pivote (o lo que es lo mismo, que los vectores sean linealmente independientes). Entonces tendremos una matriz reducida con la siguiente estructura

$$\left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & H \end{array} \right]$$

En nuestro ejemplo tendríamos

```
M1R = copy(M1R)
M1R.subdivide(4,4)
A = M1R.subdivision(0,1)
H = M1R.subdivision(1,1)
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El teorema fundamental de la reducción por filas nos dice que

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A vemos que es una posible inversa por la izquierda, pero hay muchas, cualquiera que podamos poner de la forma $A + CH$ con C cualquier matriz de parámetros libres cumplirá que

$$(A + CH)M = AM + CHM = I + C0 = I.$$

Como A tiene tamaño 4×7 y H tiene tamaño 3×7 el tamaño de la matriz C debe ser 4×3 para que la operación sea posible.

```
Pol.<a1,a2,a3,b1,b2,b3,c1,c2,c3,d1,d2,d3> = QQ[]
C = matrix(Pol, [[a1,a2,a3], [b1,b2,b3], [c1,c2,c3], [d1,d2,d3]])
```

La solución general es pues

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -\frac{2}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2 - \frac{4}{5}a_3 + \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}a_1 - \frac{3}{5}a_2 + \frac{11}{5}a_3 - \frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5}a_1 - \frac{3}{5}a_2 - \frac{19}{5}a_3 + \frac{3}{5} \\ b_1 & b_2 & b_3 & -\frac{2}{5}b_1 + \frac{2}{5}b_2 - \frac{4}{5}b_3 - \frac{2}{5} & -\frac{2}{5}b_1 - \frac{3}{5}b_2 + \frac{11}{5}b_3 + \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5}b_1 - \frac{3}{5}b_2 - \frac{19}{5}b_3 - \frac{2}{5} \\ c_1 & c_2 & c_3 & -\frac{2}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 - \frac{4}{5}c_3 - \frac{2}{5} & -\frac{2}{5}c_1 - \frac{3}{5}c_2 + \frac{11}{5}c_3 - \frac{2}{5} & 1 & -\frac{2}{5}c_1 - \frac{3}{5}c_2 - \frac{19}{5}c_3 + \frac{3}{5} \\ d_1 & d_2 & d_3 & -\frac{2}{5}d_1 + \frac{2}{5}d_2 - \frac{4}{5}d_3 - \frac{2}{5} & -\frac{2}{5}d_1 - \frac{3}{5}d_2 + \frac{11}{5}d_3 + \frac{3}{5} & 0 & -\frac{2}{5}d_1 - \frac{3}{5}d_2 - \frac{19}{5}d_3 + \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

donde los a_i, b_i, c_i, d_i son 12 parámetros libres en \mathbb{Q} .

- (2) En este segundo ejemplo tenemos una matriz con más columnas que filas. Este tipo de matrices puede tener inversas laterales por la derecha y para encontrarlas tenemos que hacer el mismo proceso que antes pero por columnas, o lo que es lo mismo, resolviendo el problema usando traspuestas. La regla es sencilla, al ampliar con la matriz identidad, esta debe estar siempre por el lado más grande de la matriz así que si la matriz es "horizontal" tenemos que tomar traspuestas para ampliar con la identidad a la derecha.

```
Nt1 = block_matrix([[N.T, 1]])
Nt1R = Nt1.echelon_form()
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} -2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Como todas las columnas son pivote, la matriz N^t tendrá inversa por la izquierda (y por lo tanto N tendrá inversa por la derecha). Esta condición es equivalente a que las columnas de N sean generadoras.

```
Nt1R = copy(Nt1R)
Nt1R.subdivide(4,4)
A = Nt1R.subdivision(0,1)
H = Nt1R.subdivision(1,1)
```

La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una inversa por la izquierda de N^t y la fórmula general para todas las matrices inversas por la izquierda de N^t es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde C es una matriz de parámetros libres de tamaño 4×3 .

```
Pol.<a1,a2,a3,b1,b2,b3,c1,c2,c3,d1,d2,d3> = QQ[]
C = matrix(Pol, [[a1,a2,a3],[b1,b2,b3],[c1,c2,c3],[d1,d2,d3]])
Sol = (A+C*H).T
```

Las inversas por la derecha de N serán por lo tanto

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^t =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 - 1 & -d_1 \\ -a_2 - 1 & -b_2 + 2 & -c_2 & -d_2 - 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

siendo a_i, b_i, c_i y d_i parámetros libres en \mathbb{Q} . Podemos comprobar el resultado calculando el producto de estas soluciones por la matriz N ,

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 - 1 & -d_1 \\ -a_2 - 1 & -b_2 + 2 & -c_2 & -d_2 - 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes matrices, determina si tienen inversas por la izquierda, por la derecha o por ambos lados. En caso de tenerlas, calcúlalas.

$$(1) M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ sobre el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(2) M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ sobre el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(3) M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ sobre el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(4) M_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ sobre el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(5) M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ sobre el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

$$(6) M_6 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ sobre el cuerpo } \mathbb{Z}_5.$$

Solución:

3. ECUACIONES IMPLÍCITAS Y PARAMÉTRICAS

Sea K un cuerpo y m un número natural. Los elementos de K^m los llamaremos vectores y un espacio vectorial V sobre el cuerpo K es un subconjunto no vacío de K^m cumpliendo las siguientes condiciones:

- Si $u, v \in V$ entonces $u + v \in V$.
- Si $u \in V$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha v \in V$.

Existen dos formas fundamentales para definir un espacio vectorial a partir de una matriz:

3.1. Forma Paramétrica. Dada una matriz B , llamaremos² $C(B)$ al conjunto de todos los vectores que se pueden poner como combinación lineal de las columnas de B . Cuando un espacio vectorial V nos lo dan como $V = C(B)$ diremos que V nos lo están dando en forma paramétrica.

Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre \mathbb{Z}_2 entonces $C(B)$ es el conjunto de los vectores que se pueden escribir como

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ todos los valores posibles en \mathbb{Z}_2 . Si tomamos todos los valores, obtenemos que

$$V = C(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3.2. Forma Implícita. Dada una matriz H , llamaremos³ $N(H)$ al conjunto de vectores X tales que $HX = 0$. Cuando un espacio vectorial V nos lo dan como $V = N(H)$ diremos que V nos lo están dando en forma implícita.

Por ejemplo, si $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sobre \mathbb{Z}_2 entonces $N(H)$ es el conjunto de los vectores $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$

que se pueden escribir como $HX = 0$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que separado en forma de dos ecuaciones nos dice que

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrando todos los valores posibles, obtenemos

²La notación $C(B)$ proviene del nombre en inglés *column space* en español se denomina espacio generado por las columnas de B .

³La notación $N(H)$ proviene del nombre en inglés *null space* en español se denomina espacio anulador por la derecha de H .

$$V = N(H) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Tal y como hemos visto en este ejemplo, un mismo espacio vectorial se puede poner tanto de forma implícita como de forma paramétrica. Pasar de una representación a otra será una parte fundamental de muchos de los problemas porque la utilización de la representación adecuada permitirá resolverlos de forma sencilla mientras que con la representación incorrecta el problema puede ser muy complicado. Vamos a aprender en esta sección a pasar de una representación a la otra con unos ejemplos:

Ejemplo 5. Dada la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre el cuerpo \mathbb{Z}_5 describe el espacio vectorial $V = C(B)$ en forma implícita.

Solución:

```
B1 = block_matrix([[B,1]])
B1R = copy(B1.echelon_form())
B1R.subdivide(2,3)
H = B1R.subdivision(1,1)
```

Ampliamos la matriz con la identidad a la derecha reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right]$$

Si denominamos H a la parte que queda a la derecha de los ceros al hacer la reducción tenemos que $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. El teorema fundamental de la reducción por filas nos dice que $HB = 0$ y por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si eso es cierto para las columnas de B , lo es para cualquier combinación lineal de las columnas de B (para todos los vectores de $C(B)$) y la matriz H es precisamente la matriz que nos da V de forma implícita.

$$N \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right) = V = C \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

El problema inverso se puede resolver de forma dual usando traspuestas. La razón es una propiedad muy útil que es

$$N(H) = C(B) \text{ si y solo si } C(H^t) = N(B^t)$$

Esta propiedad la veremos de nuevo cuando hablemos de espacio ortogonal, pero de momento nos servirá para pasar de implícitas a paramétricas usando la misma técnica que para pasar de paramétricas a implícitas.

Ejemplo 6. Sea V el espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{Z}_7 formado por los X tales que

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 5x_1 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Escribe V en forma paramétrica.

Solución:

```
Ht1 = block_matrix([[H.T,1]])
Ht1R = copy(Ht1.echelon_form())
Ht1R.subdivide(3,3)
B = Ht1R.subdivision(1,1).T
```

Lo primero que tenemos que hacer es poner el espacio como $HX = 0$, lo cual podemos hacer tomando $H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$. Trasponemos H y ampliamos la matriz con la identidad para reducir por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right]$$

Si denominamos B a la traspuesta de la matriz que queda en la parte derecha de los ceros al hacer la reducción tenemos que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos que

$$N\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}\right) = V = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Ejercicio 3. (1) Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ sobre el cuerpo \mathbb{Z}_3 y $V = C(B)$. Escribe V en forma implícita.

(2) Sea $H = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sobre el cuerpo \mathbb{Z}_7 y $W = N(H)$. Escribe W en forma paramétrica.

Solución: