

## PRÁCTICA 6. BASES.

ESCRIBE TU NOMBRE Y GRUPO

### 1. BASES Y COORDENADAS

Dado un espacio vectorial  $V$  y unos vectores  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , diremos que  $B$  es una **base de  $V$**  si son linealmente independientes y generan  $V$  (es decir, todo vector de  $V$  se puede poner como combinación lineal de los vectores de  $B$ ). Habitualmente pondremos los vectores de una base como columnas de una matriz para que utilizaremos también la letra  $B$ . Utilizando la matriz  $B$ , la condición de ser base es que  $N(B) = 0$  y que  $C(B) = V$ . Al número de elementos de una base se llama **dimensión de  $V$** . Todas las bases tienen el mismo número de elementos.

Dado un vector  $v \in V$  y una base  $B$  de  $V$ , llamaremos coordenadas de  $v$  en base  $B$  a los coeficientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tales que  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = Bx$  siendo  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ . Cuando escribamos  $v = x_B$  significará que  $v$  tiene como coordenadas en base  $B$  los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (es decir,  $v = Bx = x_B$ ). Podemos calcular directamente las coordenadas de  $v$  en base  $B$  si tenemos una matriz inversa por la izquierda de  $B$ . Si  $AB = I$  entonces  $x = Ix = ABx = Av$ .

#### Coordenadas en una base

Sea  $v \in V$  y  $B$  base de  $B$ . Entonces  $v = Bx = x_B$ . Si  $AB = I$  entonces  $x = IX = ABX = Av$ .

**Ejemplo 1.** Sea  $V = C(B)$  con  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  y  $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}_5$ . Demuestra que

$B$  es una base de  $V$  y que el vector  $v$  está en el espacio vectorial  $V$ . Calcula sus coordenadas en base  $B$  resolviendo el sistema de ecuaciones y con una inversa por la izquierda de  $B$ . Comprueba que ambos métodos dan el mismo resultado.

*Solución:*

```
Bv = block_matrix([[B,v]])
BvR = copy(Bv.echelon_form())
BvR.subdivide(3,3)
B1 = block_matrix([[B,1]])
B1R = copy(B1.echelon_form())
B1R.subdivide(3,3)
A = B1R.subdivision(0,1)
H = B1R.subdivision(1,1)
```

Para comprobar que son base de  $V$  necesitamos ver que son linealmente independientes porque el hecho de que generan  $V$  es inmediato por la definición de  $V$ . Para verlo podríamos reducir la matriz  $B$ , pero como la tenemos que reducir para resolver el sistema de ecuaciones que nos dará las coordenadas de  $v$ , vamos a hacer directamente el cálculo de las coordenadas. Tenemos que encontrar los valores  $x_i$

que hacen que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y para eso ampliamos  $B$  con la columna  $v$  y reducimos

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Como a la izquierda nos queda la identidad, sabemos que las columnas de  $B$  son linealmente independientes y por lo tanto una base de  $V$ . El sistema resulta compatible, eso prueba que  $v \in V$  y por último, la solución del sistema son las coordenadas de  $v$  respecto de la base  $B$ , es decir

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

Como podemos ver, aunque  $v$  tiene 5 componentes, escrito en base  $B$  sólo tiene 3 porque este número siempre coincide con el número de elementos de la base.

Vamos a resolver el problema usando la inversa lateral. Para ello ampliamos  $B$  con la identidad y reducimos

$$\left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

Llamamos  $A$  a la parte que queda a la derecha de la identidad y  $H$  a la que queda a la derecha de los ceros.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

De nuevo, como al reducir nos ha quedado la identidad en la parte de  $B$ , eso prueba que los vectores son linealmente independientes y por lo tanto base. Para calcular las coordenadas aplicamos la fórmula

$$x = Av = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y vemos que las coordenadas son las mismas que antes. Para asegurarnos usando este método de que el vector pertenece al espacio  $V$  podemos comprobar que cumple las ecuaciones implícitas de  $V$  que vienen dadas por la matriz  $H$ , es decir  $Hv = 0$ . Si hacemos el cálculo vemos que efectivamente cumple la condición de pertenecer al espacio:

$$Hv = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cuando nos dan un espacio vectorial, uno de los problemas que nos pueden plantear es encontrar una base de dicho espacio, vamos a ver los dos casos posibles:

- Si el espacio nos lo dan en forma paramétrica, es decir  $V = C(B)$ .

En este caso puede que los vectores de  $B$  sean linealmente independientes, en cuyo caso ya son una base. Si no son linealmente independientes debemos reducir la matriz  $B$  para encontrar un subconjunto linealmente independiente que genere el mismo espacio. Tomando esos vectores de  $B$  obtendremos la base que nos piden.

**Ejemplo 2.** Sea  $V = C(B)$  para la matriz  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  sobre  $\mathbb{Z}_5$ . Encuentra una base

de  $V$ .

*Solución:*

```
BR = B.echelon_form()
```

Reducimos la matriz  $B$  y vemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes y por lo tanto la base que buscamos es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- El espacio nos lo dan en forma implícita, es decir,  $W = N(H)$ .

En este caso lo primero que hacemos es pasarlo a forma paramétrica y aplicar el caso anterior al conjunto generador obtenido. Si utilizamos el método explicado en este curso, el conjunto obtenido ya es linealmente independiente, pero no es mala idea comprobarlo para asegurarnos, sobre todo si hemos cambiado en algo el método.

**Ejemplo 3.** Sea  $W = N(H)$  para la matriz  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  sobre  $\mathbb{Z}_5$ . Encuentra una base de  $W$ .

*Solución:*

```
Ht1 = block_matrix([[H.T, 1]])
```

```
Ht1R = copy(Ht1.echelon_form())
```

```
Ht1R.subdivide(2,2)
```

```
B = Ht1R.subdivision(1,1).T
```

Trasponemos la matriz  $H$ , la ampliamos con la identidad y la reducimos.

$$\left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Lo que nos queda a la derecha de los ceros es la traspuesta de la base que buscamos. Nos podemos asegurar de que son linealmente independientes reduciendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como efectivamente son independientes la base la podemos tomar igual a

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 1.** Sea  $V = N(H)$  con  $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  y  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}$ .

Encuentra una base  $B$  de  $V$  y calcula las coordenadas de  $v$  respecto de esa base.

*Solución:*

## 2. SUMA, INTERSECCIÓN E INCLUSIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES

Dados dos espacios vectoriales  $U$  y  $V$  contenidos en  $K^n$ , se llama **espacio suma**  $U + V$  al conjunto de los vectores de  $K^n$  que se pueden poner como suma de uno de  $U$  y uno de  $V$ . Para calcular la suma de dos subespacios los pondremos en forma paramétrica  $U = C(B)$  y  $V = C(B')$ . Los vectores de  $U + V$  son los que se pueden poner como suma de una combinación de los de  $B$  con una combinación de los de  $B'$  y eso es lo mismo que decir que  $U + V = C([B|B'])$ . Esto nos dará la suma de los subespacios en forma paramétrica.

Si  $U$  y  $V$  son espacios vectoriales contenidos en  $K^n$ , se llama **intersección** de estos espacios  $U \cap V$  al conjunto de los vectores de  $K^n$  que están en  $U$  y en  $V$ . Para calcular la suma de dos subespacios los pondremos en forma implícita  $U = N(H)$  y  $V = N(H')$  y los vectores de  $U \cap V$  será aquellos vectores que cumplan las ecuaciones de ambos subespacios, es decir,  $U \cap V = N\left(\begin{bmatrix} H \\ H' \end{bmatrix}\right)$ . Esto nos dará la intersección de los subespacios en forma implícita.

Si  $U$  y  $V$  son espacios vectoriales contenidos en  $K^n$ , para comprobar si **el espacio  $U$  está contenido en el espacio  $V$**  procederemos de la siguiente forma:

- Si  $U$  nos lo dan en forma paramétrica y  $V$  en forma implícita, es decir  $U = C(B)$  y  $V = N(H')$  entonces  $U$  estará contenido en  $V$  si todos los generadores de  $U$  (es decir para las columnas de  $B$ ) cumplen las ecuaciones de  $V$ , esto es equivalentes a que  $H'B = 0$ .
- Si  $U$  y  $V$  nos los dan en forma paramétrica, es decir  $U = C(B)$  y  $V = C(B')$  entonces  $U$  estará contenido en  $V$  si al reducir la matriz  $[B'|B]$  no hay ningún pivote en la parte de  $B$ .

Si  $U$  y  $V$  son espacios vectoriales contenidos en  $K^n$ , para comprobar que son iguales tenemos que ver que  $U$  está contenido en  $V$  y que  $V$  está contenido en  $U$ . Si  $U$  está contenido en  $V$ , entonces  $\dim(U) \leq \dim(V)$ . Si tenemos el contenido y las dimensiones son iguales, entonces  $U = V$  y no es necesario comprobar que  $V$  está contenido en  $U$ .

**Ejemplo 4.** Consideremos las siguientes matrices sobre el cuerpo de 5 elementos.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Y los espacios vectoriales  $V_1 = C(B_1)$  y  $V_2 = C(B_2)$ . Vamos a crear una matriz por bloques en los que los dos bloques superiores sean  $B_1^t$  y  $B_2^t$  y en los bloques inferiores  $B_1^t$  y 0. Reduciremos por filas y vamos a comprobar que las filas de no ceros de la parte izquierda traspuestos son una base de la suma  $V_1 + V_2$  y la parte de la derecha de los ceros también traspuestos (eliminando las filas de ceros que pudiera haber) son una base de  $V_1 \cap V_2$ .

```
M = block_matrix([[B1.T, B1.T], [B2.T, 0]])
MR = M.echelon_form()
```

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Comprobar que  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  es base de la suma y que  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  es base de la inter-

sección.

Para ver que son una base de la suma, vamos a calcularla por el método explicado en clase (construir la ampliada  $[B_1|B_2]$  y reducir):

```
B1B2 = block_matrix([[B1, B2]])
B1B2R = B1B2.echelon_form()
```

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

La base de la suma serían las 6 primeras columnas de  $[B_1|B_2]$ , pero eso tiene dimensión 6 y por lo

tanto es todo el espacio. Lo mismo que nos sucede con  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  que no es más que la

base canónica (una base de todo el espacio). Entonces ambas son bases del espacio suma que en este caso es el espacio total.

Para calcular la intersección con el método explicado en clase, tenemos que pasar tanto  $C(B_1)$  como  $C(B_2)$  a implícitas. Vamos a calcular  $H_1$  y  $H_2$  tales que  $C(B_1) = N(H_1)$  y  $C(B_2) = N(H_2)$ .

```
B1a = block_matrix([[B1,1]])
B2a = block_matrix([[B2,1]])
B1aR = copy(B1a.echelon_form())
B2aR = copy(B2a.echelon_form())
B1aR.subdivide(4,4)
B2aR.subdivide(4,4)
H1 = B1aR.subdivision(1,1)
H2 = B2aR.subdivision(1,1)
H1H2 = block_matrix([[H1],[H2]])
```

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

El espacio intersección en forma implícita sería

$$V_1 \cap V_2 = N \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Si le aplicamos las ecuaciones implícitas de la intersección que hemos obtenido a los vectores que queremos probar que son base de la intersección obtenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto prueba que el espacio generado por estos dos vectores está contenido en la intersección. Si demostramos por ejemplo que tienen la misma dimensión habríamos terminado. Los dos vectores que nos dan son claramente independientes porque las dos columnas tienen pivotes (podríamos reducir, pero se ve inmediatamente que ya tenemos los pivotes y sólo tendríamos que reducir con ellos hacia abajo). Para calcular la dimensión de la intersección volvemos a pasar a paramétricas la representación implícita que tenemos de la intersección

```

H1H2t = H1H2.T
H1H2ta = block_matrix([[H1H2t,1]])
H1H2taR = copy(H1H2ta.echelon_form())
H1H2taR.subdivide(4,4)

```

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

La base que nos sale al calcular las paramétricas es la que está a la derecha de los ceros y como vemos tiene efectivamente dos vectores (que por cierto son los mismos que tenemos en el otro caso). Esto prueba que las dimensiones son iguales y son el mismo espacio.

**Ejemplo 5.** Consideremos las siguientes matrices sobre el cuerpo de 5 elementos.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcula una base y la dimensión de  $C(B_1)$  y de  $C(B_2)$ . Demuestra que ambos subespacios son iguales.

```

B1R = B1.echelon_form()
B2R = B2.echelon_form()
B1B2 = block_matrix([[B1,B2]])
B1B2R = B1B2.echelon_form()

```

Para obtener las bases, reducimos las matrices  $B_1$  y  $B_2$ .

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la primera matriz vemos que nos salen pivotes los tres primeros por lo tanto una base del primer espacio sería

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

En la segunda matriz nos salen pivotes la primera, la segunda y la cuarta por lo tanto la base en este caso es

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Como las bases tienen 3 elementos, la dimensión es 3 en ambos casos.

Para comprobar el contenido lo podríamos hacerlo con las bases o con los conjuntos generadores, vamos a hacerlo en este caso con los conjuntos generadores y reducimos la matriz ampliada  $[B_1|B_2]$ .

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Esta reducción nos dice que todas las columnas de  $B_2$  se pueden generar usando las columnas de  $B_1$  (nos dan sistemas compatibles), por lo tanto  $C(B_2)$  está contenido en  $C(B_1)$  y como ambos espacios tienen la misma dimensión, deducimos que son iguales.

**Ejercicio 2.** Consideremos las matrices definidas sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}_5$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y los espacios vectoriales  $W_1 = N(H_1)$  y  $W_2 = N(H_2)$ . Vamos a construir una matriz por bloques que tenga en la parte izquierda  $H_1$  y  $H_2$  una encima de otra y en la parte derecha  $H_1$  y 0. Reduzcamos por filas y vamos a ver que las filas no nulas de la parte izquierda es la matriz que nos da la forma implícita de la intersección y las que están a la derecha de los ceros nos dan la forma implícita de la suma.

`M = block_matrix([[H1,H1],[H2,0]])`

`MR = M.echelon_form()`

$$\left[ \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 0 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Comprobar que

$$W_1 \cap W_2 = N \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$W_1 + W_2 = N \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

Solución:

## 3. MATRICES DE CAMBIO DE BASE

Supongamos que  $B$  y  $B'$  son bases de un mismo espacio vectorial  $V$ . La matriz de cambio de base  $P_{B'B}$  es una matriz que cumple que para todo vector  $v \in V$ , si escribimos  $v$  en las bases  $B$  y  $B'$  como  $v = x_B = x'_{B'}$ , entonces  $x = P_{B'B}x'$ . Esta matriz es según la teoría igual a  $AB'$  siendo  $A$  cualquier inversa por la izquierda de  $B$ . Vamos a ver una forma de calcularla directamente:

**Algoritmo:** Tomemos la matriz  $[B|B']$  y la reducimos por filas, nos aparecerá una matriz del tipo

$$\left[ \begin{array}{c|c} I & M \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

La matriz de cambio de base  $P_{B'B}$  es precisamente  $M$ .

*Demostración:*

Hacer operaciones elementales a una matriz ampliada es como hacerlas a las dos partes al mismo tiempo. Supongamos que  $P$  agrupa a las operaciones elementales que hemos hecho para obtener la reducida. Entonces tenemos que

$$PB = \left[ \begin{array}{c} I \\ 0 \end{array} \right]$$

$$PB' = \left[ \begin{array}{c} M \\ 0 \end{array} \right]$$

Si partimos  $P$  en la parte superior y la inferior

$$P = \left[ \begin{array}{c} A \\ H \end{array} \right]$$

Estas relaciones nos dicen que

$$AB = I, HB = 0, AB' = M, HB' = 0$$

Esto nos dice que  $A$  es una inversa por la izquierda de  $B$  y que  $M = AB' = P_{B'B}$  según lo visto en teoría. También nos dice que  $HB = HB' = 0$  lo cual es evidente porque  $H$  son las ecuaciones implícitas del espacio y tanto  $B$  como  $B'$  cumplen las ecuaciones por ser bases del espacio.

Veamos cómo se hace con un ejemplo:

**Ejemplo 6.** *Calcula la matriz de cambio de base  $P_{B'B}$  siendo*

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 11 \\ -2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

*matrices sobre el cuerpo de los números racionales.*

*Solución:*

```
BBp = block_matrix([[B,Bp]])
R = copy(BBp.echelon_form())
R.subdivide(3,3)
P = R.subdivision(0,1)
```

Tomamos la matriz ampliada  $[B, B']$  y la reducimos

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 2 & -3 & 4 & 11 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

La matriz de cambio de base  $P_{B'B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Este método también nos vale para ver de forma inmediata las matrices de cambio de base con la canónica. Si  $B$  es una base de  $K^n$  y  $C$  es la base canónica para sacar  $P_{BC}$  tendríamos que reducir la matriz  $[I|B]$  pero esta ya está reducida, por lo tanto  $P_{BC} = B$ . Para obtener  $P_{CB}$  tendríamos que reducir la matriz  $[B|I]$  y la que obtendríamos a la derecha es precisamente la inversa, es decir,  $P_{CB} = B^{-1}$ .

**Ejercicio 3.** Consideremos las siguientes bases de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{Z}_5$ .

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Demuestra que son bases de un mismo espacio vectorial y calcula las matrices de cambio de base  $P_{B_1B_2}$ ,  $P_{B_2B_3}$  y  $P_{B_1B_3}$ . Comprueba que

$$P_{B_2B_3}P_{B_1B_2} = P_{B_1B_3}.$$

*Solución:*

#### 4. MATRICES ASOCIADAS A APLICACIONES LINEALES Y DIAGRAMAS

Las matrices de las aplicaciones lineales en diferentes bases serán una parte clave en los próximos temas. Para indicar que un espacio vectorial se escribe en una base concreta vamos a poner como subíndice al espacio vectorial la base con la que estamos representando los vectores. Las bases canónicas las representaremos por la letra  $C$  que si es necesario completaremos con un subíndice indicando el tamaño. Las matrices de cambio de base no son más que las matrices asociadas a la aplicación lineal identidad con las bases distintas en los espacios de entrada y de llegada. La utilización de los diagramas nos permitirá calcular las matrices de las aplicaciones lineales en las bases que nos interese de forma casi automática.

**Ejemplo 7.** Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & -8 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Si  $B'$  y  $B$  son bases dadas por las matrices

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Calcula  $M_{B'B}(f)$ .

*Solución:*

```
Mf = matrix(QQ, [[1,2,3], [-3,-5,-8], [-1,-5,-6]])
B1=matrix(QQ, [[1,1,6], [-1,0,-2], [0,0,1]])
B=matrix(QQ, [[-2,7,3], [1,-4,-1], [0,0,1]])
```

Consideremos el siguiente diagrama:



$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 3 & 2 & -22 \\ 23 & 3 & 3 & -27 \\ 19 & 4 & 1 & -22 \\ -7 & -2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -897 & -104 & -130 & 1053 \\ -1587 & -184 & -230 & 1863 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 9.** Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$M_{C_2 B_1}(f) = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcula  $M_{C_2 B_2}(f)$  siendo  $B_1$  y  $B_2$  las bases dadas por las matrices

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

*Solución:*

```
MC2B1f = matrix(QQ, [[-2,-8],[2,9],[-1,-4],[-1,-1]])
B1=matrix(QQ, [[1,1,-2,-2],[1,2,-3,-4],[1,-1,1,5],[-4,-1,7,9]])
B2=matrix(QQ, [[1,2,-1,8],[0,1,-1,0],[0,5,-4,5],[0,5,-6,-4]])
```

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_C^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_{B_1}^4 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}_{B_2}^4 \\ & \searrow M_{CB_1}(f) & & \searrow M_{B_1 B_2}(id) & \\ & & & \searrow f & \\ & & & & M_{CB_2}(f) \end{array}$$

Si calculamos cada una de las matrices de esas aplicaciones tenemos que

- $M_{CB_1}(f)$  nos la dan.
- $M_{B_1 B_2}(id) = B_2^{-1} B_1$  porque  $B_2$  es cuadrada y su inversa por la izquierda es su inversa.

Entonces

$$\begin{aligned} M_{CB_2}(f) &= M_{B_1 B_2}(id) M_{CB_1}(f) = B_2^{-1} B_1 M_{CB_1}(f) = \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 371 & 1015 \\ 504 & 1370 \\ 495 & 1344 \\ -110 & -300 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.** Sea la aplicación  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$M_{B_1 C}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

