

PRÁCTICA DE GIROS EN EL PLANO

AMD 2023-24

Matriz de Giro

A lo largo de esta práctica se deberán girar puntos del plano. Pueden darse dos casos:

- Si el giro se hace alrededor del origen de coordenadas, simplemente hay que elegir el punto que se quiere girar (por ejemplo uno de las puntas de una estrella) y usar la matriz

$$G = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

donde β es el ángulo expresado en radianes. La razón de porqué esta es la matriz de un giro se dará en la clase de teoría.

- Si el giro se hace alrededor de otro punto que no es el origen, calculamos todos los puntos como si girásemos alrededor del origen y luego trasladamos el resultado sobre el punto que sea necesario.

Novedades sagetex

En esta práctica aparece un nuevo entorno distinto de `sageblock` que es `sagesub`. En este entorno podemos meter los resultados calculados previamente en un `sageblock` usando el comando `!{P}` donde P es el resultado que queremos introducir. La diferencia con el sistema anterior es que `!{P}` introduce el valor de P no en formato latex si no con sus valores concretos de forma que se pueden usar como coordenadas para posicionar elementos de un dibujo.

Otra novedad que nos aparecerá en los dibujos es el uso de `coordinate` cuando queramos definir un punto en un dibujo pero no queremos que en ese vértice aparezca ningún texto. También veremos que en ese caso se pueden poner directamente los valores para dibujar líneas, es decir, podemos escribir directamente

```
\draw (0,0) -- (0,1) -- (1,0);
```

para trazar líneas entre estos puntos sin necesidad de darles nombre.

Un último detalle en esta práctica es el uso de vectores en `sage`. Para nosotros los vectores son simplemente matrices columna, pero para algunas funciones de `sage` con vectores es necesario convertirlos en vectores. Para definir un vector simplemente hay que poner

```
v = vector(RR, [-1,2])
```

Esto nos define v como un vector sobre los números reales con dos componentes que si le decimos que nos las muestre nos las pondrá como `(-1.000,2.000)` en horizontal (lo cual necesitamos para indicar las coordenadas de un punto en un dibujo), aunque esté en horizontal, puede operar perfectamente con matrices $G*v$ como si fuera un vector columna. Si no especificamos que sea sobre los números reales podrían aparecer expresiones del tipo $\sqrt{2}$ o fracciones del tipo $-3/5$ que podrían ser un problema a la hora de trasladar a un dibujo. En esta práctica deberemos tomar matrices y vectores sobre los números reales aunque nos salgan con muchos decimales.

Ejercicio 1. *Dibuja una estrella regular de 5 puntas con centro en el origen de coordenadas y uno de sus vértices en el punto $(0,1)$.*

Solución:

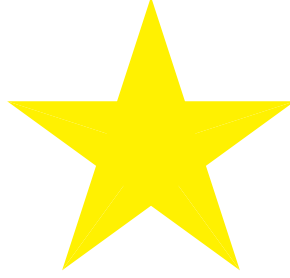
Definimos el ángulo β como la quinta parte de la circunferencia y hacemos la matriz de giro usando dicho ángulo.

```
beta = 2*pi/5
G = matrix(RR, [[cos(beta), -sin(beta)],
                [sin(beta), cos(beta)]])
```

Definimos los vértices de la estrella girando cinco veces el punto $(0,1)$ que el primer vértice.

```
V = [G^i*vector([0,1]) for i in range(5)]
```

Para dibujar el polígono usando el punto central, notemos que la estrella tiene que dibujarse uniendo el vértice V_i con el V_{i+2} para todo i . Si unimos estos dos vértices con el origen de coordenadas vamos formando los triángulos $\triangle V_0OV_2$, $\triangle V_1OV_3$, $\triangle V_2OV_4$, $\triangle V_3OV_0$ y $\triangle V_0OV_2$. Pintamos todos estos triángulos de color amarillo.



Una forma alternativa de hacer esto en un solo comando sería hacer el polígono de un solo trazo



Ejercicio 2. El objetivo de este ejercicio es dibujar la bandera de la Unión Europea. Para ello pinta 12 estrellas iguales de color amarillo con centros sobre un círculo de radio 6. Cada una de las estrellas debe tener cinco puntas distribuidas de forma equidistante sobre un círculo de radio 1. Una de las puntas de cada estrella debe estar hacia arriba. Este dibujo estará en el centro de un rectángulo de color azul y de altura 18 y anchura 27.

Solución:

Comenzamos calculando los vértices de una estrella centrada en el origen:

```
a = 2*pi/5
G1 = matrix(RR,[[cos(a),-sin(a)],
               [sin(a), cos(a)]])
V = [G1^i*vector([0,1]) for i in range(5)]
```

Ahora calculamos los centros de cada estrella

```
b = 2*pi/12
G2 = matrix(RR,[[cos(b),-sin(b)],
               [sin(b), cos(b)]])
C = [G2^i*vector([0,6]) for i in range(12)]
```

Para dibujar el fondo, como es un rectángulo, hacemos un único polígono

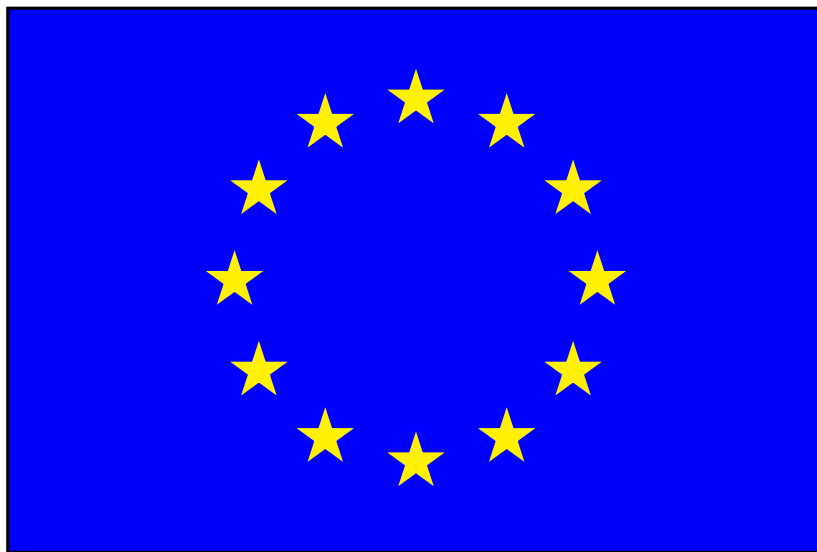
```
ancho = 27
alto = 18
Fondo = [vector([ancho/2,alto/2]),vector([-ancho/2,alto/2]),
          vector([-ancho/2,-alto/2]),vector([ancho/2,-alto/2])]

\begin{tikzpicture}[x = 0.4cm, y = 0.4cm]
\fill[color = blue] !{Fondo[0]} -- !{Fondo[1]} -- !{Fondo[2]} -- !{Fondo[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[0]+V[0]} -- !{C[0]+V[2]} -- !{C[0]+V[4]} -- !{C[0]+V[1]} -- !{C[0]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[1]+V[0]} -- !{C[1]+V[2]} -- !{C[1]+V[4]} -- !{C[1]+V[1]} -- !{C[1]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[2]+V[0]} -- !{C[2]+V[2]} -- !{C[2]+V[4]} -- !{C[2]+V[1]} -- !{C[2]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[3]+V[0]} -- !{C[3]+V[2]} -- !{C[3]+V[4]} -- !{C[3]+V[1]} -- !{C[3]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[4]+V[0]} -- !{C[4]+V[2]} -- !{C[4]+V[4]} -- !{C[4]+V[1]} -- !{C[4]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[5]+V[0]} -- !{C[5]+V[2]} -- !{C[5]+V[4]} -- !{C[5]+V[1]} -- !{C[5]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[6]+V[0]} -- !{C[6]+V[2]} -- !{C[6]+V[4]} -- !{C[6]+V[1]} -- !{C[6]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[7]+V[0]} -- !{C[7]+V[2]} -- !{C[7]+V[4]} -- !{C[7]+V[1]} -- !{C[7]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[8]+V[0]} -- !{C[8]+V[2]} -- !{C[8]+V[4]} -- !{C[8]+V[1]} -- !{C[8]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[9]+V[0]} -- !{C[9]+V[2]} -- !{C[9]+V[4]} -- !{C[9]+V[1]} -- !{C[9]+V[3]} -- cycle;
```

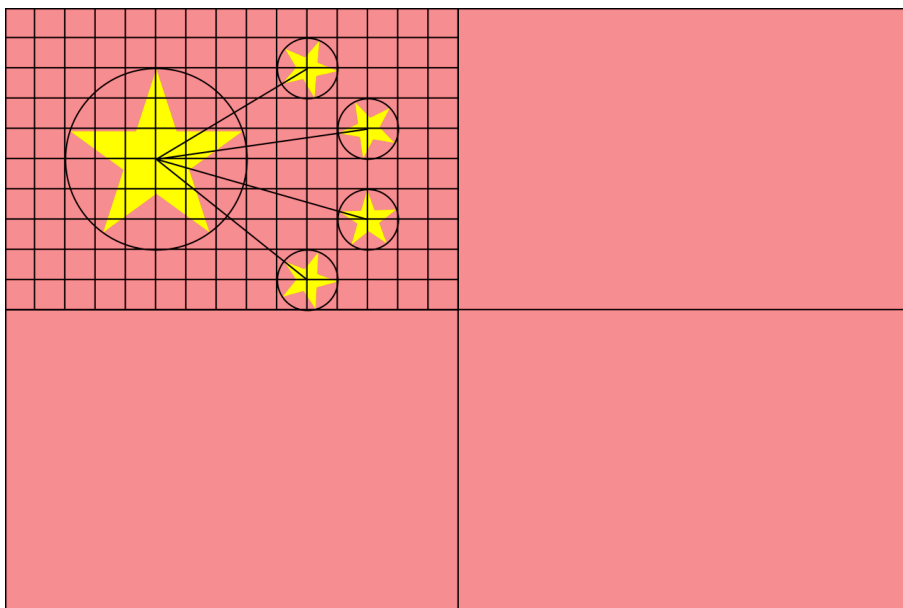
```

\fill[color = yellow] !{C[10]+V[0]} -- !{C[10]+V[2]} -- !{C[10]+V[4]} -- !{C[10]+V[1]} -- !{C[10]+V[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{C[11]+V[0]} -- !{C[11]+V[2]} -- !{C[11]+V[4]} -- !{C[11]+V[1]} -- !{C[11]+V[3]} -- cycle;
\draw[very thick] !{Fondo[0]} -- !{Fondo[1]} -- !{Fondo[2]} -- !{Fondo[3]} -- cycle;
\end{tikzpicture}

```



Ejercicio 3. *Dibuja la bandera de la República Popular de China siguiendo las especificaciones que se indican:*



(Fuente:

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=636646>)

Solución:

Adoptaremos como unidad el cuadrado pequeño que aparece en la figura. La anchura de la bandera total es de 30 y la altura de 20. Si ponemos el centro de la bandera en el origen de coordenadas, vamos a establecer los centros de cada una de las estrellas pequeñas utilizando el dibujo:

```

e = vector(RR, [-10, 5])
c0 = vector(RR, [-5, 1])
c1 = vector(RR, [-3, 3])
c2 = vector(RR, [-3, 6])
c3 = vector(RR, [-5, 8])

```

Hacemos la matriz de giro de ángulo $2\pi/5$ y giramos el vector $(0,3)$ cinco veces para sacar los vértices de la estrella grande que luego colocamos sobre su centro

```
a = 2*pi/5
G = matrix(RR,[[cos(a),-sin(a)],
               [sin(a), cos(a)]])
E = [e+G^i*vector([0,3]) for i in range(5)]
```

Para cada una de las estrellas pequeñas, debemos fijarnos que en todas ellas una de sus puntas está en la dirección del centro de la estrella grande. Para conseguir eso tomaremos el vector que une el centro de cada estrella con el centro de la estrella grande y lo dividiremos por su norma para conseguir que tenga radio 1. A estos vértices los llamaremos u_i y los usaremos para girarlos 5 veces y así calcular los otros vértices:

```
v0 = e-c0 # Extremo menos origen
u0 = v0/RR(norm(v0)) # Normalizamos dividiendo por la norma
P0 = [c0+G^i*u0 for i in range(5)] # puntas de la estrella 0

v1 = e-c1 # Extremo menos origen
u1 = v1/RR(norm(v1)) # Normalizamos dividiendo por la norma
P1 = [c1+G^i*u1 for i in range(5)] # puntas de la estrella 1

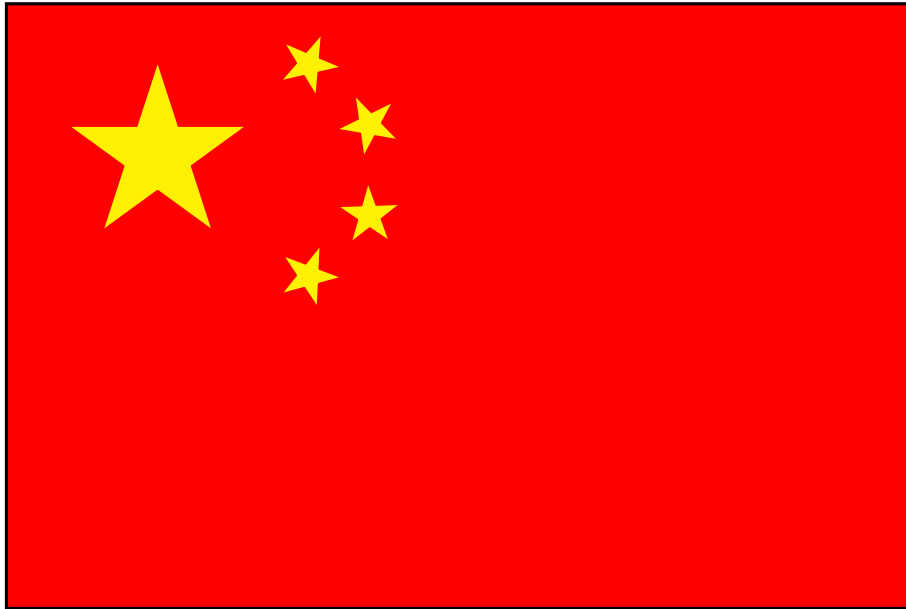
v2 = e-c2 # Extremo menos origen
u2 = v2/RR(norm(v2)) # Normalizamos dividiendo por la norma
P2 = [c2+G^i*u2 for i in range(5)] # puntas de la estrella 2

v3 = e-c3 # Extremo menos origen
u3 = v3/RR(norm(v3)) # Normalizamos dividiendo por la norma
P3 = [c3+G^i*u3 for i in range(5)] # puntas de la estrella 3
```

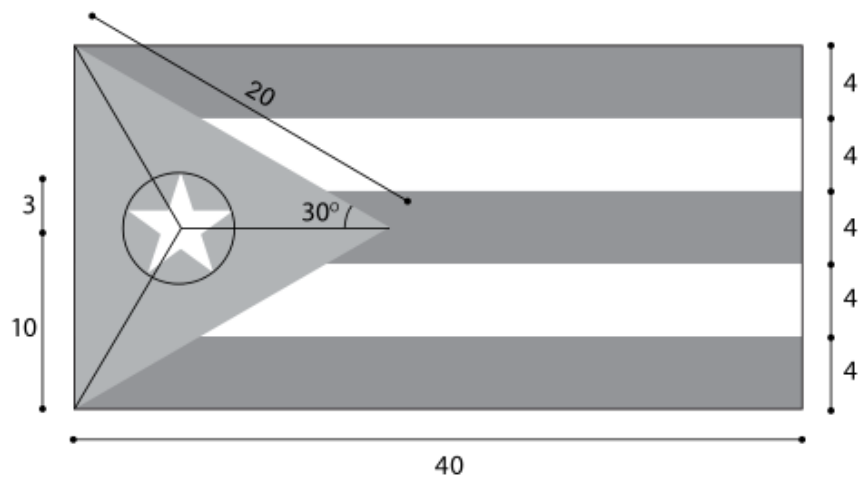
El fondo es un simple rectángulo

```
ancho = 30
alto = 20
Fondo = [vector([ancho/2,alto/2]),vector([-ancho/2,alto/2]),
          vector([-ancho/2,-alto/2]),vector([ancho/2,-alto/2])]

\begin{tikzpicture}[x = 0.4cm, y = 0.4cm]
\fill[color = red] !{Fondo[0]} -- !{Fondo[1]} -- !{Fondo[2]} -- !{Fondo[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{E[0]} -- !{E[2]} -- !{E[4]} -- !{E[1]} -- !{E[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{P0[0]} -- !{P0[2]} -- !{P0[4]} -- !{P0[1]} -- !{P0[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{P1[0]} -- !{P1[2]} -- !{P1[4]} -- !{P1[1]} -- !{P1[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{P2[0]} -- !{P2[2]} -- !{P2[4]} -- !{P2[1]} -- !{P2[3]} -- cycle;
\fill[color = yellow] !{P3[0]} -- !{P3[2]} -- !{P3[4]} -- !{P3[1]} -- !{P3[3]} -- cycle;
\draw[very thick] !{Fondo[0]} -- !{Fondo[1]} -- !{Fondo[2]} -- !{Fondo[3]} -- cycle;
\end{tikzpicture}
```



Ejercicio 4. *Dibuja la bandera de la República de Cuba siguiendo las especificaciones que se indican:*



Tengamos en cuenta que la estrella es de color blanco, el triángulo (que es equilátero) de color rojo, y las bandas horizontales son azul-blanco-azul-blanco-azul.

Solución:

Empecemos definiendo los vértices del rectángulo exterior que llamaremos A , B , C , D que tomarán los valores

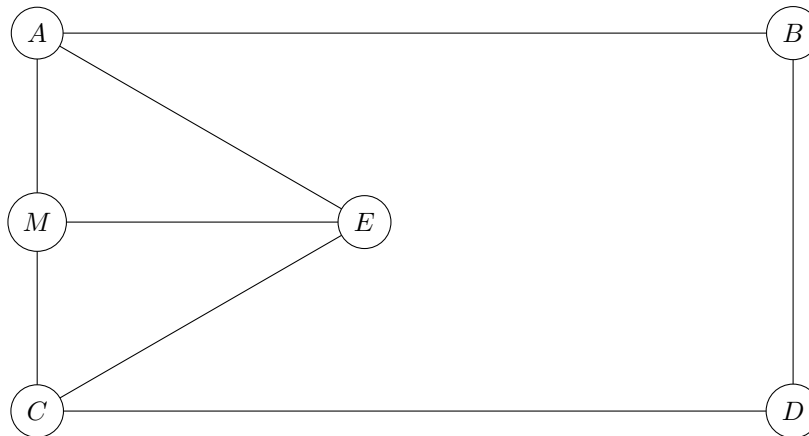
```
A = vector([0,20])
B = vector([40,20])
C = vector([0,0])
D = vector([40,0])
```



Tenemos un triángulo equilátero del que conocemos dos de sus vértices, que son A y C . El problema es calcular el otro que podemos llamar E . La altura de dicho punto la conocemos porque estará en la mitad de la bandera. Si llamamos M al punto medio de A y C , entonces tenemos un triángulo rectángulo formado por C, M y E del que conocemos la hipotenusa (que es 20 porque los tres lados del triángulo son iguales) y el cateto menor (que es 10 porque es la distancia entre C y M)

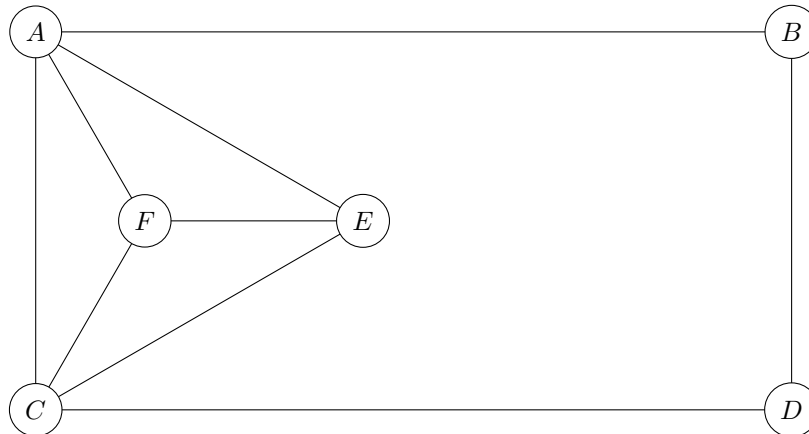
$$M = (A+C)/2$$

$$E = \text{vector}(\text{RR}, [\text{sqrt}(20.0^2 - 10.0^2), 10])$$



El centro de la estrella se puede calcular fácilmente como el punto medio entre los puntos A , E y C

$$F = (A+E+C)/3$$

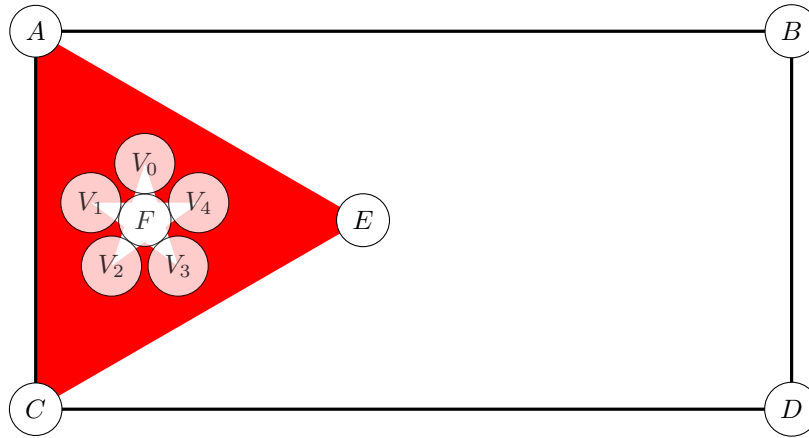


Para obtener los vértices de la estrella, giramos el primer vértice que es el vertical de longitud 3 cinco veces.

$$b = 2\pi/5$$

$$G = \text{matrix}(\text{RR}, [[\cos(b), -\sin(b)], [\sin(b), \cos(b)]])$$

$$V = [F + G^i \cdot \text{vector}([0, 3]) \text{ for } i \text{ in range}(5)]$$



Para dibujar las bandas horizontales debemos partir los segmentos AC y BD

```
K = [C+i*vector([0,4]) for i in range(6)]
L = [D+i*vector([0,4]) for i in range(6)]
```



Ya estamos en condiciones de unir todos los elementos quitando las letras y rellenando con los colores que corresponden a cada elemento. También los dibujaremos en el orden adecuado para que esté la estrella encima del triángulo y el triángulo encima de las bandas horizontales.

```
\begin{tikzpicture}[x = 0.25cm, y = 0.25cm, vertice/.style = {fill=white,circle,draw}]
% Banda 1 Azul
\fill[color = blue] !{L[0]} -- !{K[0]} -- !{K[1]} -- !{L[1]} -- !{L[0]};
% Banda 2 Blanca
\fill[color = white] !{L[1]} -- !{K[1]} -- !{K[2]} -- !{L[2]} -- !{L[1]};
% Banda 3 Azul
\fill[color = blue] !{L[2]} -- !{K[2]} -- !{K[3]} -- !{L[3]} -- !{L[2]};
% Banda 4 Blanca
\fill[color = white] !{L[3]} -- !{K[3]} -- !{K[4]} -- !{L[4]} -- !{L[3]};
% Banda 5 Azul
\fill[color = blue] !{L[4]} -- !{K[4]} -- !{K[5]} -- !{L[5]} -- !{L[4]};
% Triangulo Rojo
\fill[color = red] !{C} -- !{E} -- !{A} -- !{C};
% Estrella Blanca
\fill[color = white] !{V[0]} -- !{V[2]} -- !{V[4]} -- !{V[1]} -- !{V[3]} -- !{V[0]};
% Borde exterior
\draw[very thick] !{A} -- !{B} -- !{D} -- !{C} -- !{A};
\end{tikzpicture}
```

