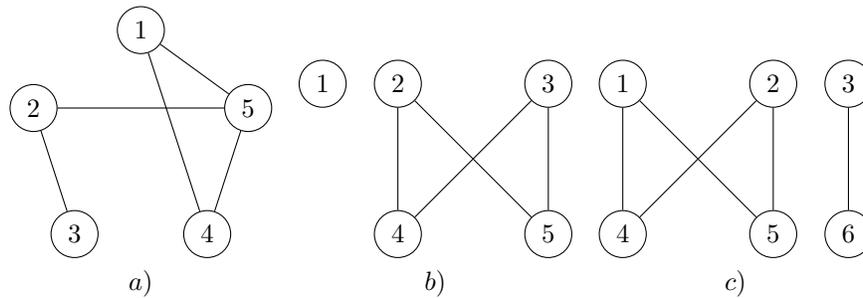
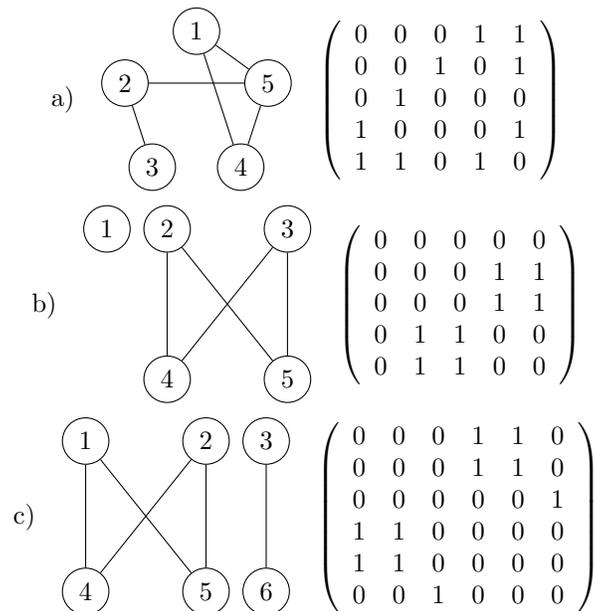


EJERCICIOS DE GRAFOS

Ejercicio 1. *Determina la matriz de adyacencia de cada uno de los siguientes grafos*



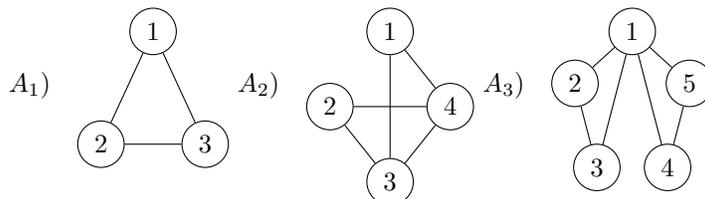
Solución.-



Ejercicio 2. *Obtener una representación gráfica de los grafos cuyas matrices de adyacencia son*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.-



Ejercicio 3. ¿Cuántas aristas tiene un grafo si sus vértices tienen los siguientes grados: 4, 3, 3, 2, 2 ? Representar gráficamente dicho grafo.

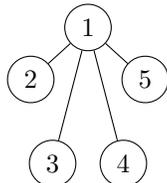
Solución.-

Por el lema del apretón de manos se tiene que

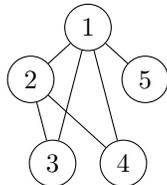
$$4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 2 \cdot |E|$$

Por tanto $|E| = 7$.

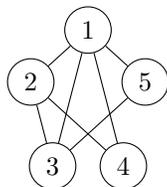
Representación gráfica: Comenzamos con el vértice de mayor grado 4, vértice 1, que estará conectado al resto



El vértice 2, de grado 3, puede ser cualquier de los vértices (excepto el vértice 1); lo conectamos con otros dos vértices.



Nos queda aún por elegir el último vértice de grado 3. Dicho vértice no puede ser el vértice 5 pues aumentaría los grados del resto de vértices. El vértice de grado 3 podría ser el vértice 3 que conectaríamos con el vértice 5, o bien el vértice 4 que conectaríamos también con el vértice 5. Una posible representación sería



Ejercicio 4. ¿ Pueden los 15 vértices de un grafo simple tener grado 5 ?

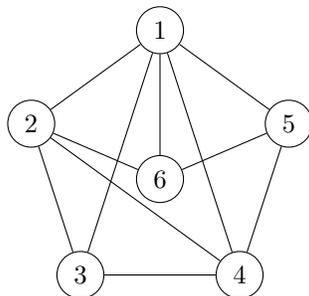
Solución.-

Como dicho grafo debe cumplir el lema del apretón de manos, entonces se tiene que cumplir que

$$\overbrace{5 + \dots + 5}^{15} = 5 \cdot 15 = 2 \cdot |E|$$

Dicha igualdad es un absurdo pues $5 \cdot 15$ no es un número par. El grafo no existe.

Ejercicio 5. Dado el siguiente grafo:



Obtener su matriz de adyacencia y determina su número de aristas a partir del lema del apretón de manos. ¿ Es un grafo conexo ?

Solución.-

La matriz de adyacencia del grafo sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si denotamos por $\delta(x)$ al grado del vértice x , por el lema del apretón de manos tenemos que:

$$\delta(1) + \delta(2) + \delta(3) + \delta(4) + \delta(5) + \delta(6) = 2|E|$$

es decir

$$5 + 4 + 3 + 4 + 3 + 3 = 22 = 2|E|$$

De donde $|E| = 11$. El grafo es conexo pues todos los vértices están conectados entre sí.

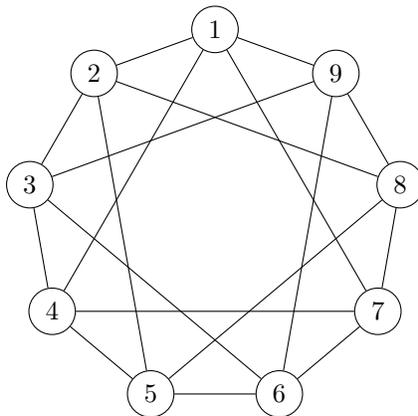
Ejercicio 6. El grafo definido por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿ es un grafo Euleriano?. En caso afirmativo, encuentra un ciclo euleriano.

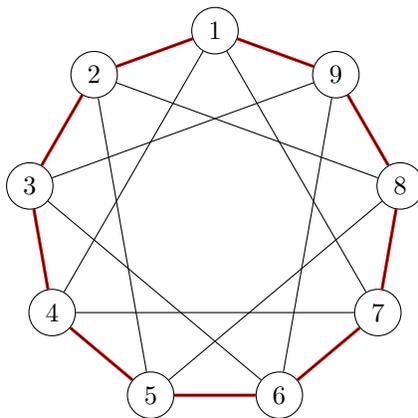
Solución.-

Una representación gráfica del grafo sería



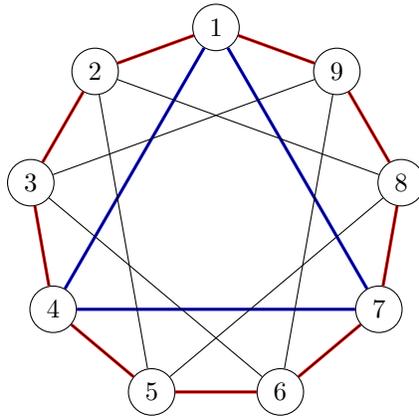
Todos los vértices del grafo son de grado par, por lo tanto es un grafo Euleriano.
 Para encontrar el circuito euleriano, empezamos por cualquier vértice y vamos recorriendo las aristas hasta que nos quedemos parados, necesariamente en el vértice de origen. Por ejemplo, hacemos el recorrido

$$(1) - (2) - (3) - (4) - (5) - (6) - (7) - (8) - (9) - (1).$$



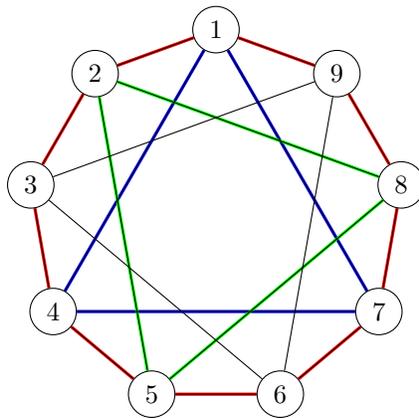
Partimos ahora de cualquier otro vértice que tenga aristas disponibles. Hacemos el recorrido

$$(1) - (4) - (7) - (1).$$



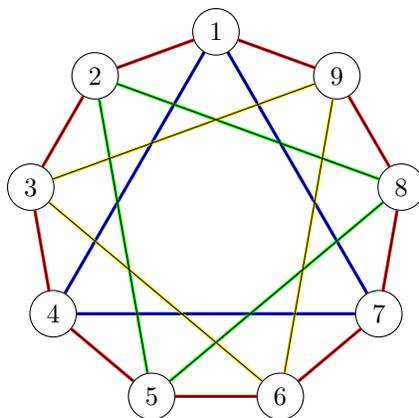
Análogamente hacemos el recorrido

$$(2) - (5) - (8) - (2)$$



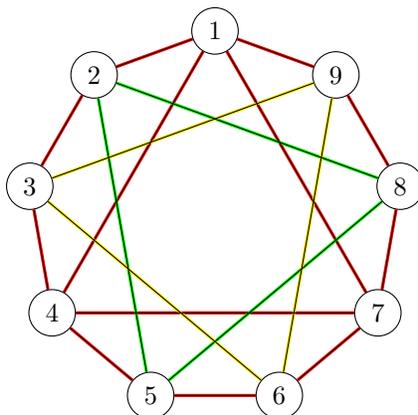
Por último hacemos el recorrido

$$(3) - (6) - (9) - (3)$$



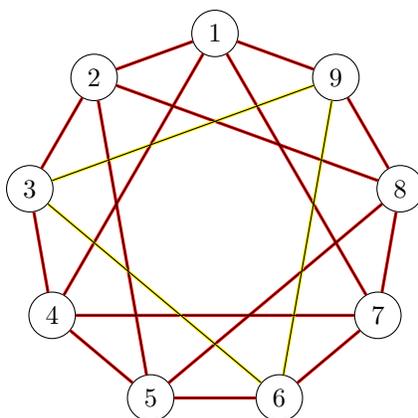
Para unir el circuito rojo con el azul utilizamos como inicio el vértice común 1, obtenemos

(1) – (2) – (3) – (4) – (5) – (6) – (7) – (8) – (9) – (1) – (4) – (7) – (1)



Seguidamente pegaríamos la parte verde con la roja en el vértice común 2, obteniendo

(1) – (2) – (5) – (8) – (2) – (3) – (4) – (5) – (6) – (7) – (8) – (9) – (1) – (4) – (7) – (1)



Por último pegamos la parte amarilla con la parte roja en cualquiera de los vértices comunes, por ejemplo el 3.

El resultado final es

(1) – (2) – (5) – (8) – (2) – (3) – (6) – (9) – (3) –

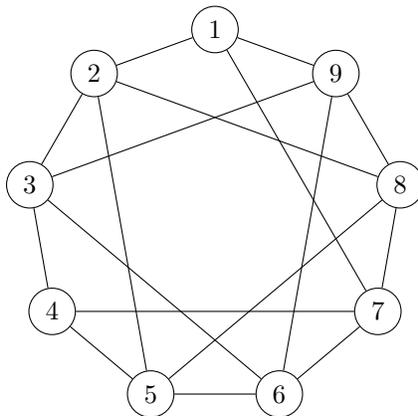
(4) – (5) – (6) – (7) – (8) – (9) – (1) – (4) – (7) – (1)

Ejercicio 7. El grafo definido por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿es Euleriano?. Razona la respuesta. ¿Existe un camino abierto euleriano?. En caso afirmativo, encuentra dicho camino.

Solución.- Una representación gráfica del grafo podría ser



El grafo no es un grafo Euleriano pues no todos los vértices son de grado par. De hecho los vértices 1 y 4 tienen grado 3.

Existe por tanto un camino abierto euleriano. Para encontrar dicho camino, conectaremos los vértices 1 y 4 con una arista 'ficticia'. Dicho grafo, ahora sí, sería un grafo Euleriano.

Un circuito euleriano, este grafo sería el mismo del ejercicio anterior, es

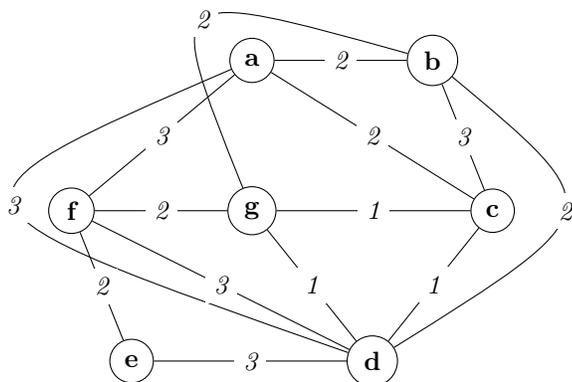
$$(1) - (2) - (5) - (8) - (2) - (3) - (6) - (9) - (3) -$$

$$(4) - (5) - (6) - (7) - (8) - (9) - (1) - (4) - (7) - (1)$$

Eliminando la arista ficticia, se obtiene el siguiente camino euleriano

$$(4) - (7) - (1) - (2) - (5) - (8) - (2) - (3) - (6) - (9) - (3) - (4) - (5) - (6) - (7) - (8) - (9) - (1)$$

Ejercicio 8. Dado el grafo ponderado



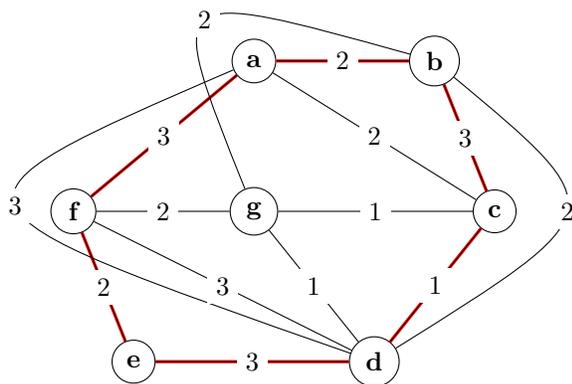
Se pide

- Es un grafo Euleriano? ¿Existe un camino Euleriano? Razona la respuesta y obtén o un circuito o un camino abierto Euleriano.
- Determina un árbol generador de peso mínimo usando el Algoritmo de Prim, comenzando por el vértice **c**.

Solución.-

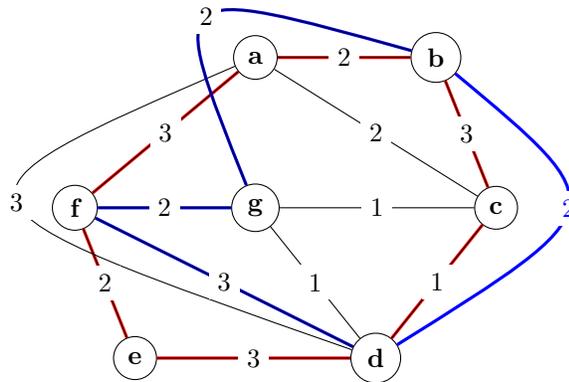
- Todos los vértices del grafo son de grado par, por tanto el grafo es un grafo Euleriano. Para encontrar el circuito euleriano empezamos por un vértice cualquiera y vamos recorriendo aristas hasta llegar a ese vértice de inicio. Por ejemplo hacemos el siguiente recorrido

$$(a) - (b) - (c) - (d) - (e) - (f) - (a)$$



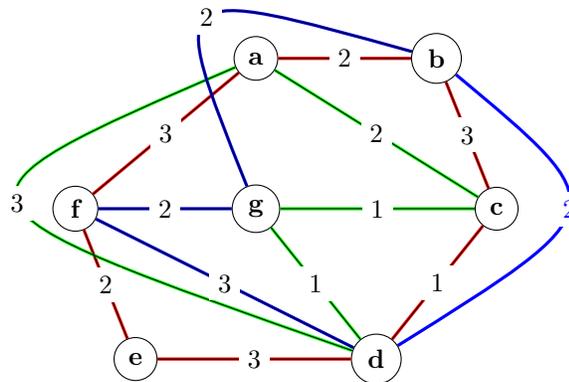
Partimos de otro vértice que tenga aristas disponibles. Hacemos el recorrido

$$(b) - (d) - (f) - (g) - (b)$$



Aún quedan aristas disponibles, partimos de otro vértice que las tenga. Hacemos el recorrido

$$(a) - (c) - (g) - (d) - (a)$$



Unimos los circuitos rojo y azul a través del vértice común b

$$(b) - (c) - (d) - (e) - (f) - (a) - (b) - (d) - (f) - (g) - (b)$$

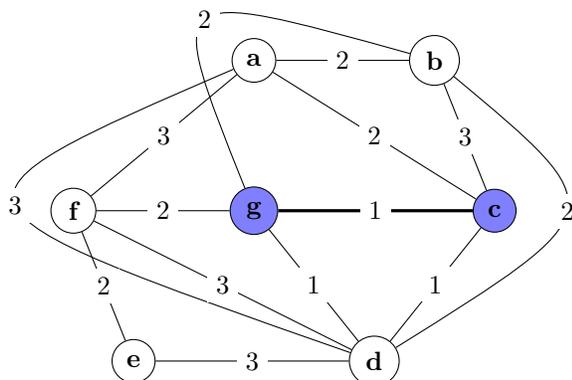
Unimos este circuito con el circuito verde a través del vértice común a

$$(b) - (c) - (d) - (e) - (f) - (a) - (c) - (g) - (d) - (a) - (b) - (d) - (f) - (g) - (b)$$

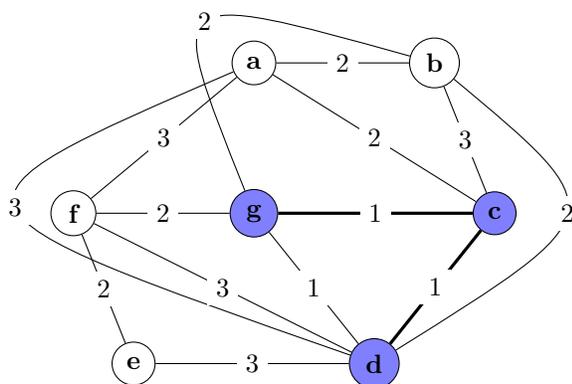
El circuito Euleriano es

$$(b) - (c) - (d) - (e) - (f) - (a) - (c) - (g) - (d) - (a) - (b) - (d) - (f) - (g) - (b)$$

- b) Comenzamos el algoritmo de Prim pintando el vértice de partida, c , de color azul. Para salir de la zona azul tenemos dos opciones, las dos de coste 1. Elegimos cualquiera de ellas, por ejemplo la arista que nos llevará al vértice g .

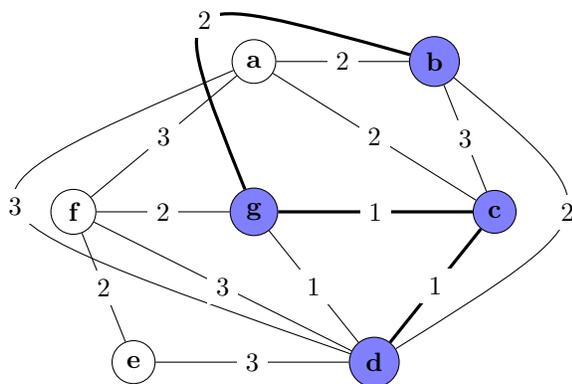


Para salir de la zona marcada en azul, podemos utilizar las aristas ambas de coste 1, que nos une al vértice d o bien desde el vértice g o bien del c . Elegimos desde el vértice c

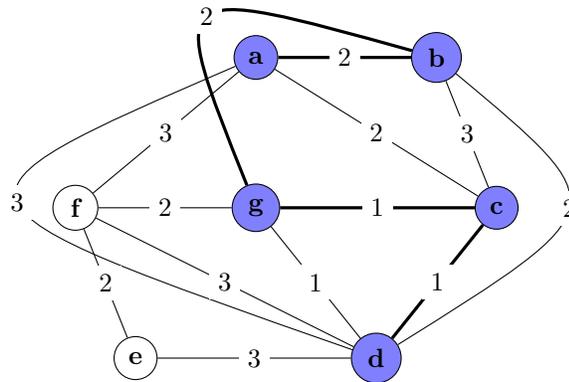


La arista entre g y d no la utilizamos pues formaríamos un ciclo.

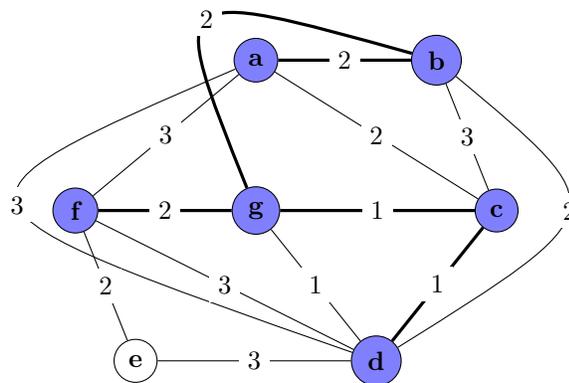
Para salir de la zona azul tenemos varias aristas de igual peso 2, elegimos la que une g con b



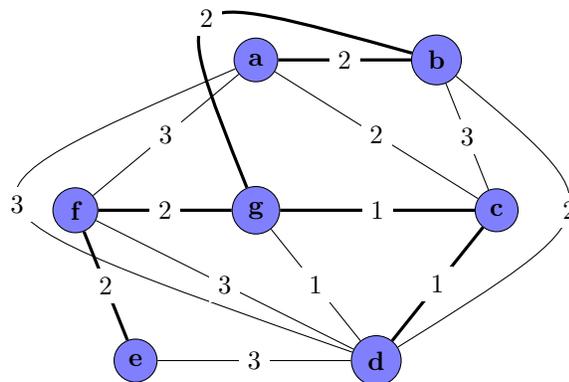
Elegimos seguidamente la arista de coste 2 que nos lleva desde b al vértice a



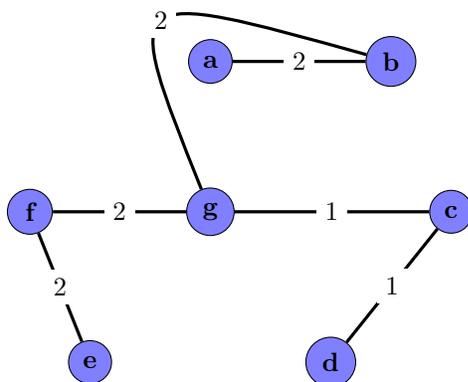
Seguidamente vamos al vértice f a través de g



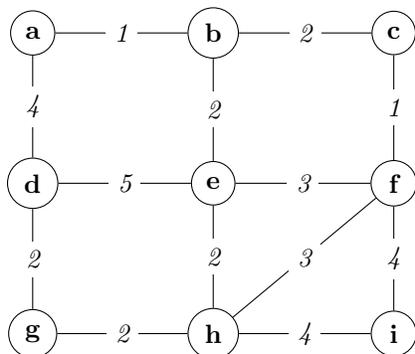
Ahora vamos al vértice e a través del vértice f , con arista de peso 2



Hemos unido todos los vértices con un árbol generador minimal



Ejercicio 9. *Dado el grafo ponderado*



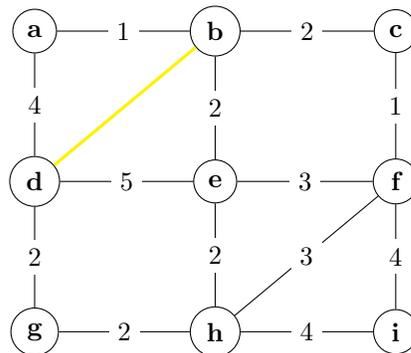
Se pide

- Es un grafo Euleriano ? ¿Existe un camino Euleriano ? Razona la respuesta y obtén o un circuito o un camino abierto Euleriano.*
- Determina un árbol generador de peso mínimo usando el Algoritmo de Kruskal.*

Solución.-

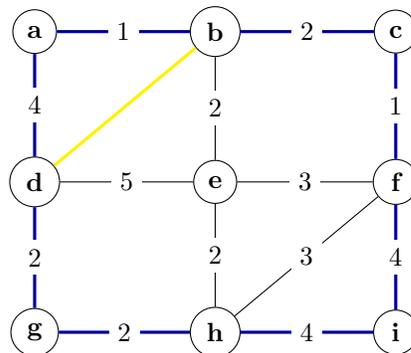
- El grafo no es un grafo Euleriano pues no todos los vértices son de grado par. De hecho los vértices b y d tienen grado 3.

Existe por tanto un camino abierto euleriano. Para encontrar dicho camino, conectaremos los vértices b y d con una arista 'ficticia', convirtiendo al nuevo grafo en un grafo Euleriano



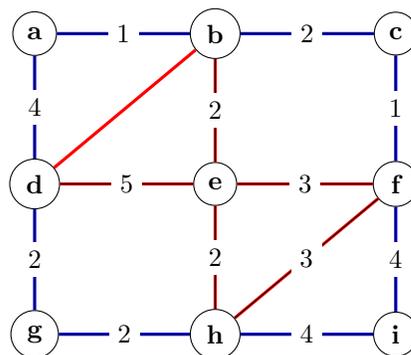
Para encontrar el circuito euleriano empezamos por un vértice cualquiera y vamos recorriendo aristas hasta llegar a ese vértice de inicio. Por ejemplo hacemos el siguiente recorrido

$$(a) - (b) - (c) - (f) - (i) - (h) - (g) - (d) - (a)$$



Partimos de otro vértice que tenga aristas disponibles. Hacemos el recorrido

$$(b) - (d) - (e) - (f) - (h) - (e) - (b)$$



Unimos los circuitos en el vértice común b

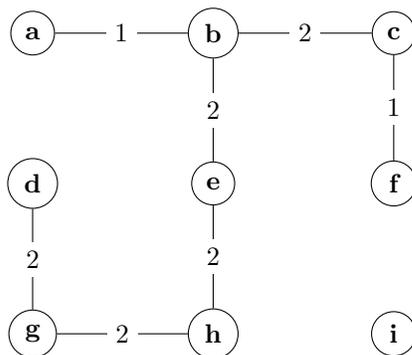
$$(a) - (b) - (d) - (e) - (f) - (h) - (e) - (b) - (c) - (f) - (i) - (h) - (g) - (d) - (a)$$

Eliminando la arista ficticia, obtenemos el camino abierto euleriano

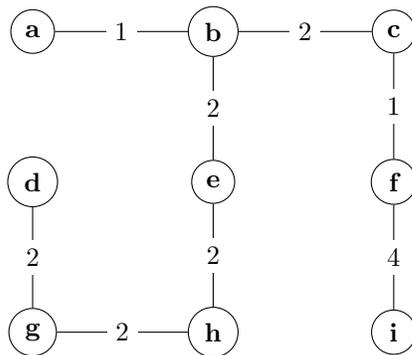
$(d) - (e) - (f) - (h) - (e) - (b) - (c) - (f) - (i) - (h) - (g) - (d) - (a) - (b)$

b) Ordenamos las aristas de menor a mayor peso.

- (1) Peso 1 : ab y cf .
- (2) Peso 2 : bc , be , dg , eh y gh .
- (3) Peso 3 : ef y fh .
- (4) Peso 4 : ad , fi y hi .
- (5) Peso 5 : de .

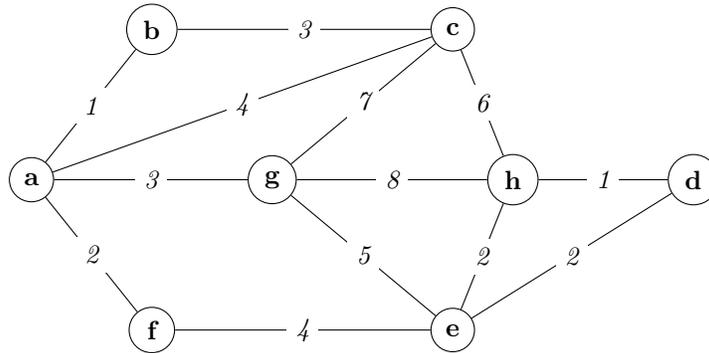


Ponemos todas las aristas de menor a mayor peso, conectando el mayor número de vértices sin crear ciclos. Nos queda por conectar el vértice i , o bien a través del vértice h o a través del vértice f (ambos de peso 4).



Todos los vértices están conectados, el algoritmo ha terminado.

Ejercicio 10. Dado el grafo ponderado



Se pide

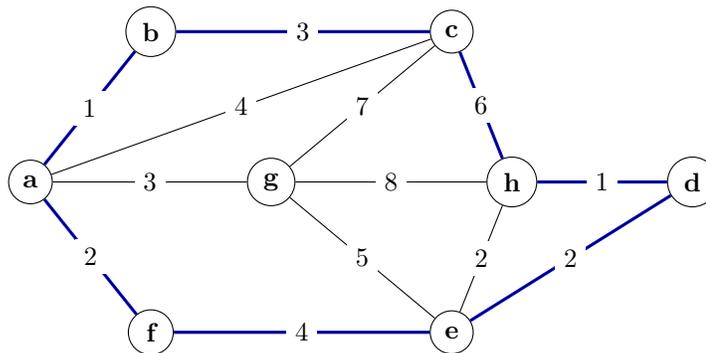
- Es un grafo Euleriano? ¿Existe un camino Euleriano? Razona la respuesta y obtén o un circuito o un camino abierto Euleriano.
- Determina un árbol generador de peso mínimo usando el Algoritmo de Prim comenzando por el vértice **d**.

Solución.-

- Todos los vértices del grafo son de grado par, por lo tanto es un grafo Euleriano.

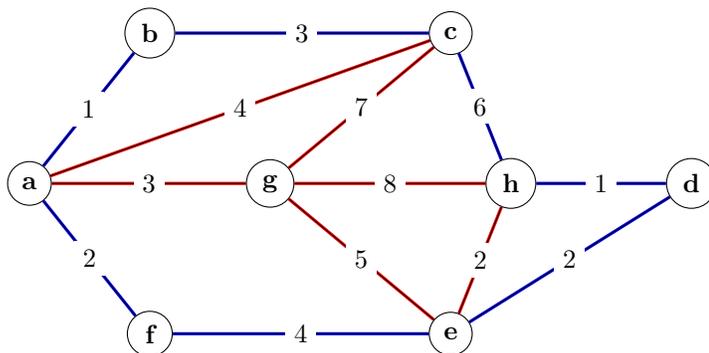
Para encontrar el circuito euleriano, empezamos por cualquier vértice y vamos recorriendo las aristas hasta que nos quedemos parados, necesariamente en el vértice de origen. Por ejemplo, hacemos el recorrido

$$(a) - (b) - (c) - (h) - (d) - (e) - (f) - (a).$$



A partir del vértice *a* hacemos el recorrido

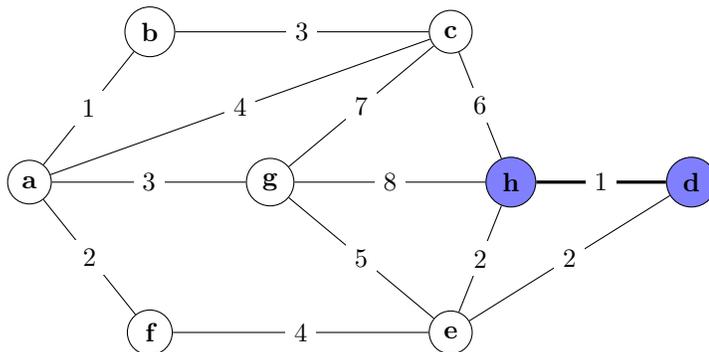
$$(a) - (c) - (g) - (h) - (e) - (g) - (a).$$



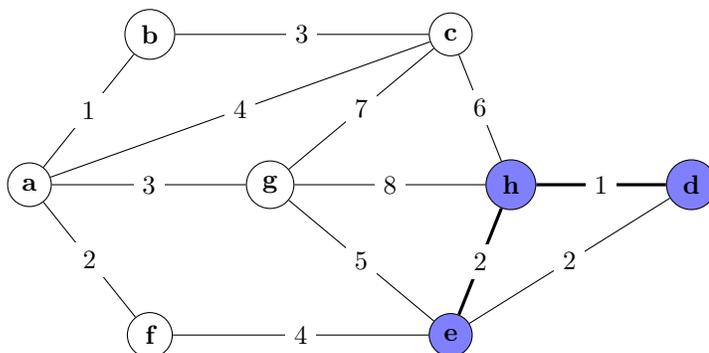
Unimos ambos circuitos en el vértice común a , obteniendo el siguiente circuito euleriano:

$(a) - (b) - (c) - (h) - (d) - (e) - (f) - (a) - (c) - (g) - (h) - (e) - (g) - (a)$.

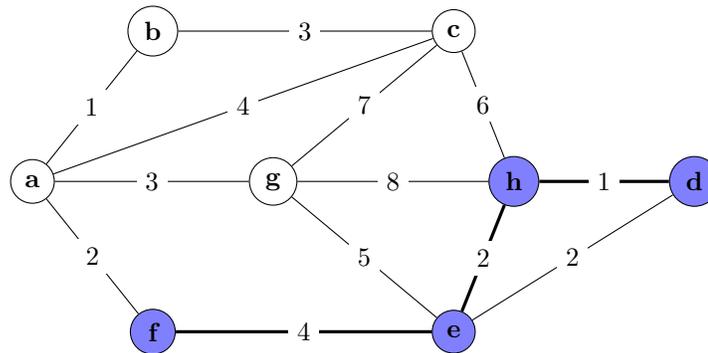
- b) Comenzamos el algoritmo de Prim pintando el vértice de partida, d , de color azul. Para salir de la zona azul salimos al vértice con la arista de coste mínimo 1.



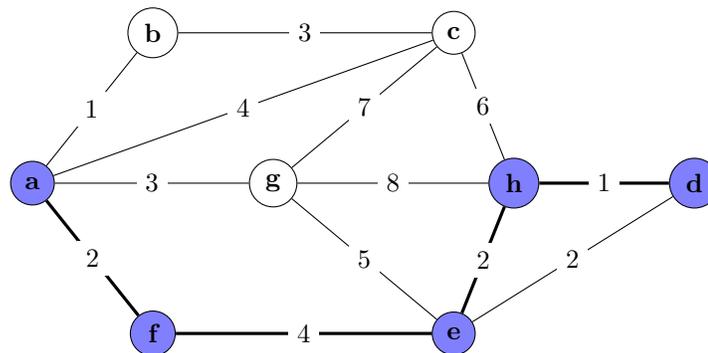
Seguidamente tenemos dos opciones, las aristas he o de ambas de coste 2. Elegimos la arista he



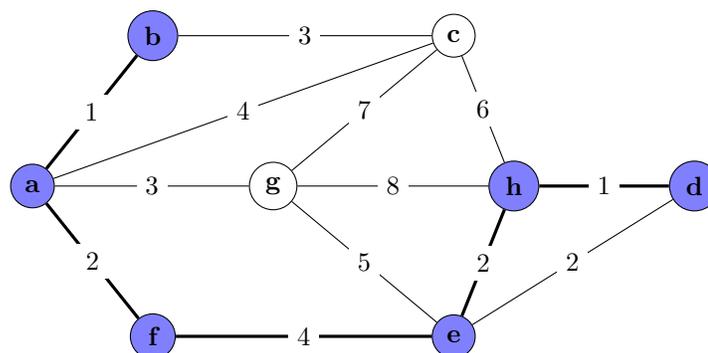
De esta zona azul se sale al vértice f con arista de peso 4



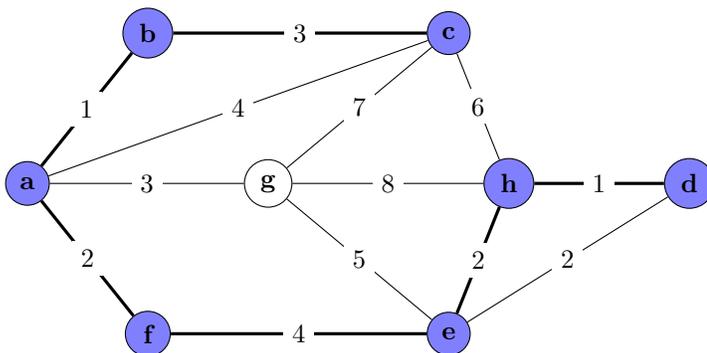
Vamos al vértice a con coste 2



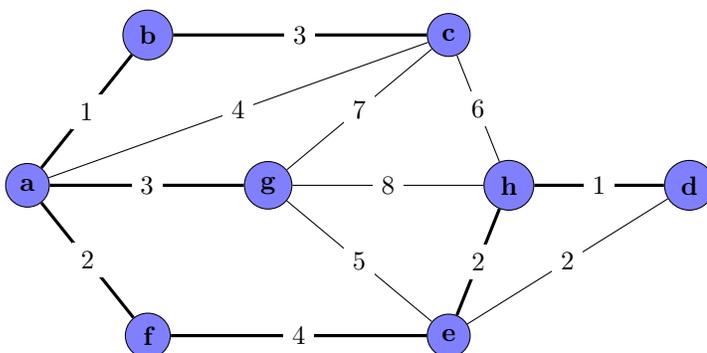
Seguidamente al vértice b con coste 1



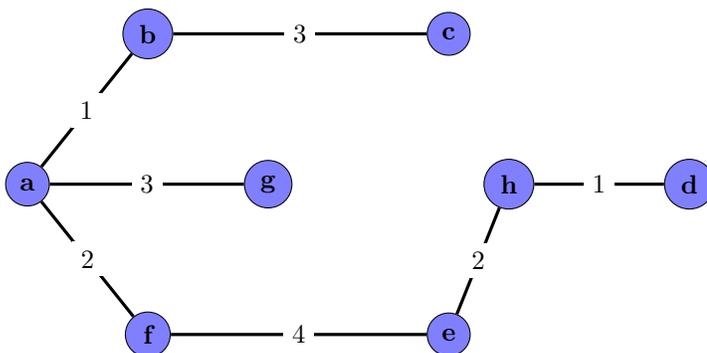
Para salir de la zona azul se tiene dos posibilidades, la arista ag o la arista bc ambas de coste 2. Elegimos la bc



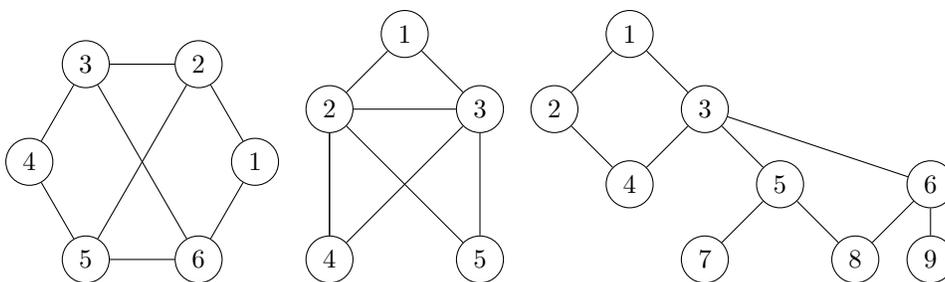
Por último salimos al vértice g con arista de peso 3



Hemos unido todos los vértices con un árbol generador minimal

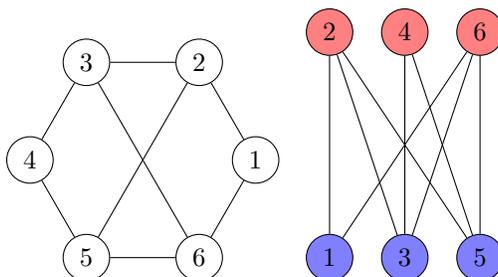


Ejercicio 11. Para los siguientes grafos

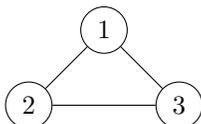


dí si son bicolorables. Si no lo son, justifica la respuesta. Caso de serlo, dibuja el grafo como grafo bipartido

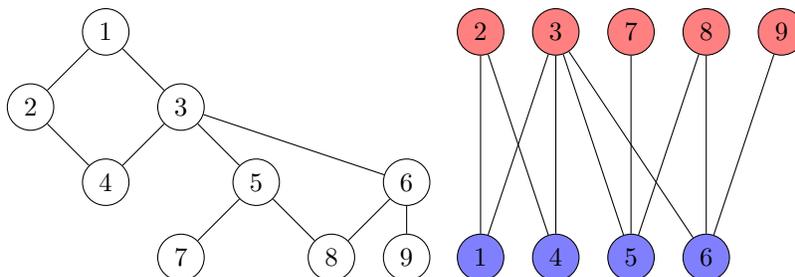
Solución.- El primero de los grafos es bicolorable pues no tiene ciclos de longitud impar. Una representación bipartita de él sería:



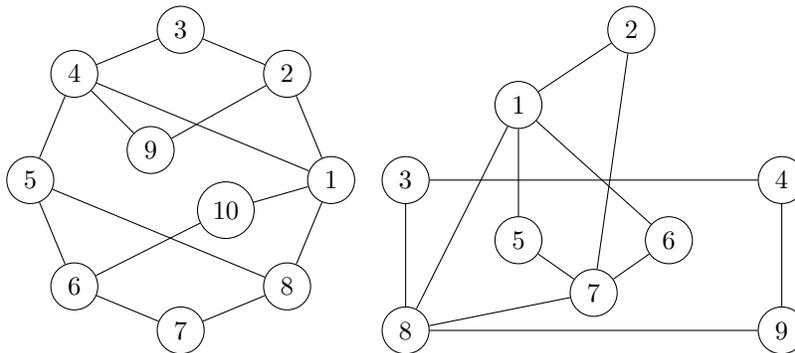
El segundo de los grafos no es bicolorable pues tiene un ciclo de longitud 3, impar, K_3 .



El tercer grafo sí es bicolorable por no tener ciclos de longitud impar. Una representación bipartita sería

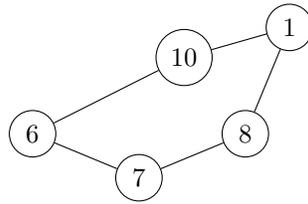


Ejercicio 12. Para los siguientes grafos

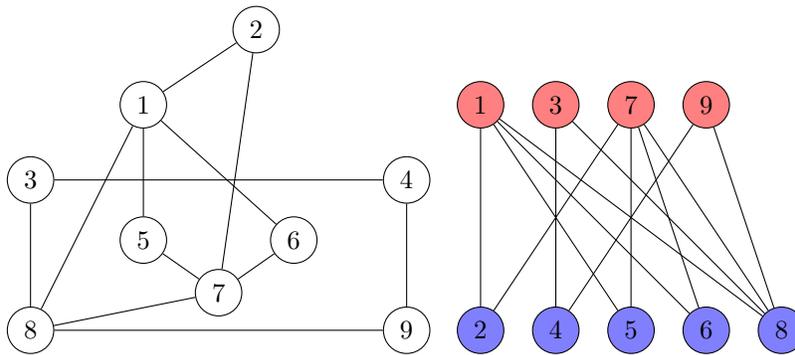


explica si son bicolorables y, caso de serlo dibújalos como grafo bipartito y encuentra si es posible un emparejamiento.

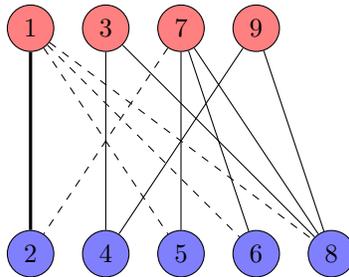
Solución.- El primero de los grafos no es bicolorable pues tiene ciclos de longitud impar. Por ejemplo, el ciclo de longitud 5



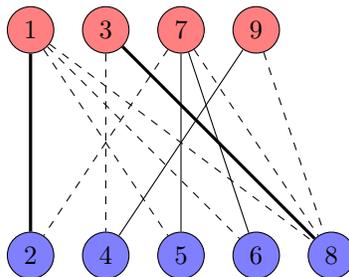
El segundo grafo sí es bicolorable por no tener ciclos de longitud impar. Una representación bipartita sería



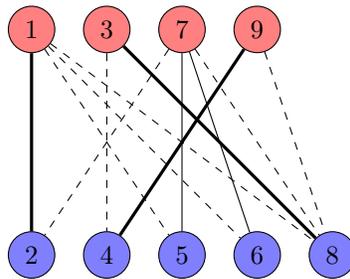
Comenzamos emparejando, por ejemplo el vértice 1 con el 2



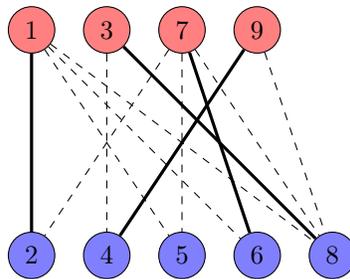
El vértice 3 lo emparejamos con el 8



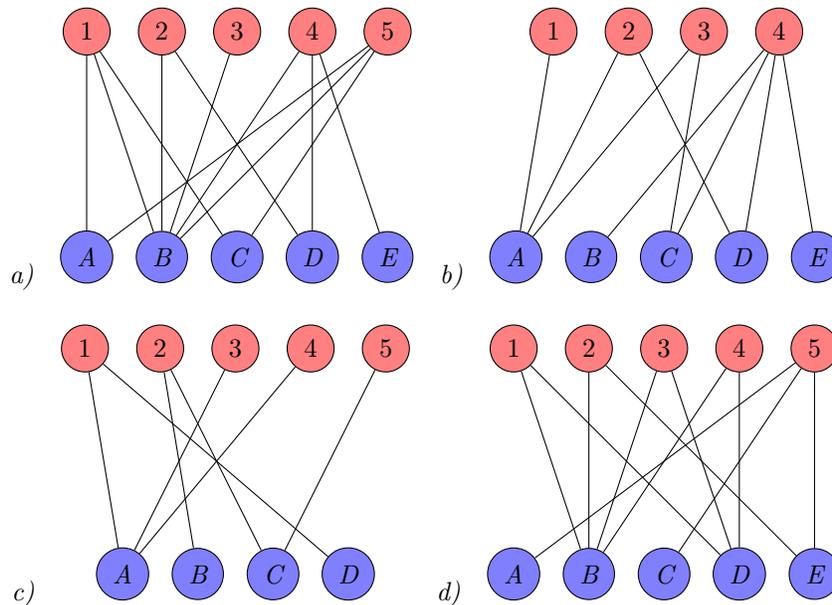
El vértice 9 se emparejaría con el vértice 4



Por último el vértice 7 puede emparejarse o con el vértice 5 o el 6. Lo emparejamos con el 6

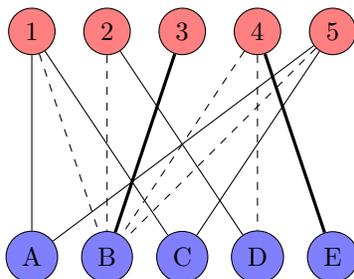


Ejercicio 13. Para cada uno de los siguientes grafos bipartidos,

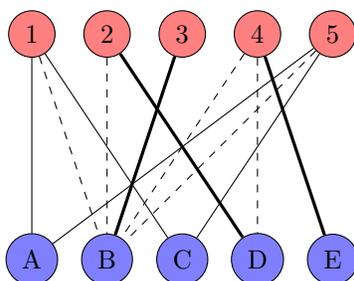


indica si puede encontrarse un emparejamiento. Caso de no poderse, justifica por qué. Si es posible realizarlo, encuentra todos los emparejamientos del grafo

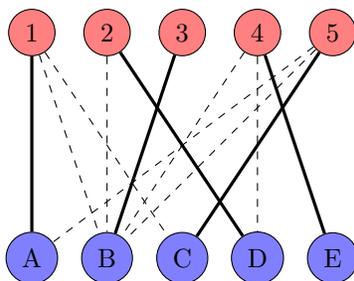
Solución.- En el grafo a) la única elección posible para 3 es B y para E es 4



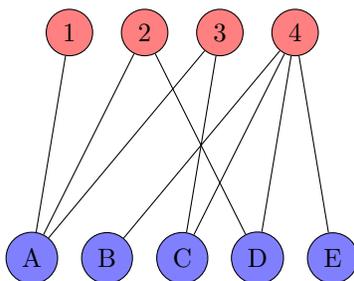
La única elección para el vértice 2 es D



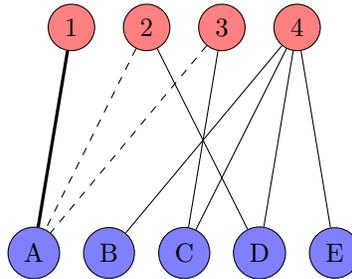
Completamos la elección dando posibles valores a 1 y 5



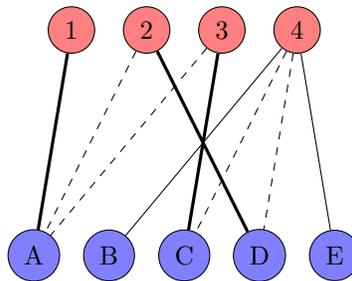
En el grafo b)



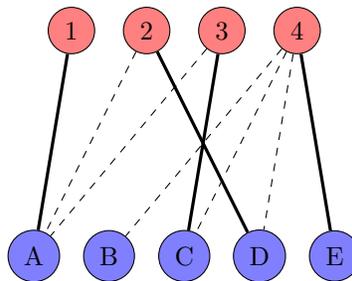
La única elección para el vértice 1 es A



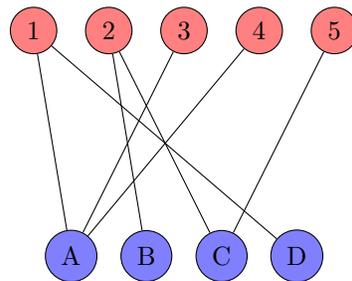
Los vértices 2 y 3 se emparejan con D y C respectivamente



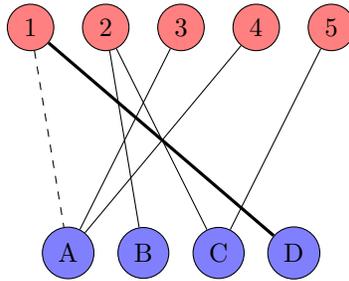
Por último el vértice 4 puede emparejarse con B o E . Lo emparejamos con E



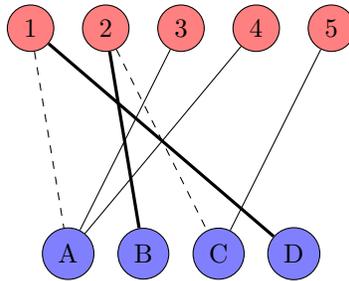
En el grafo c)



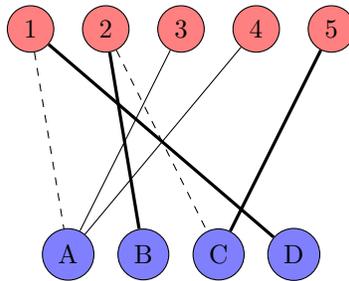
La única elección para D es 1



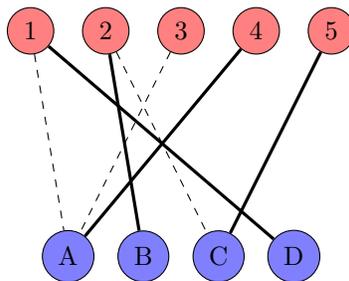
Para B es 2



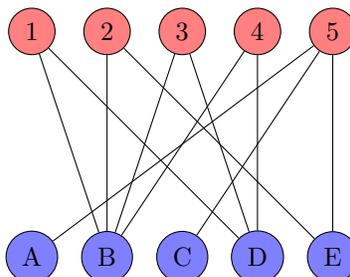
Para C es 5



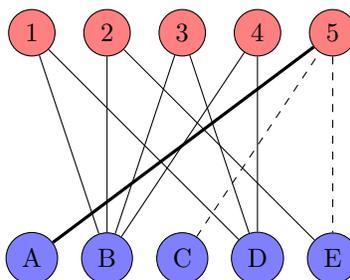
Por último para A tenemos la opción 3 o 4. Elegimos la 4



En el grafo d)



La única elección para A es 5



Vemos que no existe emparejamiento pues el vértice C se queda sin elección posible.

Ejercicio 14. Los departamentos: A, B, C, D, E y F de una cierta empresa tienen a las siguientes personas

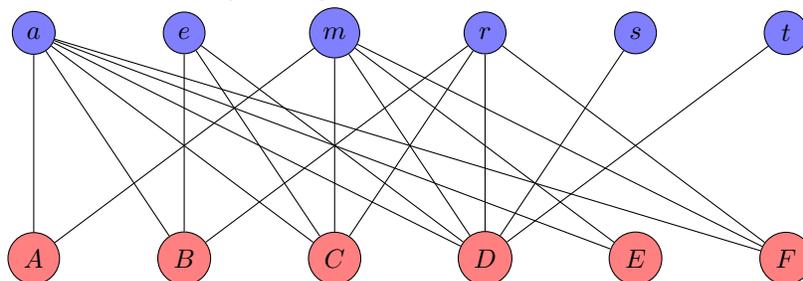
$$A = \{a, m\} \quad B = \{a, e, r\} \quad C = \{a, e, m, r\}$$

$$D = \{a, e, m, r, s, t\} \quad E = \{e, m\} \quad F = \{a, m, r\}$$

como posibles candidatos a secretarios.

Determinar si es posible un emparejamiento que satisfaga a todos los departamentos de la empresa.

Solución.- La forma en que los candidatos pueden ser secretarios de los distintos departamentos la da el siguiente grafo bipartito



No existe un emparejamiento, pues los vértices s y t , azules, únicamente se pueden emparejar con el vértice D , rojo. Así pues, o bien el s o bien el t se quedarían sin emparejar.