PREEVALUACIÓN CURSO 0
SOLUCIONES

Problema 1. *Dado el número decimal* 98*, encuentra su representación binaria.*

Solución. Para encontrar la representación binaria del número, lo pondremos en una columna, en la que iremos dividiendo por dos en cada paso. A la derecha pondremos un uno si el número es impar o un cero si el número es par (es decir, el resto de la división por 2). Estos ceros y unos serán la representación binaria del número leídos desde abajo. La tabla en este caso es la siguiente:

mitades	cifras
98	0
49	1
24	0
12	0
6	0
3	1
1	1

El resultado es pues : 0b1100010 □

Problema 2. *Encuentra la factorización del número* 54 *en factores primos.*

Solución. Para factorizar el número, empezamos por los factores pequeños y cada vez que un factor divide de forma exacta al número, hacemos la división y seguimos con el resto del número. Si no encontramos ningún factor más pequeño o igual a la raiz cuadrada del número, este es primo. Vamos a hacerlo en este caso:

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

El resultado es pues : $2 \cdot 3^3$ □

Problema 3. *Factoriza el polinomio* $x^3 + 2x^2 + x$*.*

Solución. Para factorizar este polinomio de grado 3, tenemos que intentar encontrar una raiz del polinomio por tanteo. Para ello probaremos con diversos valores que debemos buscar entre los divisores del término independiente del polinomio. Tras realizar varias pruebas supongamos que encontramos el valor -1 que si le aplicamos el polinomio nos da 0. Con este valor aplicamos Ruffini y sacamos el cociente de la división. El resto es 0 puesto que hemos elegido el valor para que sea una raiz del polinomio.

El cociente resultante es $x^2 + x$. La factorización de esta parte podemos encontrarla utilizando Ruffini o aplicando directamente la fórmula de la ecuación de segundo grado que nos da el valor de las dos raices de este polinomio. Con eso obtenemos los valores 0 y -1 como raices.

La factorización es pues $(x-a)(x-b)(x-c)$ siendo $a = -1$, $b = 0$ y $c = -1$. □

Problema 4. *Dadas las matrices* $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *calcula el producto de matrices* $M \cdot N$.

Solución. El producto de dos matrices es una nueva matriz cuya posición (i, j) es el producto de la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda matriz. Vamos a hacer estos productos y luego los ponemos en la matriz resultado:

$$(0, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$$
$$(-2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$$

El resultado es pues: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ □

Problema 5. *Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones combinando las ecuaciones hasta despejar las variables:*

$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ 2x - z &= -1 \\ -\frac{1}{2}y - z &= 0 \end{aligned}$$

Solución. Partimos del sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ 2x - z &= -1 \\ -\frac{1}{2}y - z &= 0 \end{aligned}$$

A la ecuación 3 le sumamos la ecuación 1 multiplicada por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ 2x - z &= -1 \\ -\frac{1}{2}z &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Multiplicamos la ecuación 2 por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ x - \frac{1}{2}z &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}z &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Multiplicamos la ecuación 3 por -2:

$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ x - \frac{1}{2}z &= -\frac{1}{2} \\ z &= -1 \end{aligned}$$

A la ecuación 1 le sumamos la ecuación 3 multiplicada por -1:

$$y = 2$$

$$x - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}$$
$$z = -1$$

A la ecuación 2 le sumamos la ecuación 3 multiplicada por $\frac{1}{2}$:

$$y = 2$$
$$x = -1$$
$$z = -1$$

Intercambiamos la ecuación 1 con la ecuación 2:

$$x = -1$$
$$y = 2$$
$$z = -1$$

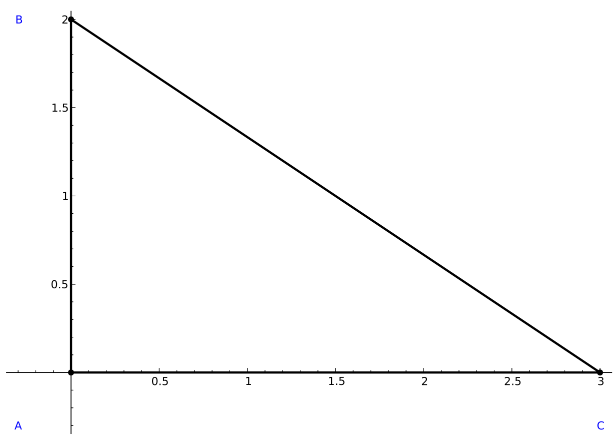
Nos queda como resultado final:

$$x = -1$$
$$y = 2$$
$$z = -1$$

□

Problema 6. *Representa gráficamente el triángulo rectángulo de vértices* $(0,0)$, $(0,2)$ *y* $(3,0)$. *Calcula las longitudes de su hipotenusa y sus catetos, así como todos los ángulos que lo forman.*

Solución. Empecemos pintando los vértices $A = (0,0)$, $B = (0,2)$ y $C = (3,0)$.



Vamos a calcular la longitud de cada uno de los lados:

- El cateto AB tiene longitud 2.
- El cateto AC tiene longitud 3.
- La hipotenusa BC tiene longitud la raiz cuadrada de la suma de sus catetos al cuadrado, que es $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Vamos a calcular los ángulos:

- El ángulo A es un ángulo recto, es decir, de $\pi/2$ radianes o 90 grados.

- El coseno del ángulo B vale la longitud del cateto AC dividida por la longitud de la hipotenusa, es decir, $\frac{3}{13}\sqrt{13}$ por lo que el ángulo vale $\arccos\left(\frac{3}{13}\sqrt{13}\right)$ radianes.
- El coseno del ángulo C vale la longitud del cateto AB dividida por la longitud de la hipotenusa, es decir, $\frac{2}{13}\sqrt{13}$ por lo que el ángulo vale $\arccos\left(\frac{2}{13}\sqrt{13}\right)$ radianes.

□

Problema 7. *Determina los valores de las variables que hacen cierta la siguiente fórmula lógica:*

$$r \wedge (\neg q \wedge (p \to q))$$

Solución. Haremos una tabla de verdad que nos permita ver los casos que hacen cierta la fórmula.

p	$p \to q$	q	$\neg q$	$\neg q \wedge (p \to q)$	r	$r \wedge (\neg q \wedge (p \to q))$
0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0

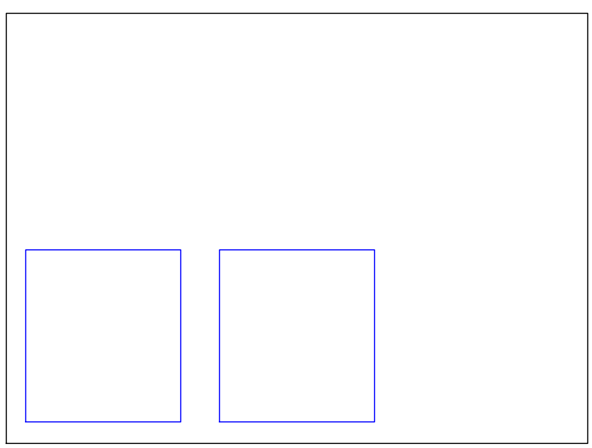
Como sólo hay un caso en el que esta fórmula sea cierta, podemos deducir los valores de verdad de las proposiciones.

La variable p es falsa

La variable q es falsa

La variable r es verdadera □

Problema 8. *En el siguiente universo, formaliza matemáticamente y determina si son ciertas o falsas las proposiciones que se indican:*



(1) *Todos los elementos son cuadrados y pequeños*
(2) *Todos los elementos rojos son cuadrados*
(3) *Todos los elementos azules son cuadrados*

(4) *Todos los elementos son pequeños y azules*

Solución.

(1) La formalización matemática de *Todos los elementos son cuadrados y pequeños* es $\forall x, \mathsf{Cuad}(x) \wedge \mathsf{Peq}(x)$. En este universo, la proposición es falsa. El cuadrado grande azul no cumple las condiciones.

(2) La formalización matemática de *Todos los elementos rojos son cuadrados* es $\forall x, \mathsf{Rojo}(x) \to \mathsf{Cuad}(x)$. En este universo, la proposición es verdadera. Esta implicación es trivialmente cierta porque no hay ningún elemento en nuestro universo que cumpla la primera parte de la implicación, por lo tanto nunca puede ser falsa.

(3) La formalización matemática de *Todos los elementos azules son cuadrados* es $\forall x, \mathsf{Azul}(x) \to \mathsf{Cuad}(x)$. En este universo, la proposición es verdadera.

(4) La formalización matemática de *Todos los elementos son pequeños y azules* es $\forall x, \mathsf{Peq}(x) \wedge \mathsf{Azul}(x)$. En este universo, la proposición es falsa. El cuadrado grande azul no cumple las condiciones.

$\square$