

PRÁCTICA 5. APLICACIONES LINEALES.

ESCRIBE TU NOMBRE Y GRUPO

1. APLICACIONES LINEALES

Sea K un cuerpo. Una aplicación lineal $f : K^m \rightarrow K^n$ nos llevará vectores de K^m a vectores de K^n cumpliendo que $f(u + v) = f(u) + f(v)$ y $f(\alpha u) = \alpha f(u)$. Lo fundamental que debemos conocer respecto a las aplicaciones lineales es que vienen definidas por matrices, $M(f)$ es una matriz de tamaño $n \times m$ tal que $f(u) = M(f)u$ para cualquier vector columna $u \in K^m$. Toda aplicación lineal nos da una matriz y toda matriz nos da una aplicación lineal. Podemos escribirlo como

$$\text{Lin}(K^m, K^n) \equiv \text{Mat}_{n \times m}(K)$$

La forma de pasar de aplicaciones lineales a matrices y viceversa es la siguiente: Si nos dan $f : K^m \rightarrow K^n$, la matriz de f , $M(f)$, es el resultado de aplicar f a las columnas de la matriz identidad de tamaño m , es decir $M(f) = f(I)$ (entendiendo que cuando aplicamos f a una matriz es lo mismo que aplicarlo a todas sus columnas). Recíprocamente, si nos dan una matriz A de tamaño $m \times n$, la aplicación lineal asociada es la que nos lleva un vector u de K^m al vector $A \cdot u$ de K^n (donde $A \cdot u$ es el producto habitual de matrices).

En el fondo, nos pasa lo mismo que cuando hablábamos de operaciones elementales $E(A) = E(I)A = EA$ identificando una operación elemental E con la matriz elemental $E(I)$ que resulta de aplicar la operación elemental a la matriz identidad. En el caso de una aplicación lineal f también tenemos que $f(AB) = f(A)B$ cuando este producto tiene los tamaños adecuados (y entendiendo como antes que f aplicada a una matriz es aplicarla a todas sus columnas) y entonces $f(u) = f(Iu) = f(I)u = M(f)u$ porque en este caso usamos $M(f)$ para referirnos a la matriz de f , pero que no es más que aplicar f a las columnas de la matriz identidad.

Esta identificación entre matrices y aplicaciones lineales nos permite resolver los problemas de aplicaciones lineales como problemas matriciales. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1. Sea K el cuerpo \mathbb{Z}_5 . Encuentra todas las aplicaciones lineales $f : K^4 \rightarrow K^6$ tales que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

Uniéndolas todas las relaciones que nos dan y escribiendo $M(f)$ como la matriz de f , el problema es equivalente a

$$M(f) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y lo que tenemos que encontrar es todas las matrices $M(f)$ que cumplen esta condición. Tomando traspuestas para poner la matriz incógnita en la derecha (como solemos hacer de forma habitual) tenemos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M(f)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

que es una ecuación matricial del tipo $AX = B$ siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X = M(f)^t \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolverlo vamos a proceder de la misma forma que en la práctica de ecuaciones matriciales:

```
A = R.T
B = S.T
AB = block_matrix([[A,B]])
ABR = AB.echelon_form()
```

Tomamos la ampliada del sistema y la reducimos por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Para encontrar todas las soluciones tendremos que añadir dos pivotes y por lo tanto 12 parámetros libres

```
Pol.<a1,a2,a3,a4,a5,a6,b1,b2,b3,b4,b5,b6> = Zmod(5) []
C = matrix(Pol,4,10)
D = matrix(Pol,[[a1,a2,a3,a4,a5,a6],[b1,b2,b3,b4,b5,b6]])
C[:2,:] = ABR[:2,:]
C[2,2] = 1
C[3,3] = 1
C[2:,4:] = D
C.subdivide([],4)
CR = C.echelon_form()
XSol = CR.subdivision(0,1)
```

Terminamos la reducción y obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 + 1 & 2a_4 + 3 & 2a_5 + 4 & 2a_6 + 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 - b_1 & a_2 - b_2 + 4 & a_3 - b_3 + 3 & a_4 - b_4 + 4 & a_5 - b_5 + 2 & a_6 - b_6 + 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{array} \right]$$

lo que nos dice que

$$X = \begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 + 1 & 2a_4 + 3 & 2a_5 + 4 & 2a_6 + 3 \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 + 4 & a_3 - b_3 + 3 & a_4 - b_4 + 4 & a_5 - b_5 + 2 & a_6 - b_6 + 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto los valores posibles para $M(f)$ son

$$M(f) = \begin{bmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1 & a_1 & b_1 \\ 2a_2 & a_2 - b_2 + 4 & a_2 & b_2 \\ 2a_3 + 1 & a_3 - b_3 + 3 & a_3 & b_3 \\ 2a_4 + 3 & a_4 - b_4 + 4 & a_4 & b_4 \\ 2a_5 + 4 & a_5 - b_5 + 2 & a_5 & b_5 \\ 2a_6 + 3 & a_6 - b_6 + 3 & a_6 & b_6 \end{bmatrix}$$

donde los a_i y b_i pueden tomar cualquier valor de \mathbb{Z}_5 (es decir, hay $5^{12} = 244140625$ soluciones). Podemos comprobar las soluciones viendo que

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1 & a_1 & b_1 \\ 2a_2 & a_2 - b_2 + 4 & a_2 & b_2 \\ 2a_3 + 1 & a_3 - b_3 + 3 & a_3 & b_3 \\ 2a_4 + 3 & a_4 - b_4 + 4 & a_4 & b_4 \\ 2a_5 + 4 & a_5 - b_5 + 2 & a_5 & b_5 \\ 2a_6 + 3 & a_6 - b_6 + 3 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1 & a_1 & b_1 \\ 2a_2 & a_2 - b_2 + 4 & a_2 & b_2 \\ 2a_3 + 1 & a_3 - b_3 + 3 & a_3 & b_3 \\ 2a_4 + 3 & a_4 - b_4 + 4 & a_4 & b_4 \\ 2a_5 + 4 & a_5 - b_5 + 2 & a_5 & b_5 \\ 2a_6 + 3 & a_6 - b_6 + 3 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1 & a_1 & b_1 \\ 2a_2 & a_2 - b_2 + 4 & a_2 & b_2 \\ 2a_3 + 1 & a_3 - b_3 + 3 & a_3 & b_3 \\ 2a_4 + 3 & a_4 - b_4 + 4 & a_4 & b_4 \\ 2a_5 + 4 & a_5 - b_5 + 2 & a_5 & b_5 \\ 2a_6 + 3 & a_6 - b_6 + 3 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como en cualquier ecuación matricial se nos podría haber dado el caso de que no tuviera solución (el sistema fuera incompatible) en cuyo caso simplemente no habría ninguna aplicación lineal f cumpliendo las condiciones. También podríamos tener una solución única o como en este caso múltiples soluciones.

Ejercicio 1. Sea K el cuerpo de los números racionales \mathbb{Q} . Encuentra todas las aplicaciones lineales $f : K^4 \rightarrow K^4$ tales que

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -8 \\ 31 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -8 \\ 64 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -17 \\ 93 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solución:

2. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Dada una aplicación lineal $f : K^n \rightarrow K^m$ podemos construir dos espacios vectoriales asociados a f que se denominan núcleo e imagen. El núcleo es un subespacio de K^n y se define como el conjunto de vectores u de K^n que cumplen $f(u) = 0$. Lo denotaremos¹ $\text{Ker}(f)$. La imagen de f será un espacio contenido en K^m y se definirá como el conjunto de los vectores v de K^m que se pueden poner como $v = f(u)$ para algún vector de u de K^n . Lo denotaremos² $\text{Im}(f)$.

Pueden parecer conceptos nuevos, pero en realidad el núcleo y la imagen de una aplicación lineal ya los hemos visto si pensamos en f como una matriz $M(f)$. El núcleo son los vectores X tales que $f(X) = 0$ o lo que es lo mismo $M(f)X = 0$ por lo tanto

$$\text{Ker}(f) = N(M(f))$$

(el espacio anulador por la derecha de la matriz $M(f)$). La imagen son los vectores Y tales que $Y = M(f)X$ para algún X y eso son precisamente los vectores que se pueden poner como combinación lineal de las columnas de $M(f)$, es decir,

$$\text{Im}(f) = C(M(f)).$$

¹En inglés, el núcleo se traduce como *kernel*.

²En inglés, la imagen se traduce como *image*.

El paso de implícitas a paramétricas y paramétricas a implícitas se puede reescribir en términos de aplicaciones como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Sea K el cuerpo \mathbb{Z}_5 y $f : K^3 \rightarrow K^4$ la aplicación lineal con matriz asociada $M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Encuentra aplicaciones lineales g y h tales que $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$ y $\text{Ker}(h) = \text{Im}(f)$.

Solución:

Sabemos que $\text{Im}(f) = C \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$, es decir, tenemos las ecuaciones paramétricas. Lo que queremos son

las implícitas, así que procedemos de la forma habitual, ampliamos con la identidad y reducimos por filas:

```
Mf1 = block_matrix([[Mf,1]])
Mf1R = copy(Mf1.echelon_form())
Mf1R.subdivide(2,3)
Mh = Mf1R.subdivision(1,1)
```

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

De ahí deducimos que

$$\text{Im}(f) = C(M(f)) = C \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right) = N \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = N(M(h)) = \text{Ker}(h)$$

siendo h la aplicación lineal asociada a la matriz $M(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ que como es una matriz de tamaño

2×4 , será una aplicación $h : K^4 \rightarrow K^2$. Para la otra parte sabemos que $\text{Ker}(f) = N \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$, es decir,

tenemos el espacio en forma implícita y queremos ponerlo en forma paramétrica. Eso lo haremos utilizando la matriz traspuesta, la ampliamos con la identidad y la reducimos:

```
Mf1t = block_matrix([[Mf.T,1]])
Mf1tR = copy(Mf1t.echelon_form())
Mf1tR.subdivide(2,4)
Mg = Mf1tR.subdivision(1,1).T
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Lo que nos queda a la derecha de los ceros es la traspuesta de la forma paramétrica que buscamos:

$$\text{Ker}(f) = N(M(f)) = N \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right) = C \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = C(M(g)) = \text{Im}(g)$$

Siendo g la aplicación lineal asociada a la matriz $M(g) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. La matriz $M(g)$ tiene tamaño 3×1 por lo que $g : K^1 \rightarrow K^3$.

Ejercicio 2. Sea K el cuerpo \mathbb{Z}_7 y $f : K^4 \rightarrow K^5$ la aplicación lineal con matriz asociada $M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Encuentra aplicaciones lineales g y h tales que $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$ y $\text{Ker}(h) = \text{Im}(f)$.

Solución:

3. APLICACIONES LINEALES INYECTIVAS Y SOBREYECTIVAS. INVERSAS LATERALES.

Una aplicación lineal $f : K^n \rightarrow K^m$ es **inyectiva** si y solo si el único elemento u de K^n que va al 0 es el 0, es decir, $f(u) = 0$ si y solo si $u = 0$. Si lo escribimos en forma matricial y escribimos X para el vector de K^n en lugar de u , tenemos que la inyectividad de f es equivalente a que si $M(f)X = 0$ entonces $X = 0$, pero eso es precisamente la definición de que las columnas de $M(f)$ sean linealmente independientes.

La aplicación lineal $f : K^n \rightarrow K^m$ es **sobreyectiva** o **suprayectiva** si para todo vector v de K^m existe u en K^n tal que $f(u) = v$. Escrito en forma matricial y denotando X e Y a los vectores, esto es equivalente a decir que para todo Y de K^m siempre existe X en K^n tal que $M(f)X = Y$, pero esta es precisamente la definición de que las columnas de $M(f)$ sean generadoras de K^m .

Entonces tenemos

f inyectiva \equiv Las columnas de $M(f)$ linealmente independientes

f sobreyectiva \equiv Las columnas de $M(f)$ generadoras de K^m

Podemos completar también estas propiedades relacionadas con el núcleo y la imagen. Que f sea inyectiva es equivalente a que $\text{Ker}(f) = 0$ y que sea sobreyectiva es equivalente a que $\text{Im}(f) = K^m$.

Cuando unos vectores son a la vez linealmente independientes y generadores se denominan bases. Concepto equivalente en el caso de aplicaciones lineales que son inyectivas y sobreyectivas es el de aplicaciones lineales **biyectivas** o **isomorfismos**.

Ejemplo 3. Para las siguientes aplicaciones lineales, determina si son inyectivas, sobreyectivas, biyectivas.

$$(1) f_1 : K^4 \rightarrow K^5 \text{ con } K = \mathbb{Z}_7 \text{ y } M(f_1) = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(2) f_2 : K^4 \rightarrow K^5 \text{ con } K = \mathbb{Z}_5 \text{ y } M(f_2) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(3) f_3 : K^5 \rightarrow K^5 \text{ con } K = \mathbb{Z}_3 \text{ y } M(f_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(4) f_4 : K^5 \rightarrow K^5 \text{ con } K = \mathbb{Q} \text{ y } M(f_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(5) f_5 : K^5 \rightarrow K^4 \text{ con } K = \mathbb{Z}_5 \text{ y } M(f_5) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(6) f_6 : K^5 \rightarrow K^4 \text{ con } K = \mathbb{Z}_5 \text{ y } M(f_6) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

- (1) Reducimos la matriz de la aplicación lineal para ver su rango:

`M1R = M1.echelon_form()`

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el rango no coincide ni con el número de filas ni de columnas, la aplicación f_1 no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

- (2) Reducimos la matriz de la aplicación lineal para ver su rango:

`M2R = M2.echelon_form()`

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el rango coincide con el número de columnas, la aplicación f_2 es inyectiva, pero como no coincide con el número de filas, no es sobreyectiva.

- (3) Reducimos la matriz de la aplicación lineal para ver su rango:

`M3R = M3.echelon_form()`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el rango no coincide ni con el número de filas ni de columnas, la aplicación f_3 no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

- (4) Reducimos la matriz de la aplicación lineal para ver su rango:

`M4R = M4.echelon_form()`

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el rango coincide con el número de filas y de columnas, la aplicación f_4 es biyectiva.

- (5) Reducimos la matriz de la aplicación lineal para ver su rango:

`M5R = M5.echelon_form()`

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el rango no coincide ni con el número de filas ni de columnas, la aplicación f_5 no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

- (6) Reducimos la matriz de la aplicación lineal para ver su rango:

`M6R = M6.echelon_form()`

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el rango coincide con el número de filas, la aplicación f_6 es sobreyectiva pero como no coincide con el número de columnas no es inyectiva.

Las aplicaciones inyectivas y sobreyectivas están muy relacionadas con la existencia de inversas laterales. Si f es inyectiva, el rango $M(f)$ coincide con el número de columnas y eso sabemos que es equivalente a que la matriz $M(f)$ tenga una inversa por la izquierda, dicho de otra forma existe una matriz A tal que $AM(f) = I$. Si denominamos g a la aplicación lineal con matriz asociada $M(g) = A$, esto nos dice que $I = M(g)M(f) = M(g \circ f)$ y por lo tanto la composición de aplicaciones $g \circ f$ es la aplicación lineal identidad.

Algo similar sucede por el otro lado. Si f es sobreyectiva, el rango de $M(f)$ coincide con el número de filas y eso es equivalente a que la matriz $M(f)$ tenga una inversa por la derecha, dicho de otra forma, existe una matriz B tal que $M(f)B = I$. Si denominamos h a la aplicación lineal con matriz asociada $M(h) = B$, esto nos dice que $I = M(f)M(h) = M(f \circ h)$ y por lo tanto la composición de aplicaciones $f \circ h$ es la aplicación lineal identidad.

Ejemplo 4. *Determina qué aplicaciones lineales de entre las del ejemplo anterior tienen inversas laterales y en caso positivo, calcúlalas.*

Solución:

Para que existan inversas laterales debemos tener rango máximo por filas o por columnas. En el ejemplo anterior, las impares no tendrán inversas laterales por lo que nos centraremos en las pares.

(2) Ampliamos la matriz de f_2 con la identidad y reducimos por filas

```
M2a = block_matrix([[M2,1]])
M2aR = copy(M2a.echelon_form())
M2aR.subdivide(4,4)
A2 = M2aR.subdivision(0,1)
H2 = M2aR.subdivision(1,1)
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Las inversas por la izquierda de $M(f_2)$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + C [1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1]$$

Para que esta operación tenga sentido, C debe ser una matriz de parámetros de tamaño 4×1 por lo que la solución general será de la siguiente forma:

```
Pol.<a1,a2,a3,a4> = Zmod(5) []
C = matrix(Pol, [[a1],[a2],[a3],[a4]])
Sol2 = A2+C*H2
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} a_1 & 2 & 3a_1 + 4 & 4 & a_1 + 3 \\ a_2 & 4 & 3a_2 + 4 & 0 & a_2 + 1 \\ a_3 & 4 & 3a_3 + 2 & 3 & a_3 + 1 \\ a_4 & 4 & 3a_4 + 3 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar las soluciones viendo que

$$\begin{bmatrix} a_1 & 2 & 3a_1 + 4 & 4 & a_1 + 3 \\ a_2 & 4 & 3a_2 + 4 & 0 & a_2 + 1 \\ a_3 & 4 & 3a_3 + 2 & 3 & a_3 + 1 \\ a_4 & 4 & 3a_4 + 3 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) En el caso de f_4 tenemos que la reducida es la matriz identidad y por lo tanto estamos ante un caso de aplicación lineal biyectiva.

```
M4a = block_matrix([[M4,1]])
M4aR = M4a.echelon_form()
P4 = M4aR.subdivision(0,1)
```

Reducimos la ampliada y sacamos la matriz de paso, que será la inversa

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$M(f_4^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (6) En el caso de f_6 tenemos rango máximo por filas por lo que tendremos inversas por la derecha. Para ello utilizaremos matrices traspuestas.

```
M6ta = block_matrix([[M6.T,1]])
M6taR = copy(M6ta.echelon_form())
M6taR.subdivide(4,4)
A6 = M6taR.subdivision(0,1)
H6 = M6taR.subdivision(1,1)
```

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array} \right]$$

Las inversas por la izquierda de $M(f_6)^t$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} + C [1 \ 1 \ 4 \ 3 \ 0]$$

Para que esta operación tenga sentido, C debe ser una matriz de parámetros de tamaño 4×1 .

```
Pol.<a1,a2,a3,a4> = Zmod(5) []
C = matrix(Pol, [[a1],[a2],[a3],[a4]])
Sol6t = A6+C*H6
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 4 \ 3 \ 0] = \begin{bmatrix} a_1 & a_1+4 & -a_1+1 & 3a_1+3 & 0 \\ a_2 & a_2+4 & -a_2+2 & 3a_2+1 & 1 \\ a_3 & a_3+2 & -a_3+4 & 3a_3+1 & 1 \\ a_4 & a_4+3 & -a_4+4 & 3a_4+1 & 3 \end{bmatrix}$$

Las inversas por la derecha de $M(f_6)$ serán las traspuestas de las anteriores

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1+4 & a_2+4 & a_3+2 & a_4+3 \\ -a_1+1 & -a_2+2 & -a_3+4 & -a_4+4 \\ 3a_1+3 & 3a_2+1 & 3a_3+1 & 3a_4+1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar las soluciones viendo que

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 + 4 & a_2 + 4 & a_3 + 2 & a_4 + 3 \\ -a_1 + 1 & -a_2 + 2 & -a_3 + 4 & -a_4 + 4 \\ 3a_1 + 3 & 3a_2 + 1 & 3a_3 + 1 & 3a_4 + 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3. Para las siguientes aplicaciones lineales indica cuales son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. En el caso de aquellas que tengan inversas laterales, calcula todas las posibles inversas laterales que tengan.

$$(1) f_1 : K^3 \rightarrow K^5 \text{ con } K = \mathbb{Z}_7 \text{ y } M(f_1) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(2) f_2 : K^3 \rightarrow K^5 \text{ con } K = \mathbb{Z}_7 \text{ y } M(f_2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(3) f_3 : K^5 \rightarrow K^4 \text{ con } K = \mathbb{Z}_5 \text{ y } M(f_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(4) f_4 : K^5 \rightarrow K^4 \text{ con } K = \mathbb{Z}_5 \text{ y } M(f_4) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(5) f_5 : K^5 \rightarrow K^5 \text{ con } K = \mathbb{Q} \text{ y } M(f_5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$(6) f_6 : K^5 \rightarrow K^5 \text{ con } K = \mathbb{Q} \text{ y } M(f_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

4. CONCLUSIONES

En esta práctica hemos tratado el tema de las aplicaciones lineales, pero en realidad todas las técnicas de resolución ya nos han salido en prácticas anteriores. Lo importante es que comprendamos que las aplicaciones lineales y las matrices son conceptos equivalentes y podemos pasar de unas a otras de forma automática. Las propiedades de las aplicaciones lineales y las de las matrices se traducen automáticamente aunque se nombren de forma diferente. Debemos estar atentos a los enunciados de los problemas y a su formulación en la forma más conveniente para que podamos resolverlos.