Leandro Marín Muñoz

MATEMÁTICAS Y SUS APLICACIONES: CURSO 0

LIBRO DE EJERCICIOS

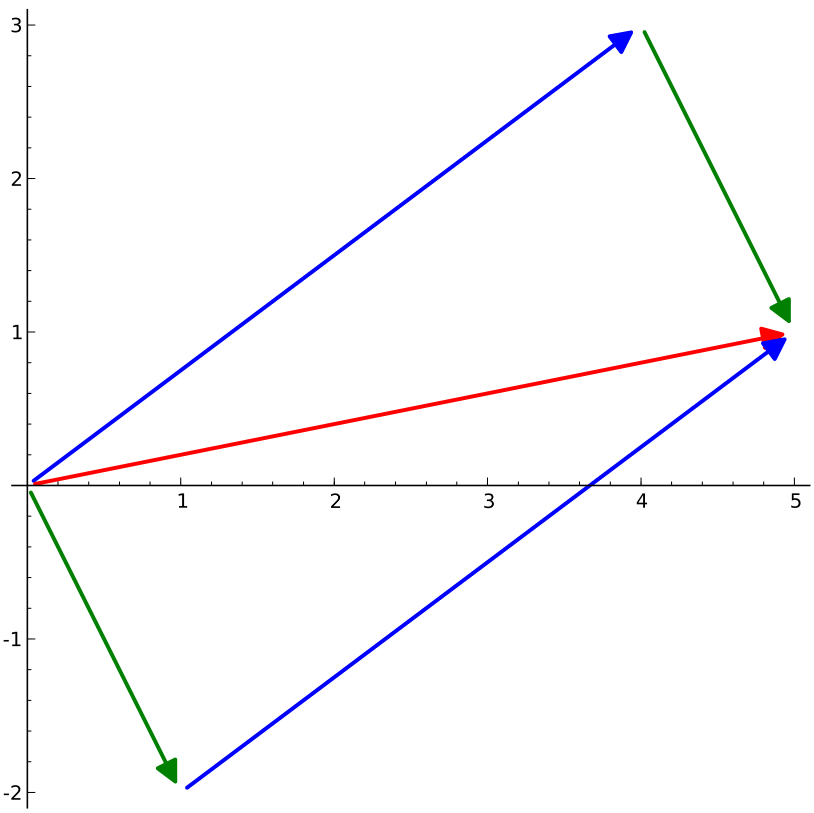
UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Capítulo 3. Vectores, Bases y Distancias

Ejercicio 3.1. Calcula la suma de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (4, 3) \quad v = (1, -2)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u+v$ y también la suma $v+u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes.

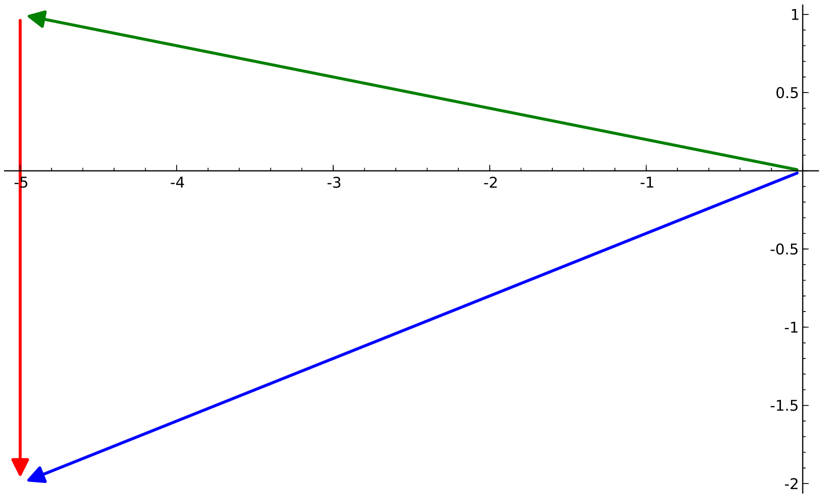


□

Ejercicio 3.2. Calcula la resta de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (-5, -2) \quad v = (-5, 1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo.

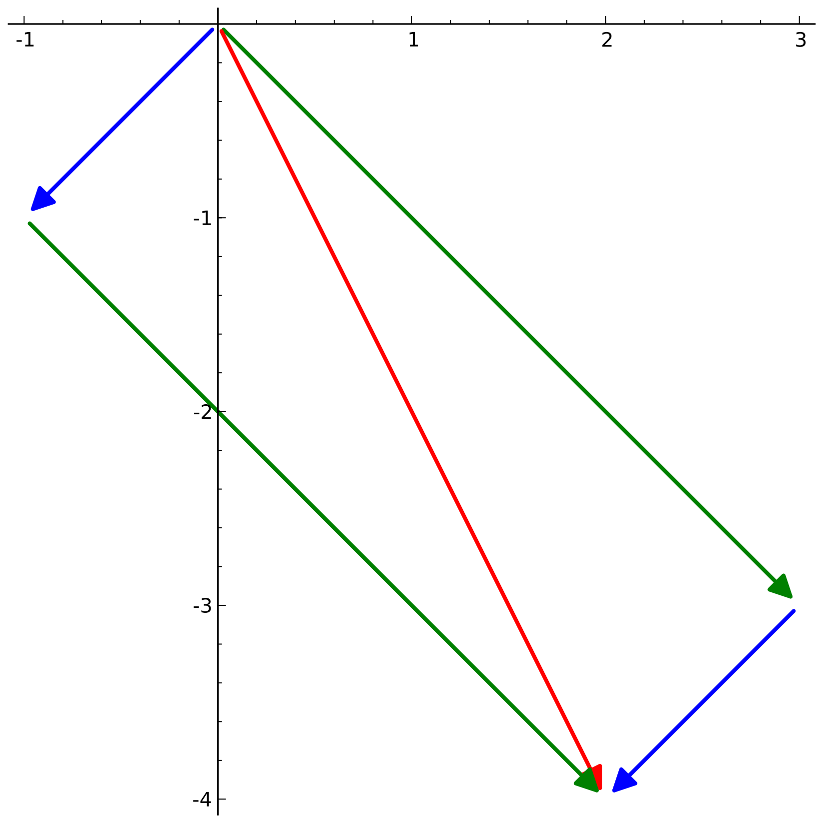


□

Ejercicio 3.3. Calcula la suma de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (-1, -1) \quad v = (3, -3)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u + v$ y también la suma $v + u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes.

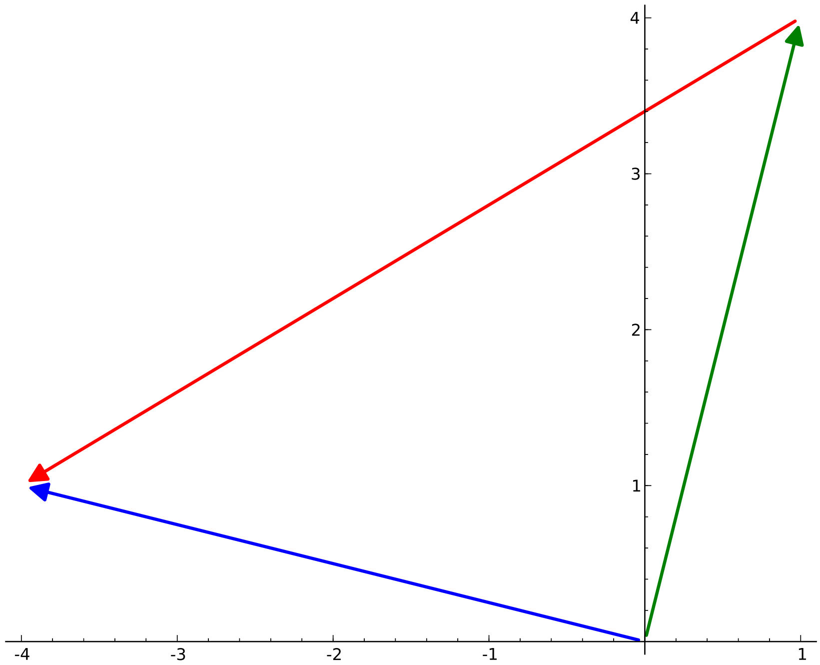


□

Ejercicio 3.4. Calcula la resta de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (-4, 1) \quad v = (1, 4)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo.

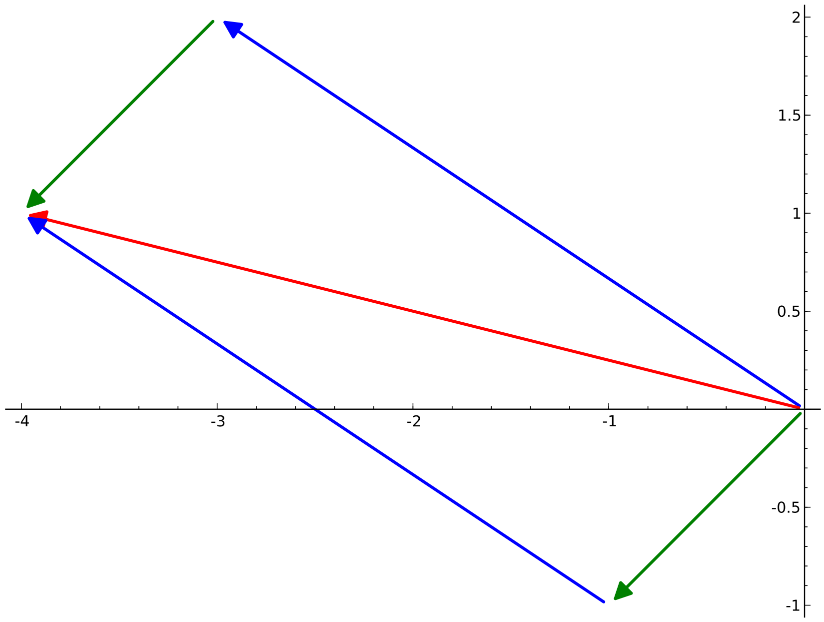


□

Ejercicio 3.5. Calcula la suma de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (-3, 2) \quad v = (-1, -1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u+v$ y también la suma $v+u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes.

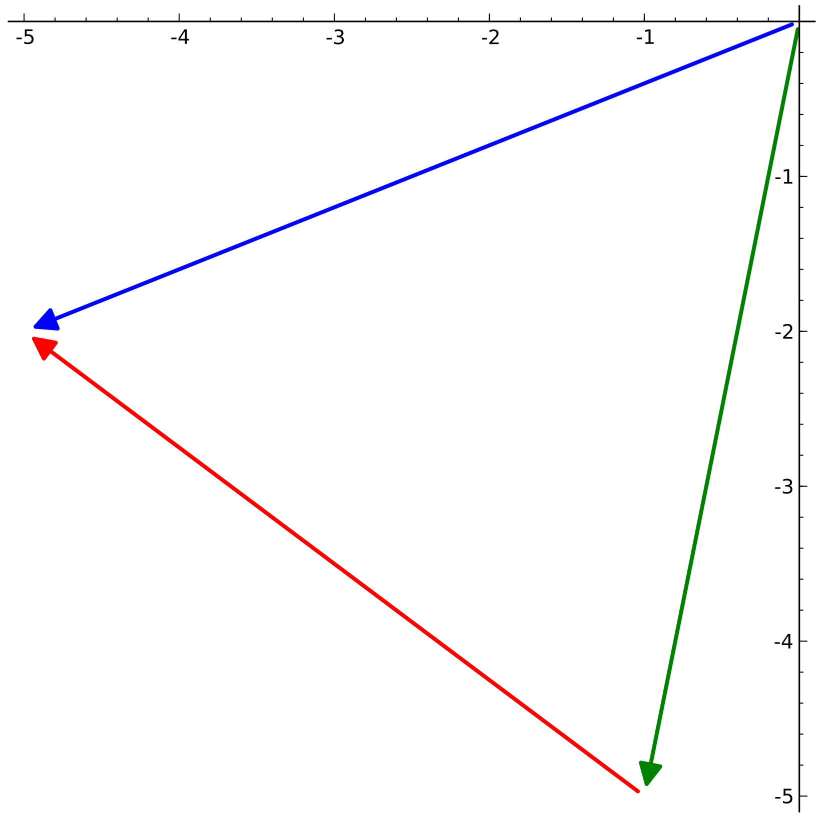


□

Ejercicio 3.6. Calcula la resta de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (-5, -2) \quad v = (-1, -5)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo.

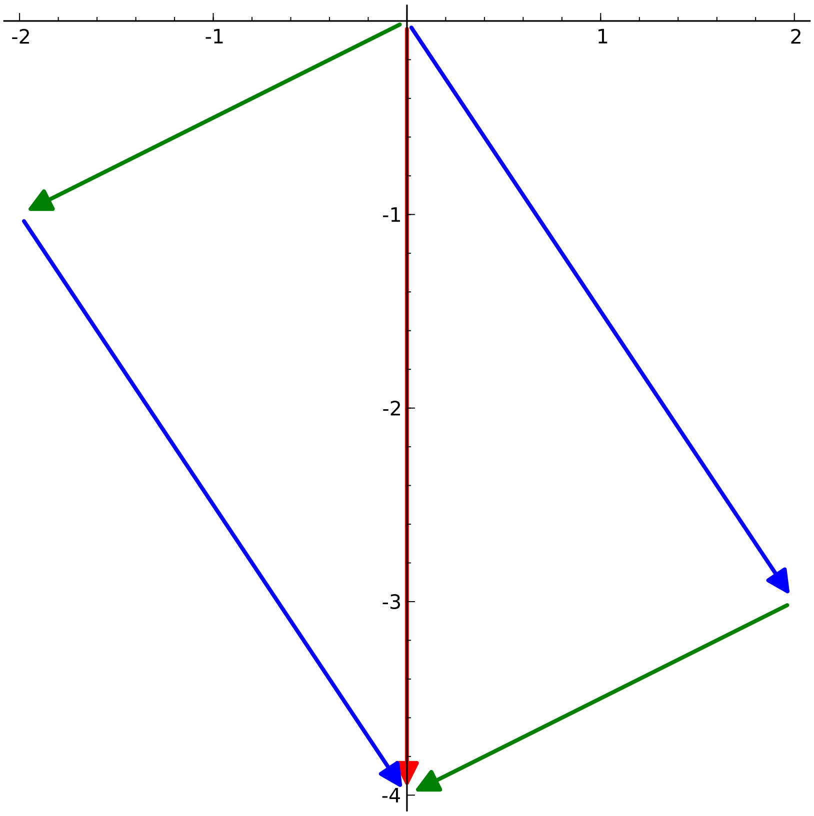


□

Ejercicio 3.7. Calcula la suma de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (2, -3) \quad v = (-2, -1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u+v$ y también la suma $v+u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes.

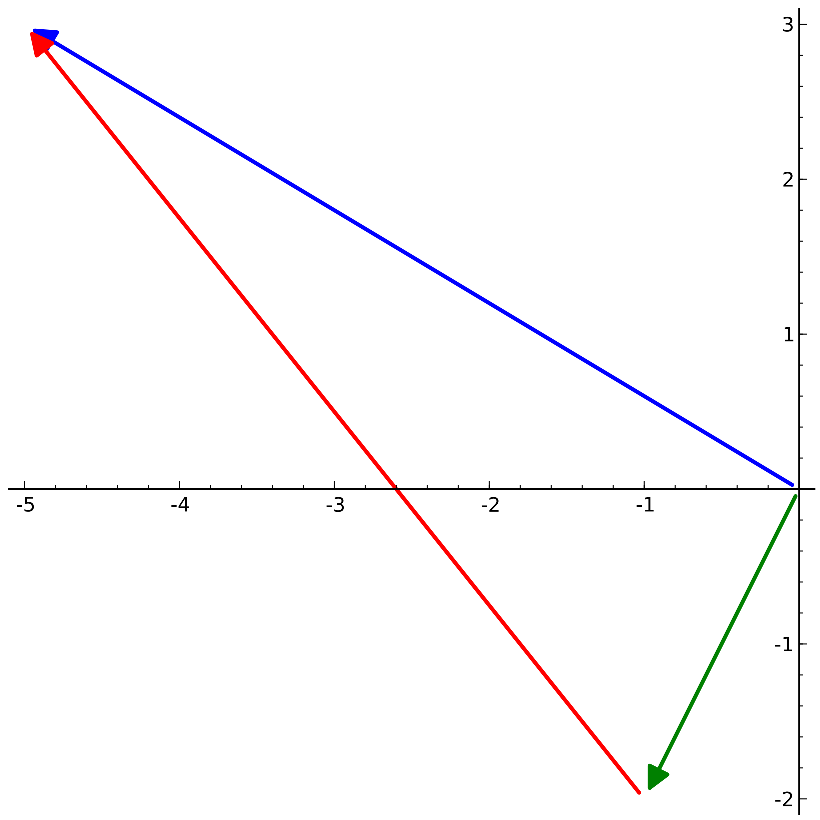


$\square$

Ejercicio 3.8. Calcula la resta de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (-5, 3) \quad v = (-1, -2)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo.

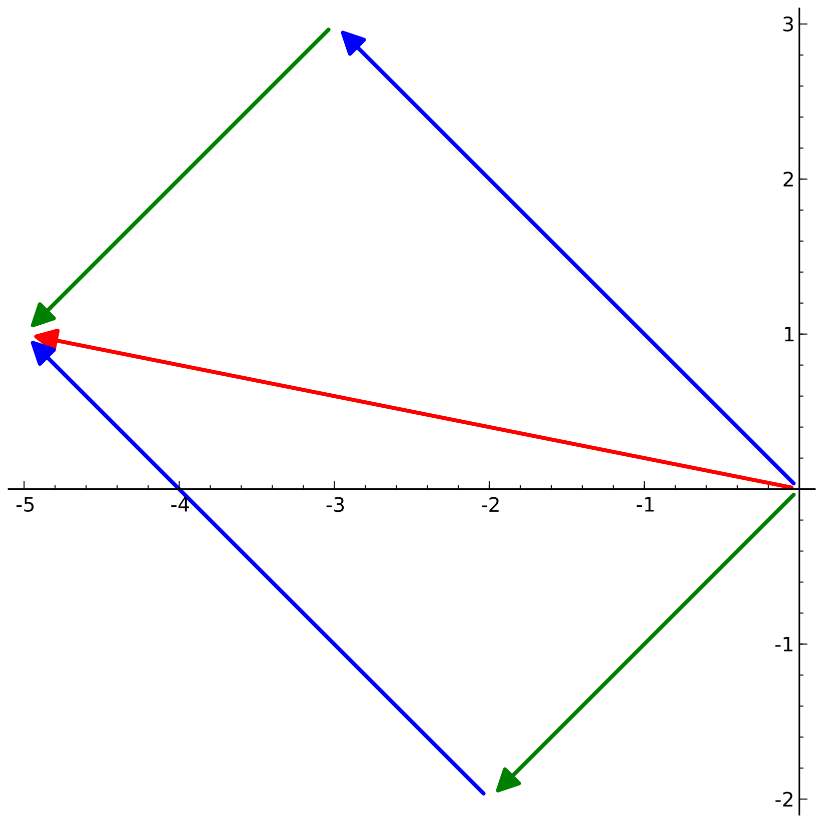


□

Ejercicio 3.9. Calcula la suma de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (-3, 3) \quad v = (-2, -2)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u+v$ y también la suma $v+u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes.

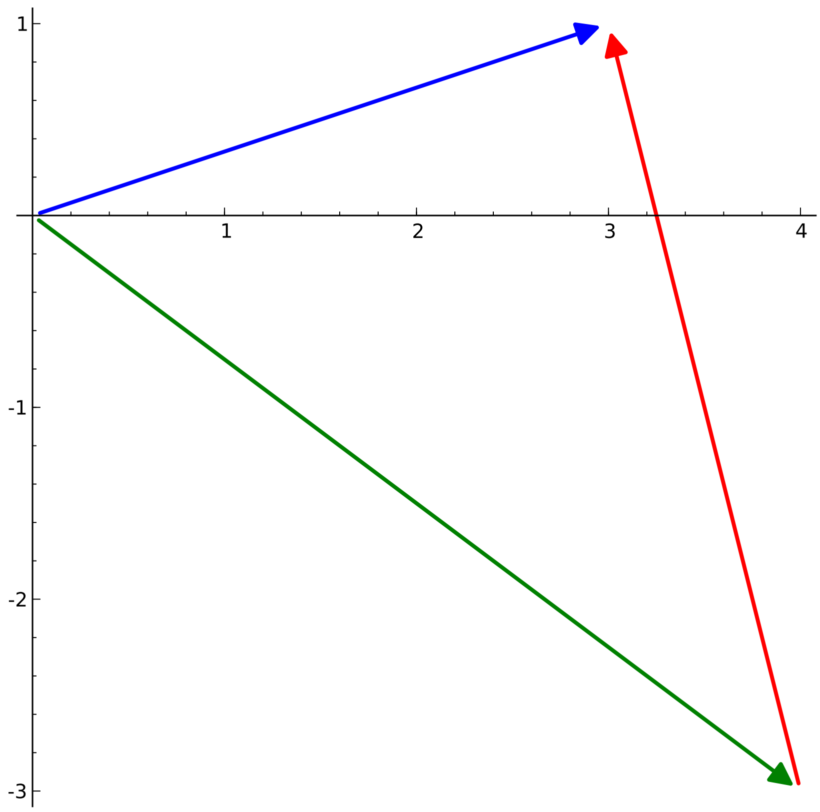


$\square$

Ejercicio 3.10. Calcula la resta de los siguientes vectores del plano, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (3, 1) \quad v = (4, -3)$$

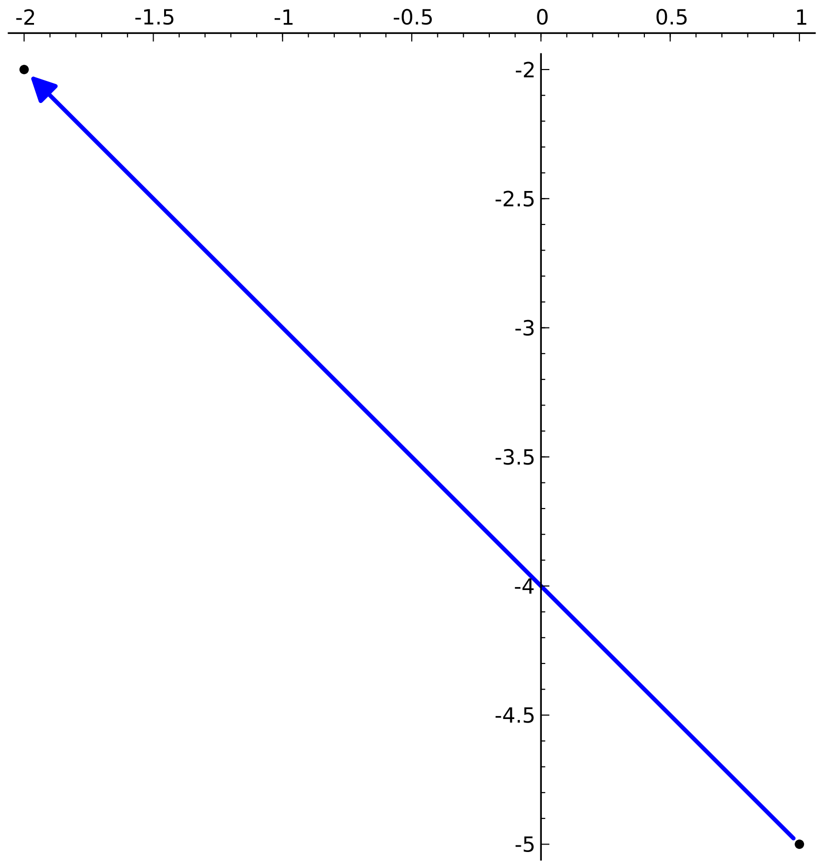
Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo.



□

Ejercicio 3.11. Dados los puntos del plano $P = (-2, -2)$ y $Q = (1, -5)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

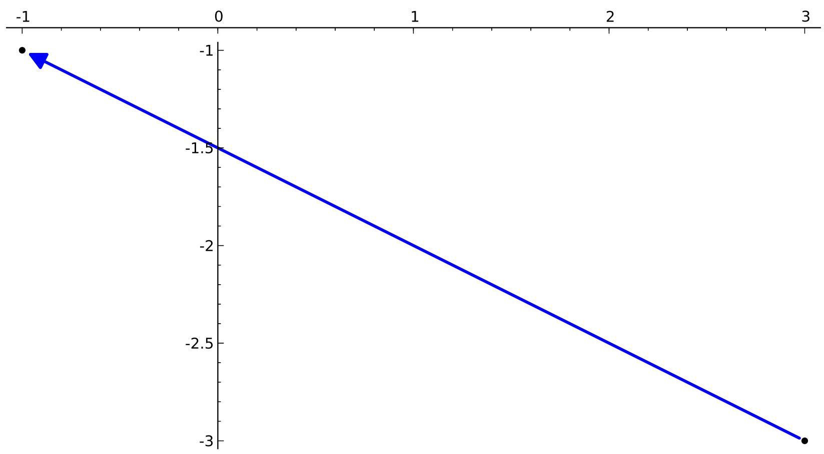
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = 3\sqrt{2}$. $\square$

Ejercicio 3.12. Dados los puntos del plano $P = (-1, -1)$ y $Q = (3, -3)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

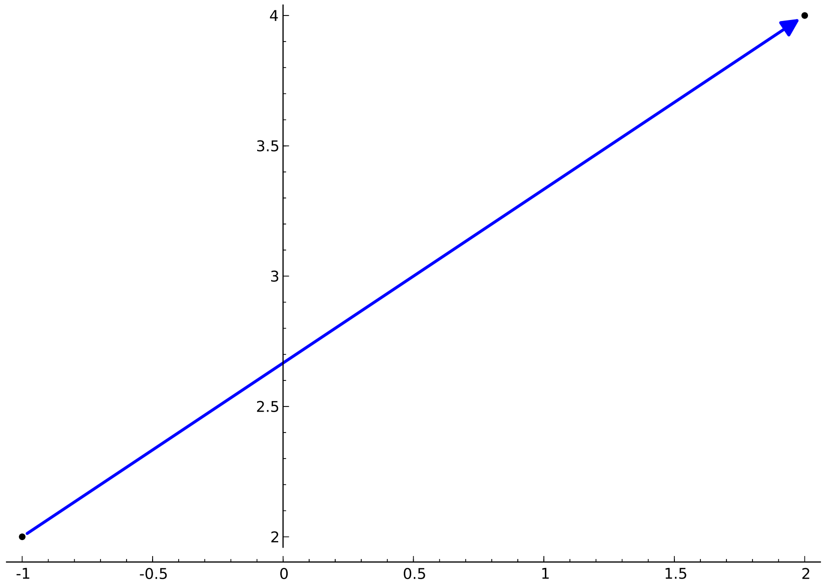
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = 2\sqrt{5}$. $\square$

Ejercicio 3.13. Dados los puntos del plano $P = (2, 4)$ y $Q = (-1, 2)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

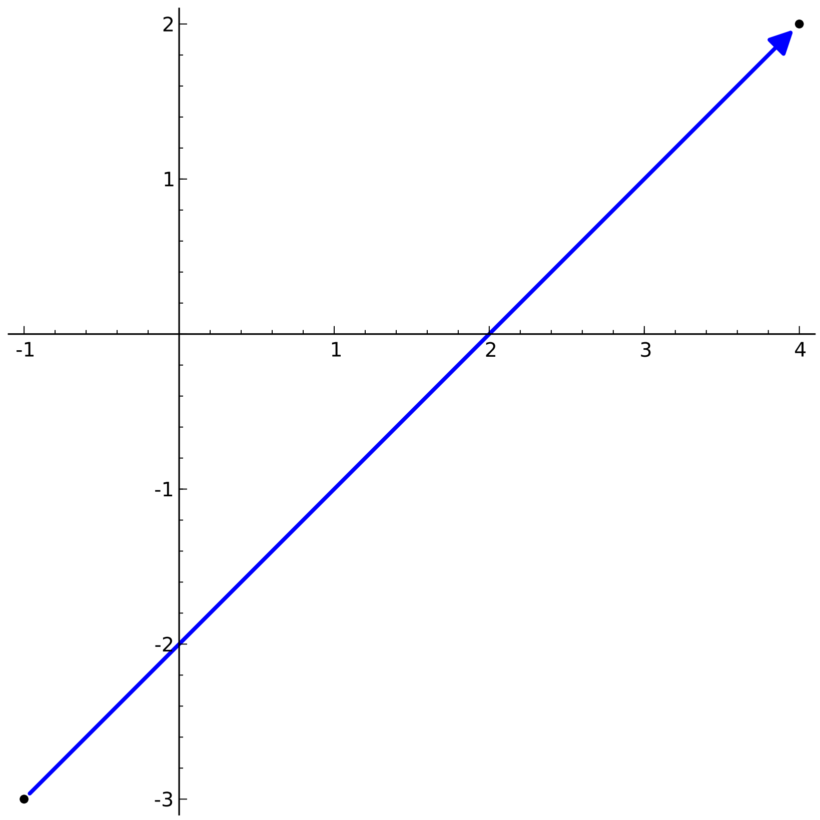
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = \sqrt{13}$. □

Ejercicio 3.14. Dados los puntos del plano $P = (4, 2)$ y $Q = (-1, -3)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

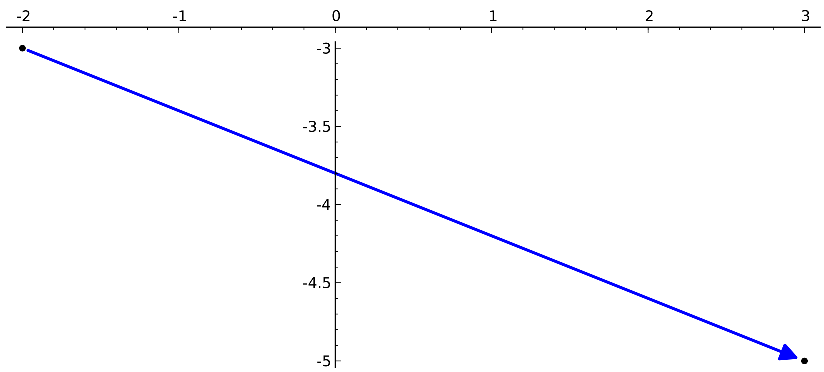
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = 5\sqrt{2}$. $\square$

Ejercicio 3.15. Dados los puntos del plano $P = (3, -5)$ y $Q = (-2, -3)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

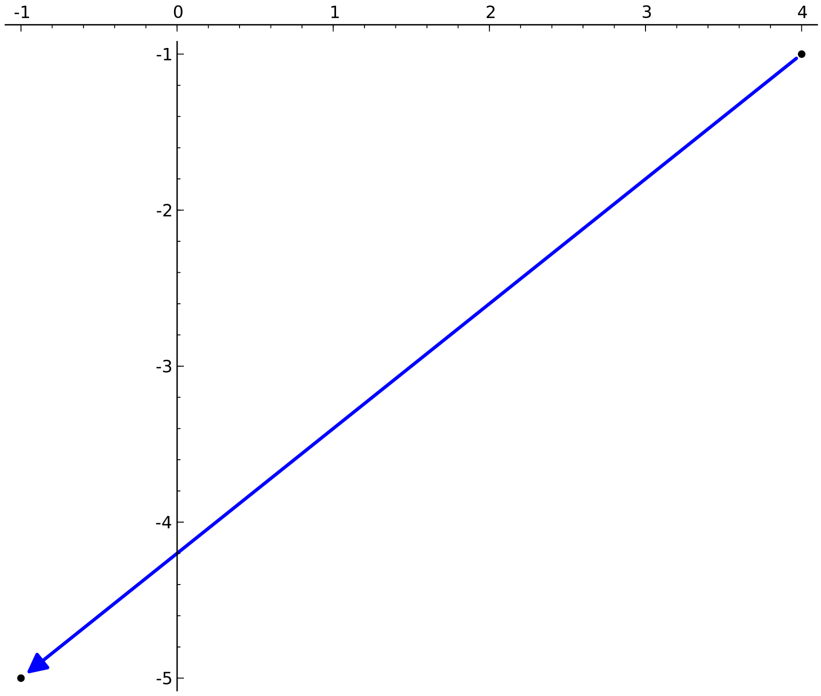
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = \sqrt{29}$. $\square$

Ejercicio 3.16. Dados los puntos del plano $P = (-1, -5)$ y $Q = (4, -1)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

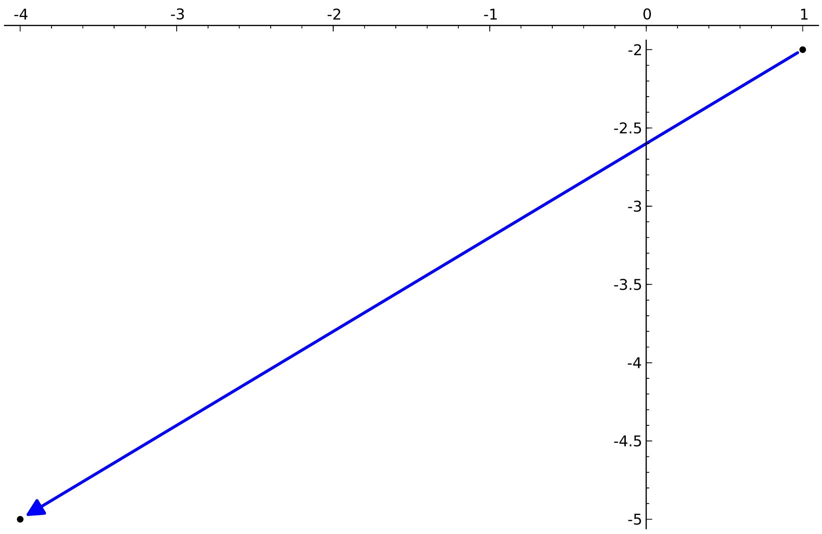
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = \sqrt{41}$. □

Ejercicio 3.17. Dados los puntos del plano $P = (-4, -5)$ y $Q = (1, -2)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

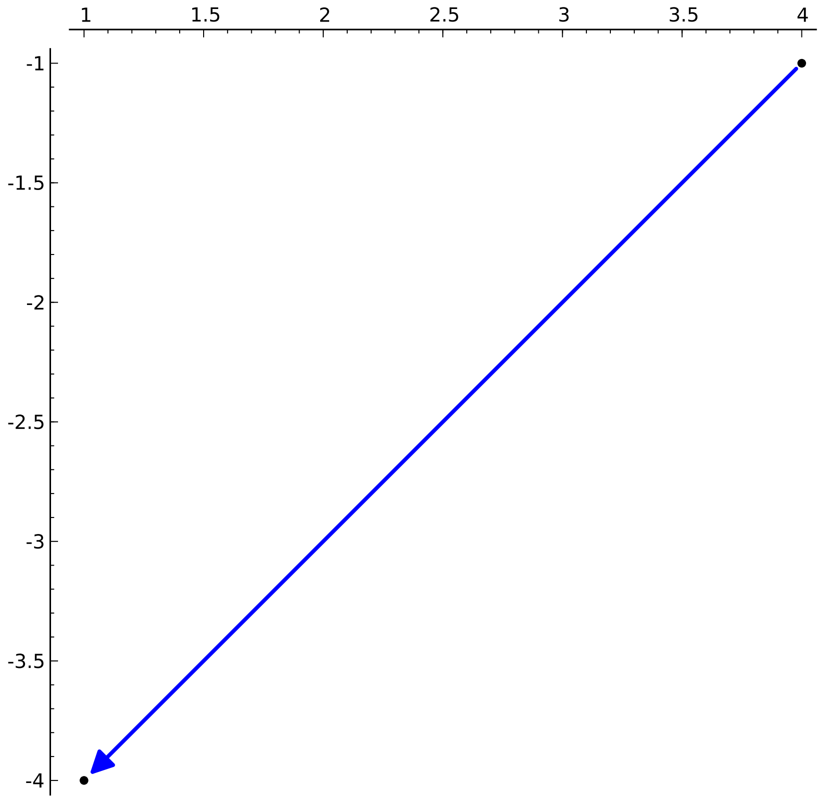
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = \sqrt{34}$. □

Ejercicio 3.18. Dados los puntos del plano $P = (1, -4)$ y $Q = (4, -1)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

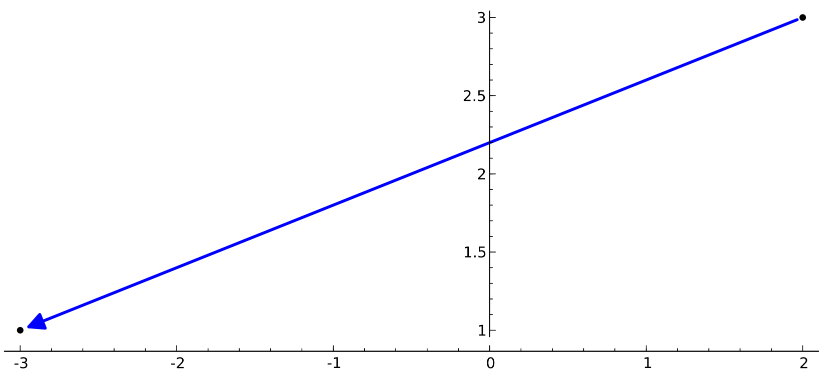
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = 3\sqrt{2}$. □

Ejercicio 3.19. Dados los puntos del plano $P = (-3, 1)$ y $Q = (2, 3)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

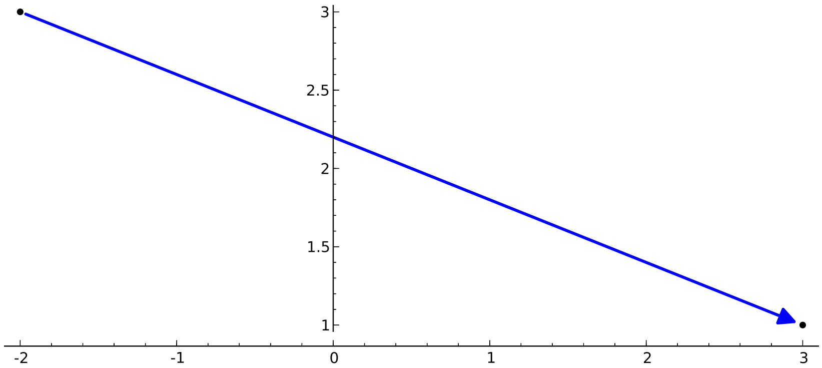
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = \sqrt{29}$. □

Ejercicio 3.20. Dados los puntos del plano $P = (3, 1)$ y $Q = (-2, 3)$, represéntalos gráficamente y calcula la distancia entre ellos.

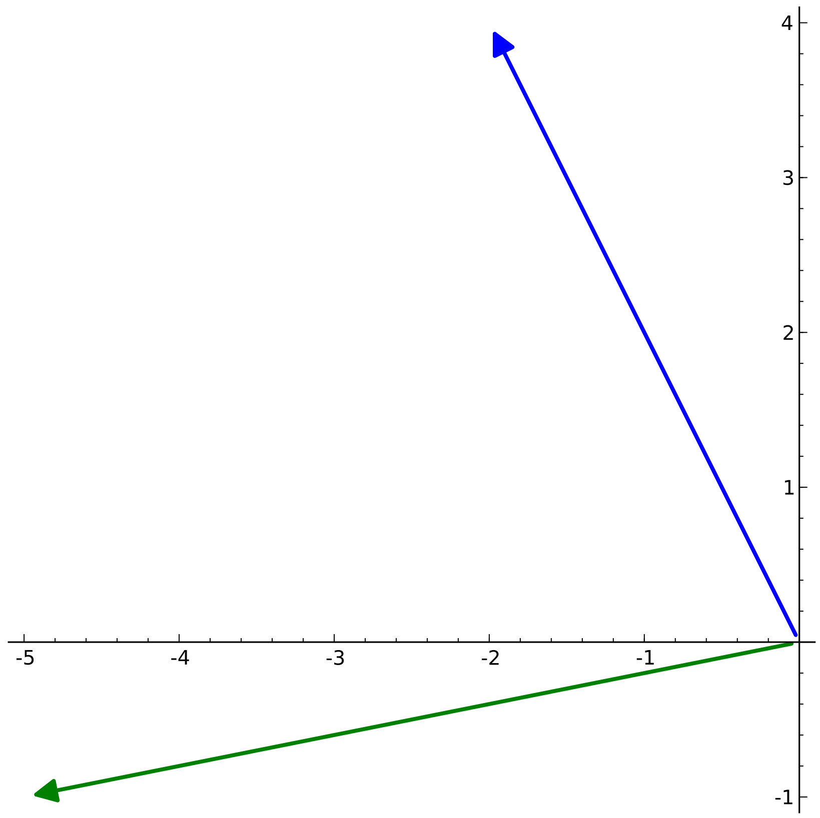
Solución. Vamos a pintar los dos puntos y el vector formado por ellos, que se calculará como extremo-origen.



El módulo del vector formado por ellos es $\sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2} = \sqrt{29}$. □

Ejercicio 3.21. Dados los vectores del plano $u = (-2, 4)$ y $v = (-5, -1)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

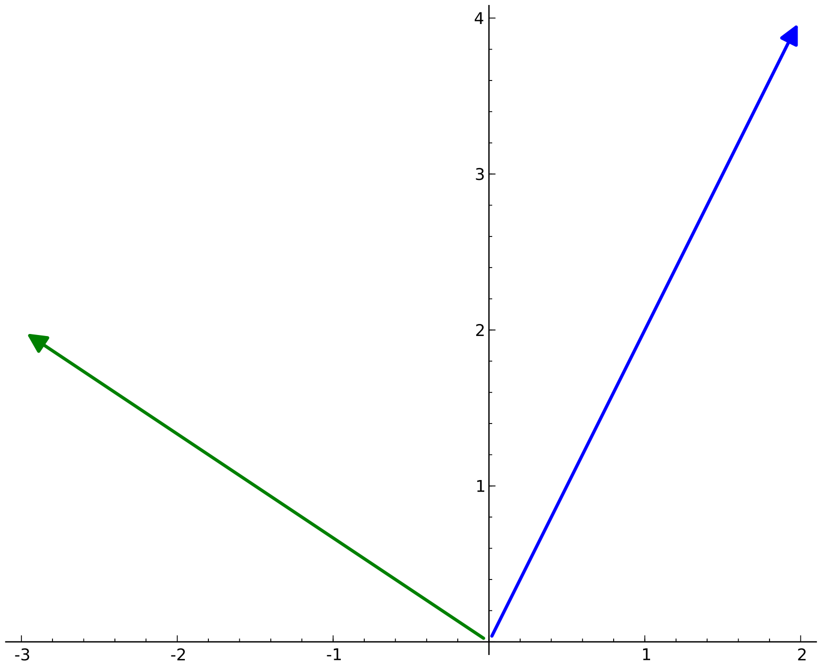


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2+y^2}$ que en el caso de u nos da $2\sqrt{5}$ y en el caso de v nos da $\sqrt{26}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 6$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{3}{130}\sqrt{130}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(\frac{3}{130}\sqrt{130}\right)$. $\square$

Ejercicio 3.22. Dados los vectores del plano $u = (2, 4)$ y $v = (-3, 2)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

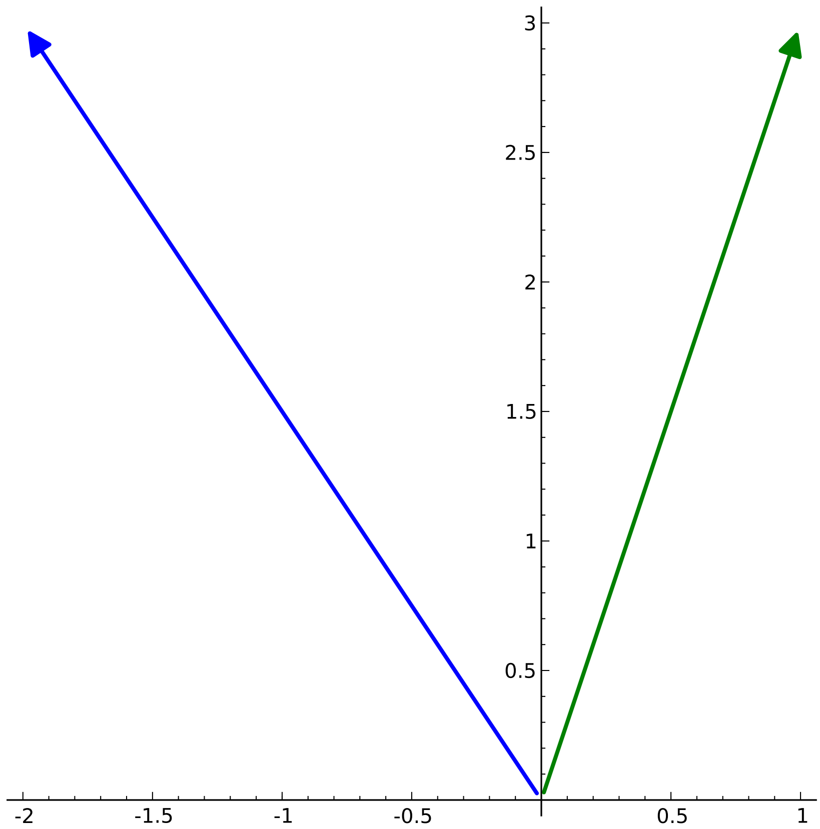


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2+y^2}$ que en el caso de u nos da $2\sqrt{5}$ y en el caso de v nos da $\sqrt{13}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 2$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{1}{65}\sqrt{65}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(\frac{1}{65}\sqrt{65}\right)$. $\square$

Ejercicio 3.23. Dados los vectores del plano $u = (-2, 3)$ y $v = (1, 3)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

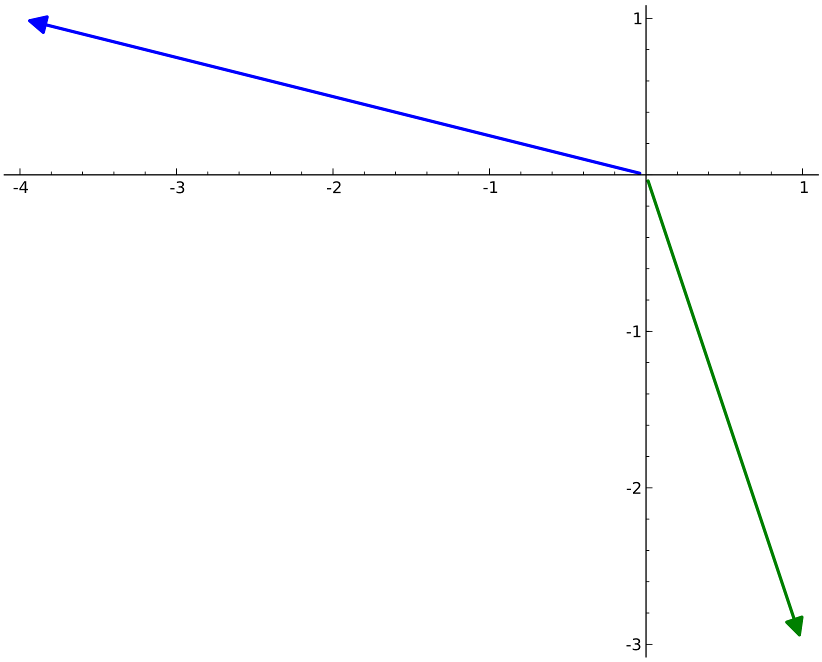


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2 + y^2}$ que en el caso de u nos da $\sqrt{13}$ y en el caso de v nos da $\sqrt{10}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 7$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{7}{130}\sqrt{130}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(\frac{7}{130}\sqrt{130}\right)$. $\square$

Ejercicio 3.24. Dados los vectores del plano $u = (-4, 1)$ y $v = (1, -3)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

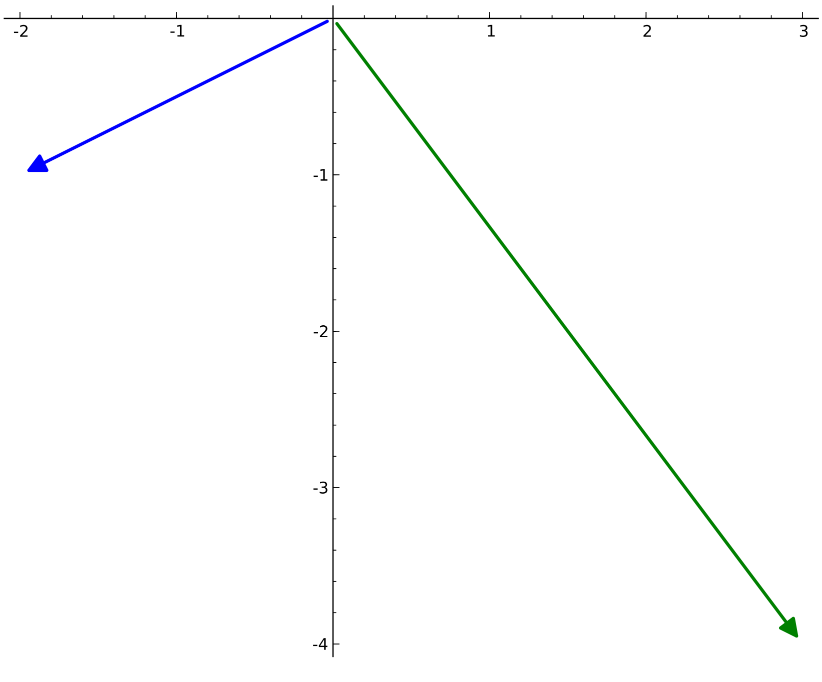


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2+y^2}$ que en el caso de u nos da $\sqrt{17}$ y en el caso de v nos da $\sqrt{10}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 = -7$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = -\frac{7}{170}\sqrt{170}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(-\frac{7}{170}\sqrt{170}\right)$. □

Ejercicio 3.25. Dados los vectores del plano $u = (-2,-1)$ y $v = (3,-4)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

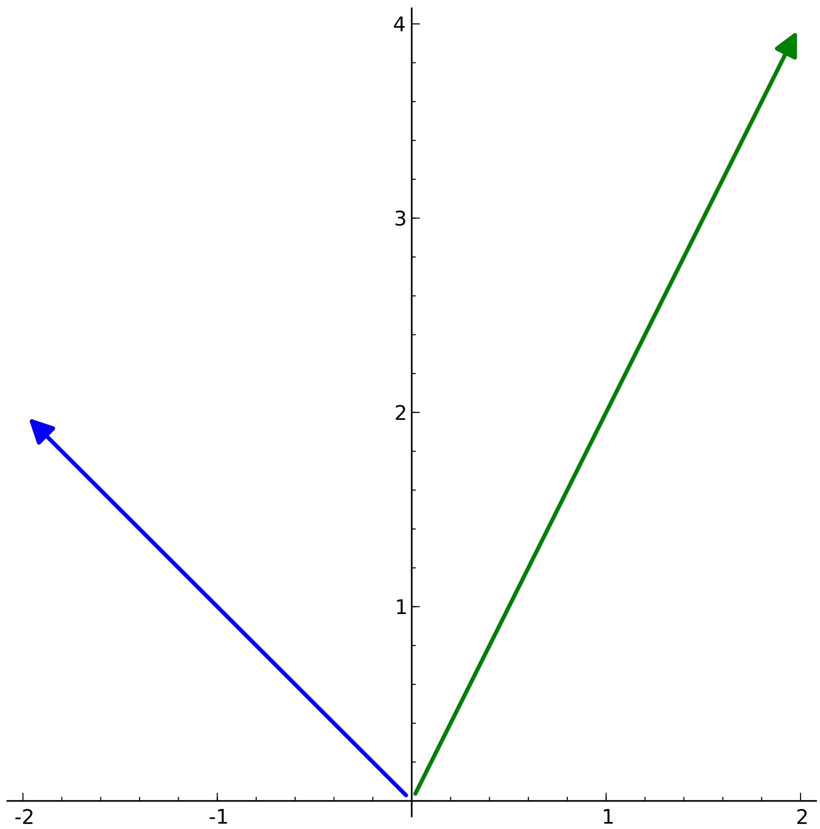


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2 + y^2}$ que en el caso de u nos da $\sqrt{5}$ y en el caso de v nos da 5.

El producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = -2$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = -\frac{2}{25}\sqrt{5}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(-\frac{2}{25}\sqrt{5}\right)$. $\square$

Ejercicio 3.26. Dados los vectores del plano $u = (-2, 2)$ y $v = (2, 4)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

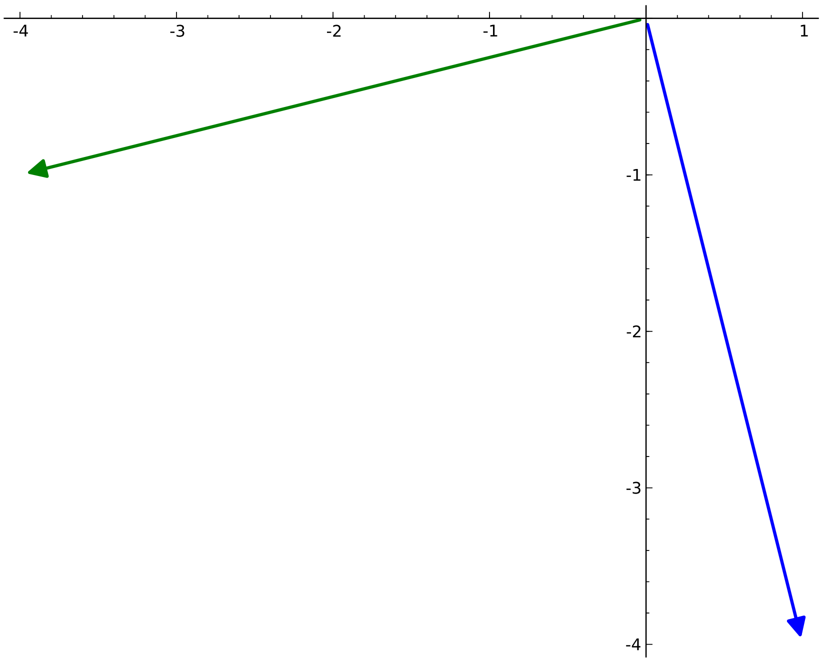


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2 + y^2}$ que en el caso de u nos da $2\sqrt{2}$ y en el caso de v nos da $2\sqrt{5}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 4$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{1}{10}\sqrt{10}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(\frac{1}{10}\sqrt{10}\right)$. $\square$

Ejercicio 3.27. Dados los vectores del plano $u = (1, -4)$ y $v = (-4, -1)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

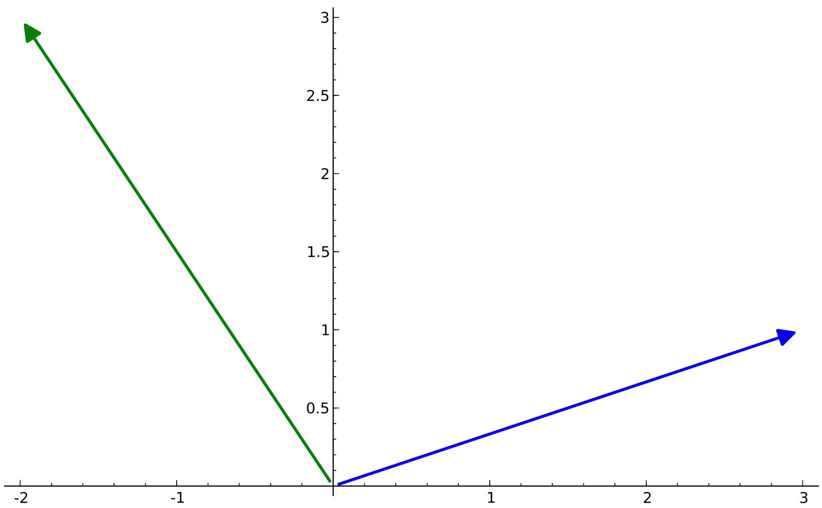


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2+y^2}$ que en el caso de u nos da $\sqrt{17}$ y en el caso de v nos da $\sqrt{17}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 = 0$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = 0$ por lo que el ángulo es $\frac{1}{2}\pi$. □

Ejercicio 3.28. Dados los vectores del plano $u = (3, 1)$ y $v = (-2, 3)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

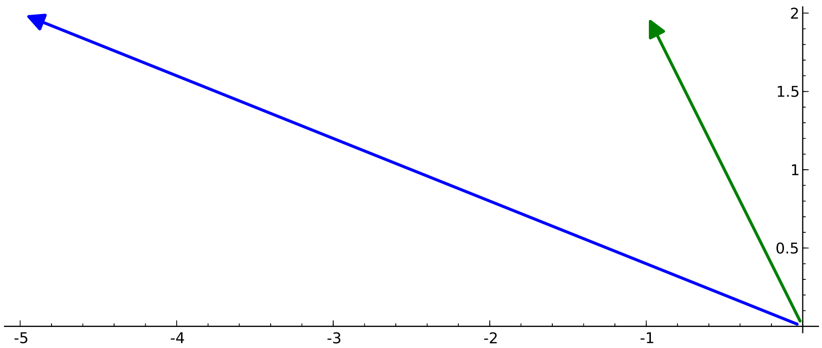


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2+y^2}$ que en el caso de u nos da $\sqrt{10}$ y en el caso de v nos da $\sqrt{13}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 = -3$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = -\frac{3}{130}\sqrt{130}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(-\frac{3}{130}\sqrt{130}\right)$. □

Ejercicio 3.29. Dados los vectores del plano $u = (-5, 2)$ y $v = (-1, 2)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.

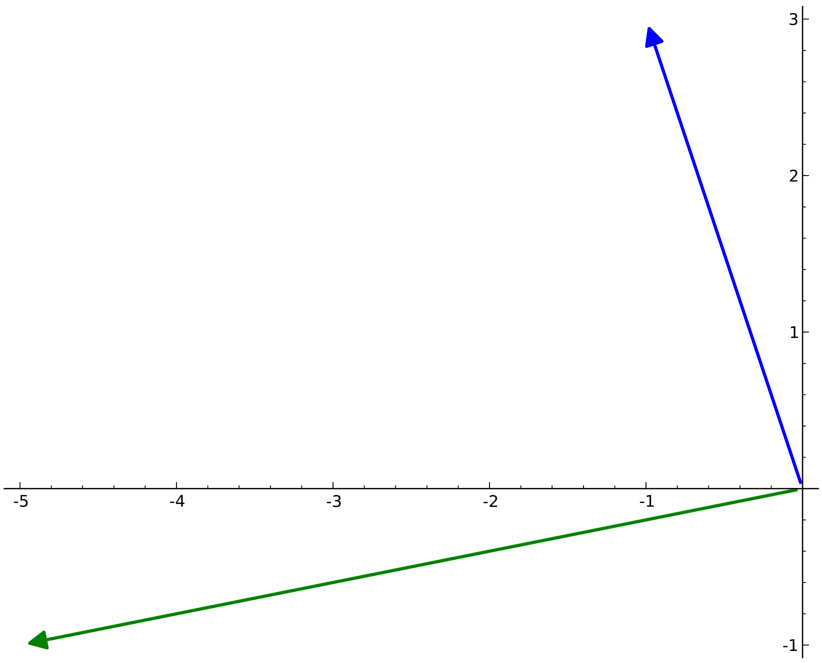


El módulo de un vector es $\sqrt{x^2 + y^2}$ que en el caso de u nos da $\sqrt{29}$ y en el caso de v nos da $\sqrt{5}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 = 9$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{9}{145}\sqrt{145}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(\frac{9}{145}\sqrt{145}\right)$. □

Ejercicio 3.30. Dados los vectores del plano $u = (-1, 3)$ y $v = (-5, -1)$, represéntalos gráficamente y calcula sus longitudes y el ángulo formado por ellos.

Solución. Empecemos pintando los dos vectores, pondremos u de color azul y v de color verde.



El módulo de un vector es $\sqrt{x^2 + y^2}$ que en el caso de u nos da $\sqrt{10}$ y en el caso de v nos da $\sqrt{26}$.

El producto escalar $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 = 2$ y el coseno del ángulo formado por estos vectores es $\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{1}{65}\sqrt{65}$ por lo que el ángulo es $\arccos\left(\frac{1}{65}\sqrt{65}\right)$. □

Ejercicio 3.31. Calcula la suma de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (1, 0, 0) \quad v = (0, 1, 1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u + v$ y también la suma $v + u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.32. Calcula la resta de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (0, 0, 1) \quad v = (1, 0, 0)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.33. Calcula la suma de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (1, 0, 0) \quad v = (0, 1, 1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u + v$ y también la suma $v + u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.34. Calcula la resta de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (1, 0, 0) \quad v = (0, 1, 0)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.35. Calcula la suma de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (1, 0, 0) \quad v = (0, 1, 1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u+v$ y también la suma $v+u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.36. Calcula la resta de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (1, 1, 0) \quad v = (0, 0, 1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.37. Calcula la suma de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (0, 1, 0) \quad v = (0, 0, 1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u+v$ y también la suma $v+u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.38. Calcula la resta de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (1, 1, 0) \quad v = (0, 1, 0)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.39. Calcula la suma de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (0, 1, 0) \quad v = (1, 0, 1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la suma de color rojo. Vamos a hacer la suma $u+v$ y también la suma $v+u$ que dan el mismo resultado, aunque por caminos diferentes. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.40. Calcula la resta de los siguientes vectores del espacio tridimensional, tanto de forma aritmética como gráfica:

$$u = (1, 0, 1) \quad v = (0, 0, 1)$$

Solución. Vamos a pintar el vector u de color azul, el vector v de color verde y la resta $u - v$ de color rojo. Para facilitar la visión tridimensional, pintaremos también el cubo de lado 1.

□

Ejercicio 3.41. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.42. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_2=-2F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=-1F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.43. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_2=\frac{1}{2}F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.44. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.45. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-1F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.46. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.47. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=-2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=\frac{1}{2}F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_2=-\frac{1}{2}F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.48. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=-2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=-2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.49. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=\frac{1}{2}F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=1F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=-1F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.50. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=-1F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=\frac{1}{2}F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{F_2=-2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.51. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=-1F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=-1F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.52. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.53. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.54. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.55. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=\frac{1}{2}F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=1F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=-\frac{1}{2}F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.56. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=\frac{1}{2}F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=-1F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.57. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_2=-2F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.58. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=\frac{1}{2}F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=1F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=\frac{1}{2}F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.59. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_2=1F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{F_2=-2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.60. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.61. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{10}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.62. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-1F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.63. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=-1F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.64. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{8} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.65. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.66. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.67. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-1F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.68. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.69. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=-2F_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.70. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.71. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-2F_1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=-1F_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.72. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-1F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.73. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{1}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.74. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-1F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.75. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.76. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=1F_1+F_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.77. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=2F_1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=1F_1+F_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=-\frac{1}{2}F_2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.78. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{F_2=-1F_2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes. □

Ejercicio 3.79. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_2=2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. $\square$

Ejercicio 3.80. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Como hay menos vectores que la dimensión del espacio, podemos deducir directamente que los vectores no van a ser generadores ni por lo tanto base. De todas formas procedemos a reducir la matriz para comprobar si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=\frac{1}{2}F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=1F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. $\square$

Ejercicio 3.81. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{2}{3}F_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{2}F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=3F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.82. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-1F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{1}{3}F_2}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_3=1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.83. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.84. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{3}F_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.85. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-2F_1+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=1F_2+F_3}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{2}F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.86. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=2F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=2F_1+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.87. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=-1F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=1F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3=-1F_1+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \overset{F_2=-\frac{1}{2}F_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \overset{F_3=-\frac{5}{2}F_2+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{F_3=-\frac{1}{3}F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.88. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_3=-\frac{1}{2}F_1+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.89. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-2F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=\frac{2}{19}F_3}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.90. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-2F_1+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_2}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango no coincide con la dimensión del espacio, estos vectores no son generadores.Como hay filas de ceros, estos vectores son linealmente dependientes. □

Ejercicio 3.91. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_2=1F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3=\frac{1}{2}F_1+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3=1F_2+F_3}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{F_3=\frac{1}{4}F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.92. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=-2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=-2F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3=-1F_2+F_3}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_3=-1F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.93. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-1F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{1}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{1}{3}F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.94. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-1F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=1F_2+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=\frac{2}{5}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.95. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{F_1=-\frac{1}{2}F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{F_3=1F_1+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \stackrel{F_2=2F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \stackrel{F_3=-\frac{3}{2}F_2+F_3}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \stackrel{F_3=-2F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{F_2\leftrightarrow F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.96. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{F_2=-1F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{F_3=-1F_2+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.97. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-2F_1+F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=2F_2+F_3}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=\frac{1}{4}F_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.98. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-1F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=\frac{1}{4}F_2}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-6F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-2F_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.99. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=\frac{1}{2}F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_2=2F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_3=-1F_1+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=-1F_2}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \overset{F_3=\frac{3}{2}F_2+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{F_3=\frac{1}{2}F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □

Ejercicio 3.100. Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes, generadores y/o base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1=-\frac{1}{2}F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2=2F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_3=-1F_1+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_2=-1F_2}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3=2F_2+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{F_3=\frac{1}{5}F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango coincide con la dimensión del espacio, estos vectores son generadores.Como no hay ninguna fila de ceros, estos vectores son linealmente independientes.Como son linealmente independientes y generadores, estos vectores son base. □