Curso 0: Matemáticas y sus Aplicaciones

Tema 2. Matrices y Sistemas de Ecuaciones

Leandro Marín

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Murcia

2012

- Una matriz no es mas que un conjunto de números ordenados en filas y columnas.

- Una matriz no es mas que un conjunto de números ordenados en filas y columnas.
- El número de filas y columnas de una matriz es el tamaño de la misma.

- Una matriz no es mas que un conjunto de números ordenados en filas y columnas.
- El número de filas y columnas de una matriz es el tamaño de la misma.
- Para referirnos a tamaños y posiciones en la matriz siempre usaremos dos números, el primero siempre será la fila y el segundo la columna a la que nos refiramos.

- Una matriz no es mas que un conjunto de números ordenados en filas y columnas.
- El número de filas y columnas de una matriz es el tamaño de la misma.
- Para referirnos a tamaños y posiciones en la matriz siempre usaremos dos números, el primero siempre será la fila y el segundo la columna a la que nos refiramos.
- Así por ejemplo una matriz de tamaño 2×3 es una matriz que tiene dos filas y tres columnas. Por ejemplo

- Una matriz no es mas que un conjunto de números ordenados en filas y columnas.
- El número de filas y columnas de una matriz es el tamaño de la misma.
- Para referirnos a tamaños y posiciones en la matriz siempre usaremos dos números, el primero siempre será la fila y el segundo la columna a la que nos refiramos.
- Así por ejemplo una matriz de tamaño 2×3 es una matriz que tiene dos filas y tres columnas. Por ejemplo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las filas y las columnas de una matriz se suelen numerar a partir del 1 (aunque algunos sistemas informáticos lo hacen desde 0). No hay ninguna diferencia. Nosotros seguiremos la notación más habitual de numerar desde 1. Así una matrix de tamaño 3×4 tendría esta forma:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Las filas 1 de la matriz sería $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14})$ y la columna 2 por ejemplo sería $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$

Aritmética de Marices: Suma

- Las matrices se pueden operar entre sí, aunque sólo si tienen los tamaños correctos para cada operación.

Aritmética de Marices: Suma

- Las matrices se pueden operar entre sí, aunque sólo si tienen los tamaños correctos para cada operación.
- La suma de matrices se puede realizar entre matrices del mismo tamaño. Se realiza componente a componente:

Aritmética de Marices: Suma

- Las matrices se pueden operar entre sí, aunque sólo si tienen los tamaños correctos para cada operación.
- La suma de matrices se puede realizar entre matrices del mismo tamaño. Se realiza componente a componente:

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -28 \end{pmatrix}$$

Aritmética de Marices: Resta

La resta es similar a la suma, se puede realizar entre matrices del mismo tamaño y la operación se hace componente a componente:

Aritmética de Marices: Resta

La resta es similar a la suma, se puede realizar entre matrices del mismo tamaño y la operación se hace componente a componente: Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aritmética de Marices: Producto por Escalares

También podemo multiplicar una matriz por un número real. Los números en este contexto se suelen denominar *escalares*.

Aritmética de Marices: Producto por Escalares

También podemo multiplicar una matriz por un número real. Los números en este contexto se suelen denominar *escalares*. Por ejemplo:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Producto Escalar

Las filas y las columnas se pueden multiplicar entre sí cuando tienen el mismo número de elementos. Es lo que se conoce como producto escalar y que veremos más adelante. El procedimiento consiste en multiplicar cada una de las posiciones de la fila por la correspondiente en la columna y sumar todos los productos parciales.

Producto Escalar

Las filas y las columnas se pueden multiplicar entre sí cuando tienen el mismo número de elementos. Es lo que se conoce como producto escalar y que veremos más adelante. El procedimiento consiste en multiplicar cada una de las posiciones de la fila por la correspondiente en la columna y sumar todos los productos parciales. Por ejemplo para tamaño 2 tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = -5 - 6 = -11$$

Producto Escalar

Las filas y las columnas se pueden multiplicar entre sí cuando tienen el mismo número de elementos. Es lo que se conoce como producto escalar y que veremos más adelante. El procedimiento consiste en multiplicar cada una de las posiciones de la fila por la correspondiente en la columna y sumar todos los productos parciales. Por ejemplo para tamaño 2 tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = -5 - 6 = -11$$

Para tamaño 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 = 12$$

Producto de Matrices

- Dos matrices se pueden multiplicar cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda. Es decir, si M es una matriz tamaño $m \times n$ y N es una matriz de tamaño $n \times t$, entonces se pueden multiplicar, y el producto es una matriz de tamaño $m \times t$.

Producto de Matrices

- Dos matrices se pueden multiplicar cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda. Es decir, si M es una matriz tamaño $m \times n$ y N es una matriz de tamaño $n \times t$, entonces se pueden multiplicar, y el producto es una matriz de tamaño $m \times t$.
- La posición (i, j) de la matriz producto se calcula multiplicando la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda matriz.

Producto de Matrices

- Dos matrices se pueden multiplicar cuando el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda. Es decir, si M es una matriz tamaño $m \times n$ y N es una matriz de tamaño $n \times t$, entonces se pueden multiplicar, y el producto es una matriz de tamaño $m \times t$.
- La posición (i, j) de la matriz producto se calcula multiplicando la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda matriz.
- Si el tamaño de las matrices es el correcto, las filas y columnas que se multiplican tienen el mismo número de elementos y se pueden multiplicar utilizando el producto escalar.

Ejemplo de Producto de Matrices

Sea $M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 56 & -1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$. El producto $M \cdot N$ tiene tamaño 2×1 y sus valores son

$$(2 \quad -7) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 + 28 = 26$$

$$(56 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = -56 + 4 = -52$$

El resultado es pues: $\begin{pmatrix} 26 \\ -52 \end{pmatrix}$

Ecuación

- Una ecuación es una expresión de la forma $4x + 5y - z = 6$.

Ecuación

- Una ecuación es una expresión de la forma $4x + 5y - z = 6$.
- En ella hay varias partes que conviene reconocer.

Ecuación

- Una ecuación es una expresión de la forma $4x + 5y - z = 6$.
- En ella hay varias partes que conviene reconocer.
- Por un lado están los símbolos x, y ó z. Estos símbolos reciben el nombre de variables y pueden tomar valores en $\mathbb{R}$. En general nuestro objetivo es saber qué valores toman.

Ecuación

- Una ecuación es una expresión de la forma $4x + 5y - z = 6$.
- En ella hay varias partes que conviene reconocer.
- Por un lado están los símbolos x, y ó z. Estos símbolos reciben el nombre de variables y pueden tomar valores en $\mathbb{R}$. En general nuestro objetivo es saber qué valores toman.
- Las constantes que multiplican a las variables reciben el nombre de coeficientes, así hablaremos del coeficiente de x o del de y, o del de z (en este caso son respectivamente 4, 5 y -1).

Ecuación

- Una ecuación es una expresión de la forma $4x + 5y - z = 6$.
- En ella hay varias partes que conviene reconocer.
- Por un lado están los símbolos x, y ó z. Estos símbolos reciben el nombre de variables y pueden tomar valores en $\mathbb{R}$. En general nuestro objetivo es saber qué valores toman.
- Las constantes que multiplican a las variables reciben el nombre de coeficientes, así hablaremos del coeficiente de x o del de y, o del de z (en este caso son respectivamente 4, 5 y -1).
- En el otro lado de la igualdad tenemos un valor, que puede ser cualquier número real y que recibe el nombre de término independiente.

Sistema de Ecuaciones

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de una o varias ecuaciones.

Sistema de Ecuaciones

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de una o varias ecuaciones.
- Resolver un sistema, consiste en encontrar (si existen) todos los valores posibles que pueden tomar las variables de forma que se satisfagan todas las ecuaciones del sistema. Esos valores reciben el nombre de soluciones.

Sistema de Ecuaciones

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de una o varias ecuaciones.
- Resolver un sistema, consiste en encontrar (si existen) todos los valores posibles que pueden tomar las variables de forma que se satisfagan todas las ecuaciones del sistema. Esos valores reciben el nombre de soluciones.
- Si el sistema no tiene solución, diremos que es incompatible. Un ejemplo muy sencillo de sistema incompatible es

  $$x + y = 1 \quad x + y = 2$$

  Sean cuales sean los valores de x e y, no puede ser que su suma de valores diferentes.

Sistema de Ecuaciones

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de una o varias ecuaciones.
- Resolver un sistema, consiste en encontrar (si existen) todos los valores posibles que pueden tomar las variables de forma que se satisfagan todas las ecuaciones del sistema. Esos valores reciben el nombre de soluciones.
- Si el sistema no tiene solución, diremos que es incompatible. Un ejemplo muy sencillo de sistema incompatible es

  $$x + y = 1 \quad x + y = 2$$

  Sean cuales sean los valores de x e y, no puede ser que su suma de valores diferentes.
- Si un sistema tiene una única solución, recibe el nombre de compatible determinado.

Sistema de Ecuaciones

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de una o varias ecuaciones.
- Resolver un sistema, consiste en encontrar (si existen) todos los valores posibles que pueden tomar las variables de forma que se satisfagan todas las ecuaciones del sistema. Esos valores reciben el nombre de soluciones.
- Si el sistema no tiene solución, diremos que es incompatible. Un ejemplo muy sencillo de sistema incompatible es

$$x + y = 1 \quad x + y = 2$$

  Sean cuales sean los valores de x e y, no puede ser que su suma de valores diferentes.
- Si un sistema tiene una única solución, recibe el nombre de compatible determinado.
- Si tiene más de una solución se dice compatible indeterminado.

Resolución por Sustitución

- Para manipular ecuaciones, podemos aplicar las reglas básicas de la aritmética a las que estamos acostumbrados.

Resolución por Sustitución

- Para manipular ecuaciones, podemos aplicar las reglas básicas de la aritmética a las que estamos acostumbrados.
- Así podemos sumar y restar ecuaciones, multiplicar ambos miembros por las constantes que consideremos necesarias o despejar variables en una ecuación y sustituirlas en otra.

Resolución por Sustitución

- Para manipular ecuaciones, podemos aplicar las reglas básicas de la aritmética a las que estamos acostumbrados.
- Así podemos sumar y restar ecuaciones, multiplicar ambos miembros por las constantes que consideremos necesarias o despejar variables en una ecuación y sustituirlas en otra.
- Todas estas operaciones tienen un reflejo en operaciones matriciales, pero eso lo veremos más adelante.

Resolución por Sustitución

- Para manipular ecuaciones, podemos aplicar las reglas básicas de la aritmética a las que estamos acostumbrados.
- Así podemos sumar y restar ecuaciones, multiplicar ambos miembros por las constantes que consideremos necesarias o despejar variables en una ecuación y sustituirlas en otra.
- Todas estas operaciones tienen un reflejo en operaciones matriciales, pero eso lo veremos más adelante.
- De momento vamos a empezar haciéndolo de una forma menos automática.

Ejemplo (Sistema Compatible Determinado)

- Vamos a solucionar por sustitución el sistema

$$x - y = 0 \quad -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$$

Ejemplo (Sistema Compatible Determinado)

- Vamos a solucionar por sustitución el sistema

$$x - y = 0 \quad -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$$

- Despejamos x en la primera ecuación y nos queda $x = y$. En la ecuación 2 sustituimos el valor de x despejado en la ecuación 1 y obtenemos las ecuaciones:

$$x - y = 0 \quad -y = 1$$

Ejemplo (Sistema Compatible Determinado)

- Vamos a solucionar por sustitución el sistema

$$x - y = 0 \quad -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$$

- Despejamos x en la primera ecuación y nos queda $x = y$. En la ecuación 2 sustituimos el valor de x despejado en la ecuación 1 y obtenemos las ecuaciones:

$$x - y = 0 \quad -y = 1$$

- Multiplicamos la ecuación 2 por -1 para despejar la variable y:

$$x = y \quad y = -1$$

Ejemplo (Sistema Compatible Determinado)

- Vamos a solucionar por sustitución el sistema

$$x - y = 0 \quad -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$$

- Despejamos x en la primera ecuación y nos queda $x = y$. En la ecuación 2 sustituimos el valor de x despejado en la ecuación 1 y obtenemos las ecuaciones:

$$x - y = 0 \quad -y = 1$$

- Multiplicamos la ecuación 2 por -1 para despejar la variable y:

$$x = y \quad y = -1$$

- En la ecuación 1 sustituimos el valor de y despejado en la ecuación 2 y obtenemos la solución:

$$x = -1 \quad y = -1$$

Ejemplo (Sistema Compatible Indeterminado)

- Vamos a resolver por sustitución

$$x + 2y - z = 0 \qquad -2x - z = -1$$

Ejemplo (Sistema Compatible Indeterminado)

- Vamos a resolver por sustitución

$$x + 2y - z = 0 \qquad -2x - z = -1$$

- En la ecuación 2 sustituimos el valor de x despejado en la ecuación 1:

$$x + 2y - z = 0 \qquad 4y - 3z = -1$$

Ejemplo (Sistema Compatible Indeterminado)

- Vamos a resolver por sustitución

$$x + 2y - z = 0 \qquad -2x - z = -1$$

- En la ecuación 2 sustituimos el valor de x despejado en la ecuación 1:

$$x + 2y - z = 0 \qquad 4y - 3z = -1$$

- Multiplicamos la ecuación 2 por $\frac{1}{4}$ para despejar la variable y:

$$x = -2y + z \qquad y - \frac{3}{4}z = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo (Sistema Compatible Indeterminado)

- Vamos a resolver por sustitución

$$x + 2y - z = 0 \qquad -2x - z = -1$$

- En la ecuación 2 sustituimos el valor de x despejado en la ecuación 1:

$$x + 2y - z = 0 \qquad 4y - 3z = -1$$

- Multiplicamos la ecuación 2 por $\frac{1}{4}$ para despejar la variable y:

$$x = -2y + z \qquad y - \frac{3}{4}z = -\frac{1}{4}$$

- En la ecuación 1 sustituimos el valor de y despejado en la ecuación 2 y nos da el siguiente resultado final en el que z puede tomar cualquier valor real (el sistema tiene infinitas soluciones):

$$x = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \qquad y = \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}$$

Ejemplo (Sistema Incompatible)

- Resolvamos $x + y - z = 0 \quad x - y - z = -1 \quad x - z = 1$

Ejemplo (Sistema Incompatible)

- Resolvamos $x + y - z = 0 \quad x - y - z = -1 \quad x - z = 1$
- En 2 sustituimos el valor de x despejado en 1:

$$x + y - z = 0 \qquad -2y = -1 \qquad x - z = 1$$

Ejemplo (Sistema Incompatible)

- Resolvamos $x + y - z = 0 \quad x - y - z = -1 \quad x - z = 1$
- En 2 sustituimos el valor de x despejado en 1:

$$x + y - z = 0 \qquad -2y = -1 \qquad x - z = 1$$

- Multiplicamos la ecuación 2 por $\frac{-1}{2}$ para despejar la variable y:

$$x + y - z = 0 \qquad y = \frac{1}{2} \qquad x - z = 1$$

Ejemplo (Sistema Incompatible)

- Resolvamos $x + y - z = 0 \quad x - y - z = -1 \quad x - z = 1$
- En 2 sustituimos el valor de x despejado en 1:

$$x + y - z = 0 \qquad -2y = -1 \qquad x - z = 1$$

- Multiplicamos la ecuación 2 por $\frac{-1}{2}$ para despejar la variable y:

$$x + y - z = 0 \qquad y = \frac{1}{2} \qquad x - z = 1$$

- En 1 sustituimos el valor de y despejado en 2 y nos da

$$x - z = -\frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{2} \qquad x - z = 1$$

Ejemplo (Sistema Incompatible)

- Resolvamos $x + y - z = 0 \quad x - y - z = -1 \quad x - z = 1$
- En 2 sustituimos el valor de x despejado en 1:

$$x + y - z = 0 \qquad -2y = -1 \qquad x - z = 1$$

- Multiplicamos la ecuación 2 por $\frac{-1}{2}$ para despejar la variable y:

$$x + y - z = 0 \qquad y = \frac{1}{2} \qquad x - z = 1$$

- En 1 sustituimos el valor de y despejado en 2 y nos da

$$x - z = -\frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{2} \qquad x - z = 1$$

- Despejamos x en 1 y lo sustituimos en 3, obteniendo

$$x - z = -\frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{2} \qquad 0 = \frac{1}{2}$$

que es claramente una contradicción, por tanto el sistema no tiene solución.

Operaciones Básicas

- En el método de resolución por sustitución hacíamos tres operaciones básicas:

Operaciones Básicas

- En el método de resolución por sustitución hacíamos tres operaciones básicas:
- La primera era despejar una variable poniéndole coeficiente 1 y pasando el resto de la ecuación al segundo miembro.

Operaciones Básicas

- En el método de resolución por sustitución hacíamos tres operaciones básicas:
- La primera era despejar una variable poniéndole coeficiente 1 y pasando el resto de la ecuación al segundo miembro.
- La segunda operación era sustituir los valores despejados en otras ecuaciones para eliminar variables.

Operaciones Básicas

- En el método de resolución por sustitución hacíamos tres operaciones básicas:
- La primera era despejar una variable poniéndole coeficiente 1 y pasando el resto de la ecuación al segundo miembro.
- La segunda operación era sustituir los valores despejados en otras ecuaciones para eliminar variables.
- Cuando era necesario se cambiaba el orden de las ecuaciones.

Operaciones Básicas

- En el método de resolución por sustitución hacíamos tres operaciones básicas:
- La primera era despejar una variable poniéndole coeficiente 1 y pasando el resto de la ecuación al segundo miembro.
- La segunda operación era sustituir los valores despejados en otras ecuaciones para eliminar variables.
- Cuando era necesario se cambiaba el orden de las ecuaciones.
- Hemos sido bastante sistemáticos realizando sólo estas operaciones y no haciendo algunas que en ciertos casos podrían simplificar, pero que no eran generales. En los ejercicios también hemos hecho lo mismo.

Operaciones Básicas

- En el método de resolución por sustitución hacíamos tres operaciones básicas:
- La primera era despejar una variable poniéndole coeficiente 1 y pasando el resto de la ecuación al segundo miembro.
- La segunda operación era sustituir los valores despejados en otras ecuaciones para eliminar variables.
- Cuando era necesario se cambiaba el orden de las ecuaciones.
- Hemos sido bastante sistemáticos realizando sólo estas operaciones y no haciendo algunas que en ciertos casos podrían simplificar, pero que no eran generales. En los ejercicios también hemos hecho lo mismo.
- La razón era que se pudiera apreciar lo sistemático del método. Ahora vamos a formalizar eso.

Matrices del Sistema

- Dado un sistema de ecuaciones, hay dos matrices asociadas.

Matrices del Sistema

- Dado un sistema de ecuaciones, hay dos matrices asociadas.
- La primera es la matriz de los coeficientes, que tiene tantas filas como ecuaciones tiene el sistema y tantas columnas como variables.

Matrices del Sistema

- Dado un sistema de ecuaciones, hay dos matrices asociadas.
- La primera es la matriz de los coeficientes, que tiene tantas filas como ecuaciones tiene el sistema y tantas columnas como variables.
- Si las variables son por ejemplo x, y y z, la primera columna estará formada por los coeficientes de la x, la segunda por los coeficientes de la y y la tercera por los coeficientes de z en cada una de las ecuaciones. Si la variable no aparce es porque su coeficiente se 0, que lo tenemos que poner en la matriz.

Matrices del Sistema

- Dado un sistema de ecuaciones, hay dos matrices asociadas.
- La primera es la matriz de los coeficientes, que tiene tantas filas como ecuaciones tiene el sistema y tantas columnas como variables.
- Si las variables son por ejemplo x, y y z, la primera columna estará formada por los coeficientes de la x, la segunda por los coeficientes de la y y la tercera por los coeficientes de z en cada una de las ecuaciones. Si la variable no aparce es porque su coeficiente se 0, que lo tenemos que poner en la matriz.
- La segunda matriz es la que se conoce como matriz ampliada del sistema y consiste simplemente en añadir una última columna con los términos independientes, por lo tanto la matriz ampliada tiene las mismas filas y una columna más que la matriz de los coeficientes.

Matrices del Sistema

- Dado un sistema de ecuaciones, hay dos matrices asociadas.
- La primera es la matriz de los coeficientes, que tiene tantas filas como ecuaciones tiene el sistema y tantas columnas como variables.
- Si las variables son por ejemplo x, y y z, la primera columna estará formada por los coeficientes de la x, la segunda por los coeficientes de la y y la tercera por los coeficientes de z en cada una de las ecuaciones. Si la variable no aparce es porque su coeficiente se 0, que lo tenemos que poner en la matriz.
- La segunda matriz es la que se conoce como matriz ampliada del sistema y consiste simplemente en añadir una última columna con los términos independientes, por lo tanto la matriz ampliada tiene las mismas filas y una columna más que la matriz de los coeficientes.
- Es importante que sepamos pasar del sistema de ecuaciones a su matriz y viceversa.

Ejemplo

- Consideremos el siguiente sistema:

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1 \quad x - \frac{1}{2}y - z = 0$$

Ejemplo

- Consideremos el siguiente sistema:

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1 \quad x - \frac{1}{2}y - z = 0$$

- La matriz de los coeficientes sería: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo

- Consideremos el siguiente sistema:

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1 \quad x - \frac{1}{2}y - z = 0$$

- La matriz de los coeficientes sería: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$
- Y la matriz ampliada del sistema: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo

- Consideremos el siguiente sistema:

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1 \quad x - \frac{1}{2}y - z = 0$$

- La matriz de los coeficientes sería: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$
- Y la matriz ampliada del sistema: $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- Fijémonos que al no tener un valor x en la primera ecuación significa que está multiplicado por 0, por lo tanto este coeficiente 0 ha de aparecer en las matrices del sistema.

Operaciones Elementales

- En el sistema anterior, vamos a intentar despejar y de la ecuación $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1$

Operaciones Elementales

- En el sistema anterior, vamos a intentar despejar y de la ecuación $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1$
- Para ello, y como y tiene coeficiente $1/2$ debemos multiplicar toda la ecuación por 2.

Operaciones Elementales

- En el sistema anterior, vamos a intentar despejar y de la ecuación $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1$
- Para ello, y como y tiene coeficiente $1/2$ debemos multiplicar toda la ecuación por 2.
- Con eso la ecuación se convierte en $y - z = -2$.

Operaciones Elementales

- En el sistema anterior, vamos a intentar despejar y de la ecuación $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -1$
- Para ello, y como y tiene coeficiente $1/2$ debemos multiplicar toda la ecuación por 2.
- Con eso la ecuación se convierte en $y - z = -2$.
- Si la operación la hacemos matricialmente, lo que tenemos que hacer es multiplicar toda la fila por una constante no nula, concretamente 2 para conseguir que la primera variable que aparece en la ecuación tenga coeficiente 1 y así se pueda despejar.

Operaciones Elementales

- Esta operación la escribiremos matemáticamente como $F_1 = 2F_1$, es decir, que la fila 1 le asignamos el valor de la misma fila 1 multiplicada por 2.

Operaciones Elementales

- Esta operación la escribiremos matemáticamente como $F_1 = 2F_1$, es decir, que la fila 1 le asignamos el valor de la misma fila 1 multiplicada por 2.
- Entonces pondremos:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1=2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones Elementales

- Esta operación la escribiremos matemáticamente como $F_1 = 2F_1$, es decir, que la fila 1 le asignamos el valor de la misma fila 1 multiplicada por 2.
- Entonces pondremos:
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1=2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Notemos que la primera fila de la nueva matriz es exactamente la correspondiente a la ecuación $y - z = -2$.

Operaciones Elementales

- El primer objetivo que buscamos es poner el coeficiente de la primera variable igual a 1 para poder despejarla.

Operaciones Elementales

- El primer objetivo que buscamos es poner el coeficiente de la primera variable igual a 1 para poder despejarla.
- Este coeficiente se corresponde con el primer elemento no nulo de la fila correspondiente.

Operaciones Elementales

- El primer objetivo que buscamos es poner el coeficiente de la primera variable igual a 1 para poder despejarla.
- Este coeficiente se corresponde con el primer elemento no nulo de la fila correspondiente.
- A veces se le suele llamar elemento pivote (aunque el nombre es lo de menos).

Operaciones Elementales

- El primer objetivo que buscamos es poner el coeficiente de la primera variable igual a 1 para poder despejarla.
- Este coeficiente se corresponde con el primer elemento no nulo de la fila correspondiente.
- A veces se le suele llamar elemento pivote (aunque el nombre es lo de menos).
- Esa varible despejada la sustituiremos en todas las ecuaciones en la que aparezca, para eliminarla.

Operaciones Elementales

- El primer objetivo que buscamos es poner el coeficiente de la primera variable igual a 1 para poder despejarla.
- Este coeficiente se corresponde con el primer elemento no nulo de la fila correspondiente.
- A veces se le suele llamar elemento pivote (aunque el nombre es lo de menos).
- Esa varible despejada la sustituiremos en todas las ecuaciones en la que aparezca, para eliminarla.
- Vamos a ver cómo se hace con nuestro ejemplo:

Operaciones Elementales

- Teníamos la ecuación $y - z = -2$ o lo que es lo mismo $y = z - 2$.

Operaciones Elementales

- Teníamos la ecuación $y - z = -2$ o lo que es lo mismo $y = z - 2$.
- La otra ecuación $x - \frac{1}{2}y - z = 0$ tiene una y que vamos a eliminar por sustitución.

Operaciones Elementales

- Teníamos la ecuación $y - z = -2$ o lo que es lo mismo $y = z - 2$.
- La otra ecuación $x - \frac{1}{2}y - z = 0$ tiene una y que vamos a eliminar por sustitución.
- Como el coeficiente de y en esta ecuación es $-1/2$ tenemos que multplicar $z - 2$ por ese valor y sustituir.

Operaciones Elementales

- Teníamos la ecuación $y - z = -2$ o lo que es lo mismo $y = z - 2$.
- La otra ecuación $x - \frac{1}{2}y - z = 0$ tiene una y que vamos a eliminar por sustitución.
- Como el coeficiente de y en esta ecuación es $-1/2$ tenemos que multplicar $z - 2$ por ese valor y sustituir.
- Nos queda $x - \frac{3}{2}z = 1$, que en forma de fila de matriz es $(1, 0, -3/2, 1)$.

Operaciones Elementales

- Teníamos la ecuación $y - z = -2$ o lo que es lo mismo $y = z - 2$.
- La otra ecuación $x - \frac{1}{2}y - z = 0$ tiene una y que vamos a eliminar por sustitución.
- Como el coeficiente de y en esta ecuación es $-1/2$ tenemos que multplicar $z - 2$ por ese valor y sustituir.
- Nos queda $x - \frac{3}{2}z = 1$, que en forma de fila de matriz es $(1, 0, -3/2, 1)$.
- Esa operación es equivalente a sumar a la segunda fila de la matriz la primera multiplicada por $1/2$.

Operaciones Elementales

- La operación de sumar a una fila, otra multiplicada por una constante es otra operación elemental.

Operaciones Elementales

- La operación de sumar a una fila, otra multiplicada por una constante es otra operación elemental.
- En la matriz la representaremos del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Operaciones Elementales

- La operación de sumar a una fila, otra multiplicada por una constante es otra operación elemental.
- En la matriz la representaremos del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

- En realidad no es necesario *pasar variables al segundo miembro*, se puede hacer todo sumando las ecuaciones y dejar únicamente en el segundo miembro el término independiente. Lo importante es eliminar de todas las demás ecuaciones la variable que hemos despejado.

Operaciones Elementales

- La última cuestión, que se puede considerar estética, es poner las variables en orden.

Operaciones Elementales

- La última cuestión, que se puede considerar estética, es poner las variables en orden.
- Eso se corresponde a un cambio de orden de las ecuaciones.

Operaciones Elementales

- La última cuestión, que se puede considerar estética, es poner las variables en orden.
- Eso se corresponde a un cambio de orden de las ecuaciones.
- Lo podemos hacer en cualquier momento, pero se suele hacer al final cuando ya tenemos todas las variables despejadas.

Operaciones Elementales

- La última cuestión, que se puede considerar estética, es poner las variables en orden.
- Eso se corresponde a un cambio de orden de las ecuaciones.
- Lo podemos hacer en cualquier momento, pero se suele hacer al final cuando ya tenemos todas las variables despejadas.
- Esa operación la representaresmos $F_1 \leftrightarrow F_2$ para representar el cambio de orden entre la fila 1 y la fila 2.

Operaciones Elementales

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Y con eso ya tenemos las variables x e y en función de z. La solución es

$$x = \frac{3}{2}z - 1 \quad y = z - 2$$

El sistema tiene infinitas soluciones, tantas como valores podamos dar a z, y que nos forzará los valores de x y de y.

Operaciones Elementales

- Vamos a recapitular el método que hemos descrito, que recibe el nombre de método de Gauss.

Operaciones Elementales

- Vamos a recapitular el método que hemos descrito, que recibe el nombre de método de Gauss.
- Miramos la primera fila y el primer elemento no nulo de dicha fila lo convertimos en un 1 dividiendo toda la fila por su coeficiente.

Operaciones Elementales

- Vamos a recapitular el método que hemos descrito, que recibe el nombre de método de Gauss.
- Miramos la primera fila y el primer elemento no nulo de dicha fila lo convertimos en un 1 dividiendo toda la fila por su coeficiente.
- Utilizamos esa fila para eliminar todas las apariciones de esa variable en las otras ecuaciones. Para ello sumamos o restamos la fila 1 multiplicada por las constantes adecuadas a cada una de las siguientes filas.

Operaciones Elementales

- Vamos a recapitular el método que hemos descrito, que recibe el nombre de método de Gauss.
- Miramos la primera fila y el primer elemento no nulo de dicha fila lo convertimos en un 1 dividiendo toda la fila por su coeficiente.
- Utilizamos esa fila para eliminar todas las apariciones de esa variable en las otras ecuaciones. Para ello sumamos o restamos la fila 1 multiplicada por las constantes adecuadas a cada una de las siguientes filas.
- Cuando ya hemos terminado con esa fila, lo hacemos con la segunda. Hacemos 1 el primer elemento no nulo y eliminamos del resto de las filas dicho valor.

Operaciones Elementales

- Vamos a recapitular el método que hemos descrito, que recibe el nombre de método de Gauss.
- Miramos la primera fila y el primer elemento no nulo de dicha fila lo convertimos en un 1 dividiendo toda la fila por su coeficiente.
- Utilizamos esa fila para eliminar todas las apariciones de esa variable en las otras ecuaciones. Para ello sumamos o restamos la fila 1 multiplicada por las constantes adecuadas a cada una de las siguientes filas.
- Cuando ya hemos terminado con esa fila, lo hacemos con la segunda. Hacemos 1 el primer elemento no nulo y eliminamos del resto de las filas dicho valor.
- Lo vamos haciendo con todas las filas y al final, si los pivotes no han quedado ordenados de izquierda a derecha, los reordenamos haciendo los intercambios de filas que sean necesarios.

Un Ejemplo Completo

Vamos a resolver

$$2y - 2z = 0 \qquad -x + 2y = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1=\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda como resultado final:

$$x = 2z - 1 \qquad y = z$$

Rango de una Matriz

- Llamaremos matriz reducida por filas a la matriz resultante de este proceso, que tendrá las siguientes características:

Rango de una Matriz

- Llamaremos matriz reducida por filas a la matriz resultante de este proceso, que tendrá las siguientes características:
- El primer elemento no nulo de cada fila (el pivote) siempre es 1.

Rango de una Matriz

- Llamaremos matriz reducida por filas a la matriz resultante de este proceso, que tendrá las siguientes características:
- El primer elemento no nulo de cada fila (el pivote) siempre es 1.
- Debajo (y encima) del pivote sólo hay ceros.

Rango de una Matriz

- Llamaremos matriz reducida por filas a la matriz resultante de este proceso, que tendrá las siguientes características:
- El primer elemento no nulo de cada fila (el pivote) siempre es 1.
- Debajo (y encima) del pivote sólo hay ceros.
- Los pivotes están ordenados de izquierda a derecha.

Rango de una Matriz

- Llamaremos matriz reducida por filas a la matriz resultante de este proceso, que tendrá las siguientes características:
- El primer elemento no nulo de cada fila (el pivote) siempre es 1.
- Debajo (y encima) del pivote sólo hay ceros.
- Los pivotes están ordenados de izquierda a derecha.
- Llamaremos rango de la matriz al número de filas no nulas que aparecen en la matriz reducida.

Tipos de Sistemas: Sistemas Incompatibles

- Si al hacer este proceso, llegamos a que el rango de la matriz de los coeficientes es estrictamente menor que el de la ampliada es porque hemos encontrado una fila en la matriz ampliada del tipo $(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)$.

Tipos de Sistemas: Sistemas Incompatibles

- Si al hacer este proceso, llegamos a que el rango de la matriz de los coeficientes es estrictamente menor que el de la ampliada es porque hemos encontrado una fila en la matriz ampliada del tipo $(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)$.
- Esta fila en términos de ecuaciones sería $0 = 1$, lo cual es imposible.

Tipos de Sistemas: Sistemas Incompatibles

- Si al hacer este proceso, llegamos a que el rango de la matriz de los coeficientes es estrictamente menor que el de la ampliada es porque hemos encontrado una fila en la matriz ampliada del tipo $(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)$.
- Esta fila en términos de ecuaciones sería $0 = 1$, lo cual es imposible.
- Es lo que llamamos sistemas incompatibles (no tienen solución)

Tipos de Sistemas: Sistemas Incompatibles

- Si al hacer este proceso, llegamos a que el rango de la matriz de los coeficientes es estrictamente menor que el de la ampliada es porque hemos encontrado una fila en la matriz ampliada del tipo $(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)$.
- Esta fila en términos de ecuaciones sería $0 = 1$, lo cual es imposible.
- Es lo que llamamos sistemas incompatibles (no tienen solución)
- Formalmente podemos decir que el sistema es incompatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes es distinto del de la ampliada (siempre será menor).

Tipos de Sistemas: Sistemas Compatibles

- El rango de la matriz de los coeficientes se corresponde con el número de variables que hemos despejado.

Tipos de Sistemas: Sistemas Compatibles

- El rango de la matriz de los coeficientes se corresponde con el número de variables que hemos despejado.
- El número de columnas de la matriz de los coeficientes es el número de variable que teníamos.

Tipos de Sistemas: Sistemas Compatibles

- El rango de la matriz de los coeficientes se corresponde con el número de variables que hemos despejado.
- El número de columnas de la matriz de los coeficientes es el número de variable que teníamos.
- Si el número de variables despejadas es el mismo que el de variables que teníamos, es porque todas las variables tienen un valor concreto, es lo que corresponde a un sistema compatible determinado.

Tipos de Sistemas: Sistemas Compatibles

- El rango de la matriz de los coeficientes se corresponde con el número de variables que hemos despejado.
- El número de columnas de la matriz de los coeficientes es el número de variable que teníamos.
- Si el número de variables despejadas es el mismo que el de variables que teníamos, es porque todas las variables tienen un valor concreto, es lo que corresponde a un sistema compatible determinado.
- Si el número de variables despejadas es menor que el de las que teníamos, es porque algunas las vamos a pasar al otro miembro y podremos asignarles valores cualesquiera.

Tipos de Sistemas: Sistemas Compatibles

- El rango de la matriz de los coeficientes se corresponde con el número de variables que hemos despejado.
- El número de columnas de la matriz de los coeficientes es el número de variable que teníamos.
- Si el número de variables despejadas es el mismo que el de variables que teníamos, es porque todas las variables tienen un valor concreto, es lo que corresponde a un sistema compatible determinado.
- Si el número de variables despejadas es menor que el de las que teníamos, es porque algunas las vamos a pasar al otro miembro y podremos asignarles valores cualesquiera.
- Eso es lo que se denomina un sistema compatible indeterminado.

Matriz Identidad

Fijémonos en los siguientes productos de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ multiplicada por cualquier matriz nos deja el mismo resultado.

Matriz Identidad (II)

- Es lo mismo que sucede con el valor 1, $x \cdot 1 = x$ para cualquier valor de x

Matriz Identidad (II)

- Es lo mismo que sucede con el valor 1, $x \cdot 1 = x$ para cualquier valor de x
- Esa matriz recibe el nombre de matriz identidad.

Matriz Identidad (II)

- Es lo mismo que sucede con el valor 1, $x \cdot 1 = x$ para cualquier valor de x
- Esa matriz recibe el nombre de matriz identidad.
- Para el tamaño 3, la matriz identidad es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Identidad (II)

- Es lo mismo que sucede con el valor 1, $x \cdot 1 = x$ para cualquier valor de x
- Esa matriz recibe el nombre de matriz identidad.
- Para el tamaño 3, la matriz identidad es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- A la matriz identidad la representaremos por I.

Matriz Inversa

- Dada una matriz cuadrada A, llamaremos matriz inversa de A a una matriz B tal que $A \cdot B = I$.

Matriz Inversa

- Dada una matriz cuadrada A, llamaremos matriz inversa de A a una matriz B tal que $A \cdot B = I$.
- Si esto pasa, se puede demostrar matemáticamente que también $B \cdot A = I$ y que eso sólo sucede para una matriz.

Matriz Inversa

- Dada una matriz cuadrada A, llamaremos matriz inversa de A a una matriz B tal que $A \cdot B = I$.
- Si esto pasa, se puede demostrar matemáticamente que también $B \cdot A = I$ y que eso sólo sucede para una matriz.
- La matriz B (si existe) se llama matriz inversa.

Matriz Inversa

- Dada una matriz cuadrada A, llamaremos matriz inversa de A a una matriz B tal que $A \cdot B = I$.
- Si esto pasa, se puede demostrar matemáticamente que también $B \cdot A = I$ y que eso sólo sucede para una matriz.
- La matriz B (si existe) se llama matriz inversa.
- Si no existe la inversa, diremos que la matriz no es invertible.

Matriz Inversa

- Dada una matriz cuadrada A, llamaremos matriz inversa de A a una matriz B tal que $A \cdot B = I$.
- Si esto pasa, se puede demostrar matemáticamente que también $B \cdot A = I$ y que eso sólo sucede para una matriz.
- La matriz B (si existe) se llama matriz inversa.
- Si no existe la inversa, diremos que la matriz no es invertible.
- Un ejemplo inmediato de matriz que no es invertible es la matriz 0 (cualquier cosa multiplicada por 0 es 0, por lo tanto no podemo obtener nunca I). En el caso de matrices existen matrices distintas de 0 que tampoco tienen inversa.

Cálculo de la Inversa

- Existen varios métodos para calcular la matriz inversa.

Cálculo de la Inversa

- Existen varios métodos para calcular la matriz inversa.
- Un método podría ser poner una matriz con variables $x, y, z, \ldots$ y plantear las ecuaciones. Obtendríamos un sistema de ecuaciones. Este sistema es posible pero poco práctico.

Cálculo de la Inversa

- Existen varios métodos para calcular la matriz inversa.
- Un método podría ser poner una matriz con variables $x, y, z, \ldots$ y plantear las ecuaciones. Obtendríamos un sistema de ecuaciones. Este sistema es posible pero poco práctico.
- Otro método es el que se conoce como método de la conjugada traspuesta. Ese método es interesante para matrices muy pequeñas y lo veremos más adelante, cuando hablemos del determinante.

Cálculo de la Inversa

- Existen varios métodos para calcular la matriz inversa.
- Un método podría ser poner una matriz con variables $x, y, z, \ldots$ y plantear las ecuaciones. Obtendríamos un sistema de ecuaciones. Este sistema es posible pero poco práctico.
- Otro método es el que se conoce como método de la conjugada traspuesta. Ese método es interesante para matrices muy pequeñas y lo veremos más adelante, cuando hablemos del determinante.
- El método más efectivo a nuestro nivel es el de la reducción de Gauss, que utiliza las mismas operaciones que la resolución de sistemas que hemos visto antes.

Inversa por Gauss

- Para calcular la matriz inversa de A el método de Gauss lo que hace es poner junto a la matriz A la matriz identidad $(A|I)$ y hacer la reducción por filas.

Inversa por Gauss

- Para calcular la matriz inversa de A el método de Gauss lo que hace es poner junto a la matriz A la matriz identidad $(A|I)$ y hacer la reducción por filas.
- Al terminar de reducir, nos tiene que quedar una matriz del tipo $(I|B)$. En ese caso la matriz B es la inversa.

Inversa por Gauss

- Para calcular la matriz inversa de A el método de Gauss lo que hace es poner junto a la matriz A la matriz identidad $(A|I)$ y hacer la reducción por filas.
- Al terminar de reducir, nos tiene que quedar una matriz del tipo $(I|B)$. En ese caso la matriz B es la inversa.
- Si no nos queda la matriz identidad a la izquierda es porque la matriz no tiene inversa.

Inversa por Gauss

- Para calcular la matriz inversa de A el método de Gauss lo que hace es poner junto a la matriz A la matriz identidad $(A|I)$ y hacer la reducción por filas.
- Al terminar de reducir, nos tiene que quedar una matriz del tipo $(I|B)$. En ese caso la matriz B es la inversa.
- Si no nos queda la matriz identidad a la izquierda es porque la matriz no tiene inversa.
- Eso sucede cuando en la parte izquierda aparece alguna fila de ceros, es decir, el rango de A no coincide con su tamaño.

Ejemplo

Vamos a calcular la inversa de $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1=-2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2=-1F_1+F_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2=-2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El resultado es pues

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición

- Dada una matriz cuadrada, podemos calcular un número asociado a ella que recibe el nombre de determinante.

Definición

- Dada una matriz cuadrada, podemos calcular un número asociado a ella que recibe el nombre de determinante.
- La definición matemática del deteminante es un poco compleja y sobrepasa el nivel de este curso 0.

Definición

- Dada una matriz cuadrada, podemos calcular un número asociado a ella que recibe el nombre de determinante.
- La definición matemática del deteminante es un poco compleja y sobrepasa el nivel de este curso 0.
- La función determinante tiene propiedades matemáticas muy interesantes y en realidad el determiante se define como la única función que tiene dichas propiedades.
- En este momento lo que más nos interesa es saber calcularlo y conocer algunas de sus propiedades, al final de la sección volveremos sobre el tema de la definición formal del determinante.

Determinantes 2×2

- Consideremos una matriz genérica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Determinantes 2×2

- Consideremos una matriz genérica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- El determinante de esta matriz es $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (diagonal principal menos diagonal secundaria multiplicada).

Determinantes 2×2

- Consideremos una matriz genérica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- El determinante de esta matriz es $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (diagonal principal menos diagonal secundaria multiplicada).
- Lo respresentaremos indistintamente como:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Determinantes 3×3

El determinante de una matriz 3×3 se puede calcular directamente con la siguiente fórmula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32})$$

Desarrollo por una Fila o Columna

- Un determinante 3×3 se puede calcular mediante tres determinantes de tamaño 2×2. Es lo que se conoce como desarrollo por una fila o una columna.

Desarrollo por una Fila o Columna

- Un determinante 3×3 se puede calcular mediante tres determinantes de tamaño 2×2. Es lo que se conoce como desarrollo por una fila o una columna.
- Para desarrollar el determinante por la fila i tenemos que multiplicar cada elemento de la fila por el determinante de la matriz que resulta de eliminar de la matriz original, la fila y la columna del elemento considerado y por $(-1)^{i+j}$ para ajustar el signo. Eso nos deja tres sumandos.

Desarrollo por una Fila o Columna

- Un determinante 3×3 se puede calcular mediante tres determinantes de tamaño 2×2. Es lo que se conoce como desarrollo por una fila o una columna.
- Para desarrollar el determinante por la fila i tenemos que multiplicar cada elemento de la fila por el determinante de la matriz que resulta de eliminar de la matriz original, la fila y la columna del elemento considerado y por $(-1)^{i+j}$ para ajustar el signo. Eso nos deja tres sumandos.
- Por una columna es similar, tenemos que multiplicar cada elemento de la columna por el determinante de la matriz que resulta de eliminar de la matriz original, la fila y la columna del elemento que estamos considerando y por $(-1)^{i+j}$ para ajustar el signo. Eso nos deja también tres sumandos.

Desarrollo por una Fila o Columna

- Un determinante 3×3 se puede calcular mediante tres determinantes de tamaño 2×2. Es lo que se conoce como desarrollo por una fila o una columna.
- Para desarrollar el determinante por la fila i tenemos que multiplicar cada elemento de la fila por el determinante de la matriz que resulta de eliminar de la matriz original, la fila y la columna del elemento considerado y por $(-1)^{i+j}$ para ajustar el signo. Eso nos deja tres sumandos.
- Por una columna es similar, tenemos que multiplicar cada elemento de la columna por el determinante de la matriz que resulta de eliminar de la matriz original, la fila y la columna del elemento que estamos considerando y por $(-1)^{i+j}$ para ajustar el signo. Eso nos deja también tres sumandos.
- Este método es particularmente útil cuando en una fila o columna hay muchos ceros.

Ejemplo de Desarrollo por una Fila

- Vamos a calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ desarrollándolo por la fila 2.

Ejemplo de Desarrollo por una Fila

- Vamos a calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ desarrollándolo por la fila 2.
- Los tres sumandos que tenemos son:

$$1 \cdot (-1)^3 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1/2$$

$$0 \cdot (-1)^4 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot (-1)^5 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ejemplo de Desarrollo por una Fila

- Vamos a calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ desarrollándolo por la fila 2.
- Los tres sumandos que tenemos son:

$$1 \cdot (-1)^3 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1/2$$

$$0 \cdot (-1)^4 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot (-1)^5 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- La suma total es $1/2$. Como podemos ver sólo tendríamos que haber calculado el primer determinante, porque los demás, al tener coeficiente 0 se anulan en la suma.

Determinantes y Operaciones Elementales (I)

- Como hemos visto, cuando una matriz tiene muchos ceros en una fila o una columna, el desarrollo de un determinante se puede reducir a unos pocos (posiblemente uno solo) determinantes de tamaño inferior.

Determinantes y Operaciones Elementales (I)

- Como hemos visto, cuando una matriz tiene muchos ceros en una fila o una columna, el desarrollo de un determinante se puede reducir a unos pocos (posiblemente uno solo) determinantes de tamaño inferior.
- El método de reducción de Gauss nos permitía *poner muchos ceros* en las columnas, así que nos interesaría ver si estas operaciones alteran el determinante.

Determinantes y Operaciones Elementales (I)

- Como hemos visto, cuando una matriz tiene muchos ceros en una fila o una columna, el desarrollo de un determinante se puede reducir a unos pocos (posiblemente uno solo) determinantes de tamaño inferior.
- El método de reducción de Gauss nos permitía *poner muchos ceros* en las columnas, así que nos interesaría ver si estas operaciones alteran el determinante.
- Resulta que si a una fila le sumamos otra multiplicada por una constante, el determinante no cambia. Si intercambiamos dos filas hay un cambio de signo y si tenemos una constante y queremos dividir por ella en una fila, podemos *sacar la constante fuera* y dividir toda la fila por ella. Estas operaciones nos dejan el determinante en forma triangular.

Determinantes y Operaciones Elementales (II)

- Cuando una matriz está en forma triangular, el determinante se calcula como producto de los elementos de la diagonal principal. Para demostrar esto no hay más que desarrollar reiteradamente por la primera columna.

Determinantes y Operaciones Elementales (II)

- Cuando una matriz está en forma triangular, el determinante se calcula como producto de los elementos de la diagonal principal. Para demostrar esto no hay más que desarrollar reiteradamente por la primera columna.
- Visto con un ejemplo es mucho más sencillo.

Ejemplo de Determinante con Operaciones Elementales

Vamos a calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ haciendo operaciones elementales de reducción de Gauss.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_2=-2F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_2=-\frac{1}{6}F_2}{=} -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{F_3=-1F_2+F_3}{=} -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} \overset{F_3=-3F_3}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

El determinante es pues 2

Determinantes y Productos

- El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.

Determinantes y Productos

- El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.
- El determiannte de la matriz identidad siempre es 1.

Determinantes y Productos

- El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.
- El determiannte de la matriz identidad siempre es 1.
- Si A y B son matrices inversas, entonces $1 = det(I) = det(AB) = det(A)det(B)$ y por lo tanto el determiante de la matriz inversa es el inverso del determinante.

Determinantes y Productos

- El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.
- El determiannte de la matriz identidad siempre es 1.
- Si A y B son matrices inversas, entonces $1 = det(I) = det(AB) = det(A)det(B)$ y por lo tanto el determiante de la matriz inversa es el inverso del determinante.
- Eso nos demuestra en particular que si una matriz tiene determinante 0, no puede tener matriz inversa.

Determinantes y Productos

- El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.
- El determiannte de la matriz identidad siempre es 1.
- Si A y B son matrices inversas, entonces $1 = det(I) = det(AB) = det(A)det(B)$ y por lo tanto el determiante de la matriz inversa es el inverso del determinante.
- Eso nos demuestra en particular que si una matriz tiene determinante 0, no puede tener matriz inversa.
- El recíproco también es cierto. Una matriz tiene inversa si y sólo si su determiante es distinto de cero.

Inversas con la Conjugada Traspuesta

- Este método se puede hacer en general, pero lo vamos a ver sólo en tamaño 2×2 porque al nivel de este curso cero, no merece la pena ir más allá.

Inversas con la Conjugada Traspuesta

- Este método se puede hacer en general, pero lo vamos a ver sólo en tamaño 2×2 porque al nivel de este curso cero, no merece la pena ir más allá.
- Dada una matriz M, la inversa de esta matriz tiene la fórmula $M^{-1} = \frac{1}{det(M)} N^t$ siendo N la matriz conjugada de M.

Inversas con la Conjugada Traspuesta

- Este método se puede hacer en general, pero lo vamos a ver sólo en tamaño 2×2 porque al nivel de este curso cero, no merece la pena ir más allá.
- Dada una matriz M, la inversa de esta matriz tiene la fórmula $M^{-1} = \frac{1}{det(M)} N^t$ siendo N la matriz conjugada de M.
- La posición (i, j) de la matriz conjugada de M se calcula como el producto de $M_{i,j}$ por el determinante de la matriz resultante de eliminar la fila i y la columna j de M.

Inversas con la Conjugada Traspuesta

- Este método se puede hacer en general, pero lo vamos a ver sólo en tamaño 2×2 porque al nivel de este curso cero, no merece la pena ir más allá.
- Dada una matriz M, la inversa de esta matriz tiene la fórmula $M^{-1} = \frac{1}{det(M)} N^t$ siendo N la matriz conjugada de M.
- La posición (i, j) de la matriz conjugada de M se calcula como el producto de $M_{i,j}$ por el determinante de la matriz resultante de eliminar la fila i y la columna j de M.
- Como en este caso la matriz es 2×2 el determinante es simplemente el valor que queda al eliminar esta fila y columna.

Inversas con la Conjugada Traspuesta

- Este método se puede hacer en general, pero lo vamos a ver sólo en tamaño 2×2 porque al nivel de este curso cero, no merece la pena ir más allá.
- Dada una matriz M, la inversa de esta matriz tiene la fórmula $M^{-1} = \frac{1}{det(M)} N^t$ siendo N la matriz conjugada de M.
- La posición (i, j) de la matriz conjugada de M se calcula como el producto de $M_{i,j}$ por el determinante de la matriz resultante de eliminar la fila i y la columna j de M.
- Como en este caso la matriz es 2×2 el determinante es simplemente el valor que queda al eliminar esta fila y columna.
- Este valor se tiene que multiplicar por $(-1)^{i+j}$ para ajustar el signo. En nuestro caso, esto significa que en la diagonal principal mantenemos el signo y en la secundaria lo cambiamos.

Inversas con la Conjugada Traspuesta

- Este método se puede hacer en general, pero lo vamos a ver sólo en tamaño 2×2 porque al nivel de este curso cero, no merece la pena ir más allá.
- Dada una matriz M, la inversa de esta matriz tiene la fórmula $M^{-1} = \frac{1}{det(M)} N^t$ siendo N la matriz conjugada de M.
- La posición (i, j) de la matriz conjugada de M se calcula como el producto de $M_{i,j}$ por el determinante de la matriz resultante de eliminar la fila i y la columna j de M.
- Como en este caso la matriz es 2×2 el determinante es simplemente el valor que queda al eliminar esta fila y columna.
- Este valor se tiene que multiplicar por $(-1)^{i+j}$ para ajustar el signo. En nuestro caso, esto significa que en la diagonal principal mantenemos el signo y en la secundaria lo cambiamos.
- La matriz traspuesta de una matriz es la que resulta de intercambiar sus filas y sus columnas.

Ejemplo de Inversa con la Conjugada Traspuesta

- Supongamos que $M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo de Inversa con la Conjugada Traspuesta

- Supongamos que $M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$
- El determinante lo calculamos directamente con la fórmula, sale 40.

Ejemplo de Inversa con la Conjugada Traspuesta

- Supongamos que $M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$
- El determinante lo calculamos directamente con la fórmula, sale 40.
- La matriz conjugada es

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de Inversa con la Conjugada Traspuesta

- Supongamos que $M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$
- El determinante lo calculamos directamente con la fórmula, sale 40.
- La matriz conjugada es

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

- Y por lo tanto la inversa resulta:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Definición Formal de Determinante

- Aunque la definición en este curso cero es lo de menos vamos a verla.

Definición Formal de Determinante

- Aunque la definición en este curso cero es lo de menos vamos a verla.
- El determinante tiene una serie de propiedades: Si intercambiamos dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo. Si una fila (o columna) está multiplicada por una constante, la constante la podemos sacar fuera. Y si una fila (o columna) es suma de dos, podemos descomponer el determinante en la suma de dos determinantes, cada uno con la columna correspondiente.

Definición Formal de Determinante

- Aunque la definición en este curso cero es lo de menos vamos a verla.
- El determinante tiene una serie de propiedades: Si intercambiamos dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo. Si una fila (o columna) está multiplicada por una constante, la constante la podemos sacar fuera. Y si una fila (o columna) es suma de dos, podemos descomponer el determinante en la suma de dos determinantes, cada uno con la columna correspondiente.
- Esto matemáticamente se denomina una aplicación que sobre la identidad vale 1, es alternada y multilineal.

Definición Formal de Determinante

- Aunque la definición en este curso cero es lo de menos vamos a verla.
- El determinante tiene una serie de propiedades: Si intercambiamos dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo. Si una fila (o columna) está multiplicada por una constante, la constante la podemos sacar fuera. Y si una fila (o columna) es suma de dos, podemos descomponer el determinante en la suma de dos determinantes, cada uno con la columna correspondiente.
- Esto matemáticamente se denomina una aplicación que sobre la identidad vale 1, es alternada y multilineal.
- La única función que tiene esa propiedad es el determinante, así que lo podemos tomar como defínción formal.