Curso 0: Matemáticas y sus Aplicaciones

Tema 3. Vectores, Bases y Distancias

Leandro Marín

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Murcia

2012

El Plano $\mathbb{R}^2$

- El descubrimiento del concepto de coordenadas cartesianas fue un avance muy importante en la historia de las matemáticas.

El Plano $\mathbb{R}^2$

- El descubrimiento del concepto de coordenadas cartesianas fue un avance muy importante en la historia de las matemáticas.
- Reciben el nombre en honor de René Descartes (1596-1650), el célebre filósofo y matemático francés, uno de los iniciadores de la geometría analítica.

El Plano $\mathbb{R}^2$

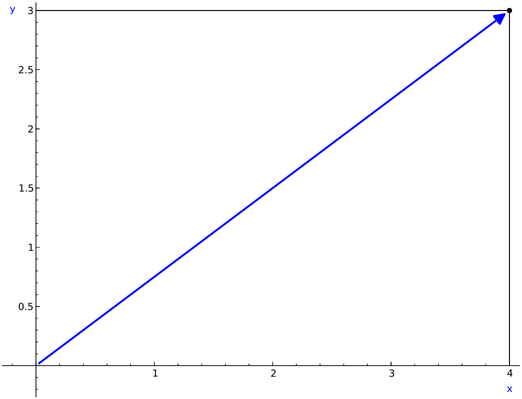
- El descubrimiento del concepto de coordenadas cartesianas fue un avance muy importante en la historia de las matemáticas.
- Reciben el nombre en honor de René Descartes (1596-1650), el célebre filósofo y matemático francés, uno de los iniciadores de la geometría analítica.
- El método es simple y todos estamos acostumbrados a él. Para representar el punto (x, y) trazamos dos ejes perpendiculares (el eje X y el eje Y) y marcamos en el eje X la primera coordenada y en el eje Y la segunda. Trazamos las líneas paralelas a los ejes que pasen por los puntos marcados y el punto de corte de esas líneas es el punto (x, y).

El Plano $\mathbb{R}^2$

- El descubrimiento del concepto de coordenadas cartesianas fue un avance muy importante en la historia de las matemáticas.
- Reciben el nombre en honor de René Descartes (1596-1650), el célebre filósofo y matemático francés, uno de los iniciadores de la geometría analítica.
- El método es simple y todos estamos acostumbrados a él. Para representar el punto (x, y) trazamos dos ejes perpendiculares (el eje X y el eje Y) y marcamos en el eje X la primera coordenada y en el eje Y la segunda. Trazamos las líneas paralelas a los ejes que pasen por los puntos marcados y el punto de corte de esas líneas es el punto (x, y).
- El vector de coordenadas (x, y) será el vector que tiene como origen el origen de coordenadas (punto de corte de los ejes) y como extremo el punto (x, y).

Vectores en el Plano

Representemos por ejemplo el vector de coordenadas $(4, 3)$ en el plano.



Aritmética de Vectores

- Los vectores se pueden sumar y restar.

Aritmética de Vectores

- Los vectores se pueden sumar y restar.
- Estas operaciones se hacen coordenada a coordenada, así $(-1,8)+(0,2)=(-1,10)$ ó $(1,-1)-(2,0)=(-1,-1)$.

Aritmética de Vectores

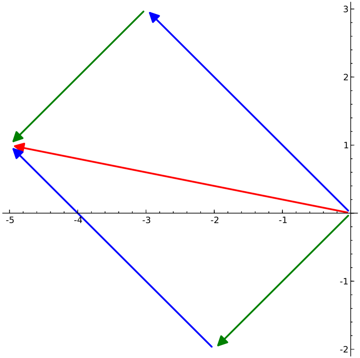
- Los vectores se pueden sumar y restar.
- Estas operaciones se hacen coordenada a coordenada, así $(-1,8)+(0,2)=(-1,10)$ ó $(1,-1)-(2,0)=(-1,-1)$.
- También se pueden multiplicar por números, $7\cdot(1,2)=(7,14)$

Aritmética de Vectores

- Los vectores se pueden sumar y restar.
- Estas operaciones se hacen coordenada a coordenada, así $(-1,8)+(0,2)=(-1,10)$ ó $(1,-1)-(2,0)=(-1,-1)$.
- También se pueden multiplicar por números, $7\cdot(1,2)=(7,14)$
- Es importante reconocer el sentido geométrico de estas operaciones.

Suma de Vectores (Método Gráfico)

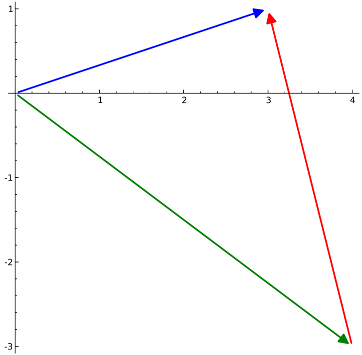
Dados dos vectores, podemos sumarlos de forma gráfica poniendo uno a continuación del otro. El orden de los sumandos no altera el resultado final.



Suma $u + v$ (rojo) con $u = (-3, 3)$ (azul) y $v = (-2, -2)$ (verde)

Resta de Vectores (Método Gráfico)

La resta de dos vectores u y v es el vector $u - v$ que es precisamente el vector que sumado a v nos da u, es decir, que es el vector que va desde el extremo de v hasta el extremo de u ya que la suma era recorrer los vectores uno tras otro.



Diferencia $u - v$ (rojo) con $u = (3, 1)$ (azul) y $v = (4, -3)$ (verde).

Multiplicación por Escalares

- La multiplicación de un vector por una constante también tiene sentido geométrico.

Multiplicación por Escalares

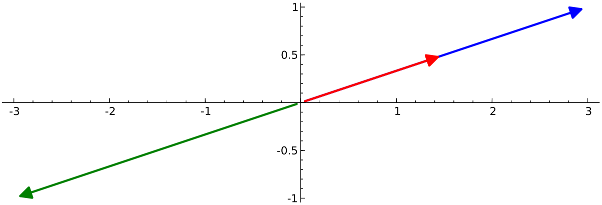
- La multiplicación de un vector por una constante también tiene sentido geométrico.
- Si multiplicamos por una constante positiva lo alargamos (si es mayor que 1) o lo encogemos (si está entre 0 y 1). Multiplicar por 1 nos deja fijo el vector y por 0 nos lo anula.

Multiplicación por Escalares

- La multiplicación de un vector por una constante también tiene sentido geométrico.
- Si multiplicamos por una constante positiva lo alargamos (si es mayor que 1) o lo encogemos (si está entre 0 y 1). Multiplicar por 1 nos deja fijo el vector y por 0 nos lo anula.
- Si multiplicamos por una constante negativa, lo ponemos en dirección contraria.

Multiplicación por Escalares (Método Gráfico)

En el siguiente dibujo podemos ver el vector $u = (3, 1)$ en azul, y los vectores $-u$ (verde) y $\frac{1}{2}u$ (rojo).



Distancias

- Llamaremos longitud (norma o módulo) de un vector $v = (x, y)$ al valor $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Distancias

- Llamaremos longitud (norma o módulo) de un vector $v = (x, y)$ al valor $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- Se suele representar con barras $\|v\|$, a veces con una sola barra como el valor absoluto.

Distancias

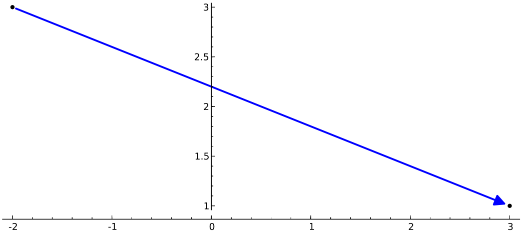
- Llamaremos longitud (norma o módulo) de un vector $v = (x, y)$ al valor $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- Se suele representar con barras $\|v\|$, a veces con una sola barra como el valor absoluto.
- En algunas disciplinas, sobre todo en física, se representa a veces los vectores con una flecha sobre ellos $\vec{v}$ y su módulo como v. En matemáticas suele usarse más las barras.

Distancias

- Llamaremos longitud (norma o módulo) de un vector $v = (x, y)$ al valor $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- Se suele representar con barras $\|v\|$, a veces con una sola barra como el valor absoluto.
- En algunas disciplinas, sobre todo en física, se representa a veces los vectores con una flecha sobre ellos $\vec{v}$ y su módulo como v. En matemáticas suele usarse más las barras.
- Llamaremos distancia entre los puntos u y v a $\|u - v\|$ (que es lo mismo que $\|v - u\|$)

Distancias entre Puntos

Vamos a calcular la distancia entre los puntos $(-2, 3)$ y $(3, 1)$.
Gráficamente representamos el vector que los une:



El módulo de dicho vector y por tanto la distancia entre los puntos es $\sqrt{(-2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{29}$

Algunas Propiedades de la Norma y la Distancia

- $\|u\| \geq 0$ siendo 0 si y sólamente si $u = 0$

Algunas Propiedades de la Norma y la Distancia

- $\|u\| \geq 0$ siendo 0 si y sólamente si $u = 0$
- $\|\alpha u\| = \alpha \|u\|$ para cualquier $\alpha \geq 0$ y cualquier vector u.

Algunas Propiedades de la Norma y la Distancia

- $\|u\| \geq 0$ siendo 0 si y sólamente si $u = 0$
- $\|\alpha u\| = \alpha \|u\|$ para cualquier $\alpha \geq 0$ y cualquier vector u.
- $\|-u\| = \|u\|$

Algunas Propiedades de la Norma y la Distancia

- $\|u\| \geq 0$ siendo 0 si y sólamente si $u = 0$
- $\|\alpha u\| = \alpha\|u\|$ para cualquier $\alpha \geq 0$ y cualquier vector u.
- $\|-u\| = \|u\|$
- La distancia entre u y v es $d(u, v) = \|u - v\|$, que es siempre mayor o igual que 0.

Algunas Propiedades de la Norma y la Distancia

- $\|u\| \geq 0$ siendo 0 si y sólamente si $u = 0$
- $\|\alpha u\| = \alpha \|u\|$ para cualquier $\alpha \geq 0$ y cualquier vector u.
- $\|-u\| = \|u\|$
- La distancia entre u y v es $d(u, v) = \|u - v\|$, que es siempre mayor o igual que 0.
- $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.

Algunas Propiedades de la Norma y la Distancia

- $\|u\| \geq 0$ siendo 0 si y sólamente si $u = 0$
- $\|\alpha u\| = \alpha\|u\|$ para cualquier $\alpha \geq 0$ y cualquier vector u.
- $\|-u\| = \|u\|$
- La distancia entre u y v es $d(u, v) = \|u - v\|$, que es siempre mayor o igual que 0.
- $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$ para cualesquiera u y v.

Algunas Propiedades de la Norma y la Distancia

- $\|u\| \geq 0$ siendo 0 si y sólamente si $u = 0$
- $\|\alpha u\| = \alpha\|u\|$ para cualquier $\alpha \geq 0$ y cualquier vector u.
- $\|-u\| = \|u\|$
- La distancia entre u y v es $d(u, v) = \|u - v\|$, que es siempre mayor o igual que 0.
- $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$ para cualesquiera u y v.
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ para cualesquiera u, v, w

Producto Escalar

- Dados dos vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ se define el producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$

Producto Escalar

- Dados dos vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ se define el producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$
- Como se puede ver, el producto escalar de dos vectores siempre es un número.

Producto Escalar

- Dados dos vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ se define el producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$
- Como se puede ver, el producto escalar de dos vectores siempre es un número.
- El producto escalar tiene propiedades similares a otros productos:

Producto Escalar

- Dados dos vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ se define el producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$
- Como se puede ver, el producto escalar de dos vectores siempre es un número.
- El producto escalar tiene propiedades similares a otros productos:
  - $u \cdot 0 = 0$

Producto Escalar

- Dados dos vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ se define el producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$
- Como se puede ver, el producto escalar de dos vectores siempre es un número.
- El producto escalar tiene propiedades similares a otros productos:
  - $u \cdot 0 = 0$
  - $u \cdot v = v \cdot u$

Producto Escalar

- Dados dos vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ se define el producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$
- Como se puede ver, el producto escalar de dos vectores siempre es un número.
- El producto escalar tiene propiedades similares a otros productos:
  - $u \cdot 0 = 0$
  - $u \cdot v = v \cdot u$
  - $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

Producto Escalar

- Dados dos vectores $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ se define el producto escalar $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$
- Como se puede ver, el producto escalar de dos vectores siempre es un número.
- El producto escalar tiene propiedades similares a otros productos:
    - $u \cdot 0 = 0$
    - $u \cdot v = v \cdot u$
    - $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
    - $u \cdot (\alpha v) = \alpha(u \cdot v)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$

Perpendicularidad

- Dos vectores no nulos u y v diremos que son perpendiculares u ortogonales si $u \cdot v = 0$.

Perpendicularidad

- Dos vectores no nulos u y v diremos que son perpendiculares u ortogonales si $u \cdot v = 0$.
- Por ejemplo los vectores $(0, 1)$ y $(1, 0)$ son perpendiculares.

Perpendicularidad

- Dos vectores no nulos u y v diremos que son perpendiculares u ortogonales si $u \cdot v = 0$.
- Por ejemplo los vectores $(0, 1)$ y $(1, 0)$ son perpendiculares.
- Si u y v son perpendiculares, entonces todos los vectores de la forma αu y todos los de la forma βv son perpendiculares entre sí para cualquier α y β números reales (no nulos).

Perpendicularidad

- Dos vectores no nulos u y v diremos que son perpendiculares u ortogonales si $u \cdot v = 0$.
- Por ejemplo los vectores $(0, 1)$ y $(1, 0)$ son perpendiculares.
- Si u y v son perpendiculares, entonces todos los vectores de la forma αu y todos los de la forma βv son perpendiculares entre sí para cualquier α y β números reales (no nulos).
- Otro ejemplo podría ser el de los vectores $(1, -1)$ y $(1, 1)$.

Ángulos

- Dados dos vectores no nulos, podemos calcular el ángulo que forman.

Ángulos

- Dados dos vectores no nulos, podemos calcular el ángulo que forman.
- Se define el coseno del ángulo α que forman dos vectores u y v como $cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

Ángulos

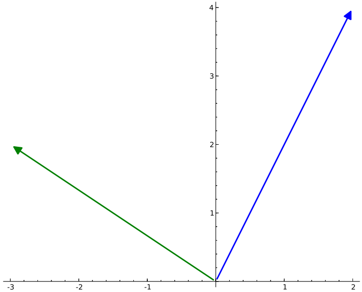
- Dados dos vectores no nulos, podemos calcular el ángulo que forman.
- Se define el coseno del ángulo α que forman dos vectores u y v como $cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$.
- El coseno de dos vectores perpendiculares es 0, por lo tanto forman un ángulo de 90 grados o lo que es lo mismo $\pi/2$ radianes. (Es conveniente que nos adaptemos a la notación de radianes en lugar de a la de grados).

Ángulos

- Dados dos vectores no nulos, podemos calcular el ángulo que forman.
- Se define el coseno del ángulo α que forman dos vectores u y v como $cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$.
- El coseno de dos vectores perpendiculares es 0, por lo tanto forman un ángulo de 90 grados o lo que es lo mismo $\pi/2$ radianes. (Es conveniente que nos adaptemos a la notación de radianes en lugar de a la de grados).
- Con esta fórmula, también tenemos que $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\alpha)$

Ángulos y Distancias

Vamos a calcular por ejemplo el ángulo formado por los vectores $u = (2,4)$ y $v = (-3,2)$



Aplicando la fórmula tenemos que el módulo de u nos da $2\sqrt{5}$ y el de v nos da $\sqrt{13}$. El producto $u \cdot v = -6 + 8 = 2$ y por tanto el $\cos(\alpha) = \frac{2}{2\sqrt{65}} = \frac{1}{65}\sqrt{65}$. Podríamos decir que $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{65}\sqrt{65}\right)$.

Rectas

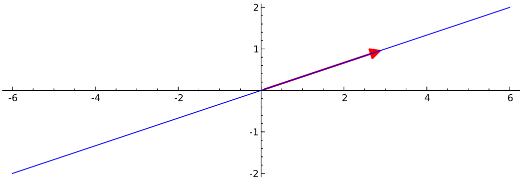
- Una de las operaciones que se puede hacer con un vector es multiplicarlo por una constante.

Rectas

- Una de las operaciones que se puede hacer con un vector es multiplicarlo por una constante.
- Si consideramos todos los múltiplos de un vector no nulo obtenemos una recta en la dirección del vector.

Rectas

- Una de las operaciones que se puede hacer con un vector es multiplicarlo por una constante.
- Si consideramos todos los múltiplos de un vector no nulo obtenemos una recta en la dirección del vector.



Combinaciones Lineales

- Matemáticamente eso se expresa como que un vector no nulo genera una recta.

Combinaciones Lineales

- Matemáticamente eso se expresa como que un vector no nulo genera una recta.
- Cuando tenemos dos vectores u y v, hablaremos del conjunto generado por ellos como todos los vectores que se pueden poner como αu y como βv para constantes α y β, pero también cualquier suma de vectores de esa forma. Es decir $\alpha u + \beta v$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Combinaciones Lineales

- Matemáticamente eso se expresa como que un vector no nulo genera una recta.
- Cuando tenemos dos vectores u y v, hablaremos del conjunto generado por ellos como todos los vectores que se pueden poner como αu y como βv para constantes α y β, pero también cualquier suma de vectores de esa forma. Es decir $\alpha u + \beta v$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Eso es lo que se conoce como combinaciones lineales de los vectores u y v.

Combinaciones Lineales

- Matemáticamente eso se expresa como que un vector no nulo genera una recta.
- Cuando tenemos dos vectores u y v, hablaremos del conjunto generado por ellos como todos los vectores que se pueden poner como αu y como βv para constantes α y β, pero también cualquier suma de vectores de esa forma. Es decir $\alpha u + \beta v$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Eso es lo que se conoce como combinaciones lineales de los vectores u y v.
- Entonces en términos matemáticos, diremos que el conjunto generado por dos vectores u y v es el formado por todas las combinaciones lineales que podamos hacer de dichos vectores.

Combinaciones Lineales

- Matemáticamente eso se expresa como que un vector no nulo genera una recta.
- Cuando tenemos dos vectores u y v, hablaremos del conjunto generado por ellos como todos los vectores que se pueden poner como αu y como βv para constantes α y β, pero también cualquier suma de vectores de esa forma. Es decir $\alpha u + \beta v$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Eso es lo que se conoce como combinaciones lineales de los vectores u y v.
- Entonces en términos matemáticos, diremos que el conjunto generado por dos vectores u y v es el formado por todas las combinaciones lineales que podamos hacer de dichos vectores.
- Si u y v marcan direcciones diferentes, el conjunto generado por ellos es un plano.

Combinaciones Lineales (II)

- Esto que hemos hecho para uno y dos vectores se puede generalizar para cualquier conjunto de vectores.

Combinaciones Lineales (II)

- Esto que hemos hecho para uno y dos vectores se puede generalizar para cualquier conjunto de vectores.
- El conjunto generado por los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son todas las combinaciones lineales posibles entre ellos.

Combinaciones Lineales (II)

- Esto que hemos hecho para uno y dos vectores se puede generalizar para cualquier conjunto de vectores.
- El conjunto generado por los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son todas las combinaciones lineales posibles entre ellos.
- En este curso cero, veremos vectores y generación exclusivamente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, pero los mismos principios se aplican en general.

Combinaciones Lineales (II)

- Esto que hemos hecho para uno y dos vectores se puede generalizar para cualquier conjunto de vectores.
- El conjunto generado por los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son todas las combinaciones lineales posibles entre ellos.
- En este curso cero, veremos vectores y generación exclusivamente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, pero los mismos principios se aplican en general.
- Un caso especial es el caso del conjunto vacío. Se dice que el conjunto generado por el conjunto vacío es el formado por el vector 0. No hay que preocuparse de esto de momento, simplemente considéralo una definición, aunque matemáticamente esta afirmación es coherente con otras construcciones más complejas que exceden el nivel de este curso cero.

Conjunto Generador

- Dado un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$, diremos que son generadores del espacio si cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de ellos.

Conjunto Generador

- Dado un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$, diremos que son generadores del espacio si cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de ellos.
- En el caso de $\mathbb{R}^3$ la definición es la misma. Unos vectores de $\mathbb{R}^3$ son generadores si cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede poner como combinación de ellos.

Conjunto Generador

- Dado un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$, diremos que son generadores del espacio si cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de ellos.
- En el caso de $\mathbb{R}^3$ la definición es la misma. Unos vectores de $\mathbb{R}^3$ son generadores si cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede poner como combinación de ellos.
- El ejemplo más sencillo es el de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$. Cualquier vector (x, y) se puede poner como $x(1, 0) + y(0, 1)$, es decir, como combinación lineal de estos dos vectores.

Conjunto Generador

- Dado un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$, diremos que son generadores del espacio si cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede poner como combinación lineal de ellos.
- En el caso de $\mathbb{R}^3$ la definición es la misma. Unos vectores de $\mathbb{R}^3$ son generadores si cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede poner como combinación de ellos.
- El ejemplo más sencillo es el de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$. Cualquier vector (x,y) se puede poner como $x(1,0)+y(0,1)$, es decir, como combinación lineal de estos dos vectores.
- Lo mismo sucede para los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Propiedades de los Conjuntos Generadores

- Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto generador y añadimos otro vector u, el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, u\}$ también es un conjunto generador.

Propiedades de los Conjuntos Generadores

- Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto generador y añadimos otro vector u, el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, u\}$ también es un conjunto generador.
- Eso es evidente puesto que si cualquier vector lo podemos poner como combinación de los primeros n vectores, entonces no tenemos más que sumar u multiplicado por 0 y obtendríamos el mismo vector.

Propiedades de los Conjuntos Generadores

- Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto generador y añadimos otro vector u, el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, u\}$ también es un conjunto generador.
- Eso es evidente puesto que si cualquier vector lo podemos poner como combinación de los primeros n vectores, entonces no tenemos más que sumar u multiplicado por 0 y obtendríamos el mismo vector.
- La propiedad de ser generador se conserva si aumentamos el conjunto.

Cómo saber si un Conjunto es Generador

Vamos a verlo con un ejemplo. Consideremos los vectores

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a ver si son generadores de $\mathbb{R}^2$. Para ello, cualquier vector (a, b) se tiene que poder poner como combinación de ellos. Lo que significa que el sistema de ecuaciones

$$-x = a \quad 2x + y = b$$

tiene que tener solución y eso sucede cuando el rango de la matriz de los coeficientes es menor o igual que el de la ampliada. Como en la apliada podemos poner cualquier vector, eso significa que el rango de la matriz de los coeficientes tiene que ser 2.

Generación en $\mathbb{R}^3$

- Para saber si un conjunto de vectores es generador de $\mathbb{R}^3$ tenemos que plantear el mismo procedimiento.

Generación en $\mathbb{R}^3$

- Para saber si un conjunto de vectores es generador de $\mathbb{R}^3$ tenemos que plantear el mismo procedimiento.
- Ponemos la matriz de los coeficientes del sistema (que no es mas que la matriz formada por los vectores) y calculamos el rango.

Generación en $\mathbb{R}^3$

- Para saber si un conjunto de vectores es generador de $\mathbb{R}^3$ tenemos que plantear el mismo procedimiento.
- Ponemos la matriz de los coeficientes del sistema (que no es mas que la matriz formada por los vectores) y calculamos el rango.
- Si el rango es máximo (en este caso 3) pongamos lo que pongamos en la ampliada, el sistema tiene solución.

Generación en $\mathbb{R}^3$

- Para saber si un conjunto de vectores es generador de $\mathbb{R}^3$ tenemos que plantear el mismo procedimiento.
- Ponemos la matriz de los coeficientes del sistema (que no es mas que la matriz formada por los vectores) y calculamos el rango.
- Si el rango es máximo (en este caso 3) pongamos lo que pongamos en la ampliada, el sistema tiene solución.
- Como el rango de una matriz y el de su traspuesta es el mismo, podemos utilizar cualquiera de las dos matrices.

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

Vamos a ver si los vectores

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Son generadores de $\mathbb{R}^3$. Para ello los ponemos en una matriz y calculamos el rango:

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

$$\xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3=1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{2}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

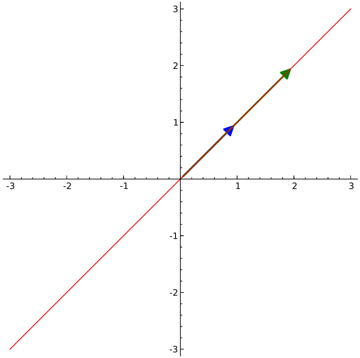
$$\xrightarrow{F_3=-\frac{1}{2}F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=3F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango es 3, el conjunto es generador.

- Anteriormente hemos dicho que dos vectores no nulos en direcciones diferentes generan un plano, mientras que uno solo generaba una recta.

- Anteriormente hemos dicho que dos vectores no nulos en direcciones diferentes generan un plano, mientras que uno solo generaba una recta.
- Pensemos en cual sería el espacio generado por los vectores $(1, 1)$ y $(2, 2)$

- Anteriormente hemos dicho que dos vectores no nulos en direcciones diferentes generan un plano, mientras que uno solo generaba una recta.
- Pensemos en cual sería el espacio generado por los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$



- Como se puede ver, el cualquier combinación de los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$ está dentro de la misma recta.

- Como se puede ver, el cualquier combinación de los vectores $(1, 1)$ y $(2, 2)$ está dentro de la misma recta.
- Por lo tanto estos dos vectores tienen la misma dirección y por lo tanto no generan un plano.

- Como se puede ver, el cualquier combinación de los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$ está dentro de la misma recta.
- Por lo tanto estos dos vectores tienen la misma dirección y por lo tanto no generan un plano.
- Esto es debido a que uno es múltiplo de otro $(2,2) = 2 \cdot (1,1)$ y también $(1,1) = \frac{1}{2}(2,2)$.

- Como se puede ver, el cualquier combinación de los vectores $(1,1)$ y $(2,2)$ está dentro de la misma recta.
- Por lo tanto estos dos vectores tienen la misma dirección y por lo tanto no generan un plano.
- Esto es debido a que uno es múltiplo de otro $(2,2) = 2 \cdot (1,1)$ y también $(1,1) = \frac{1}{2}(2,2)$.
- El espacio generado por un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es el mismo que el generado por los vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, u\}$ si este u que añadimos nuevo ya estaba en el espacio. Es lo que se conoce como dependencia lineal.

Independencia Lineal de dos vectores

- Empecemos viendo el caso de dos vectores y luego daremos la definición general.

Independencia Lineal de dos vectores

- Empecemos viendo el caso de dos vectores y luego daremos la definición general.
- Dos vectores u y v se dice que son linealmente independientes si la única forma en la que podemos combinarlos para obtener el vector 0 es con coeficientes nulos, es decir $\alpha u + \beta v = 0$ implica que $\alpha = \beta = 0$.

Independencia Lineal de dos vectores

- Empecemos viendo el caso de dos vectores y luego daremos la definición general.
- Dos vectores u y v se dice que son linealmente independientes si la única forma en la que podemos combinarlos para obtener el vector 0 es con coeficientes nulos, es decir $\alpha u + \beta v = 0$ implica que $\alpha = \beta = 0$.
- Por ejemplo $(1, 1)$ y $(2, 2)$ no son linealmente independientes porque $-2 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (2, 2) = (0, 0)$.

Independencia Lineal de dos vectores

- Empecemos viendo el caso de dos vectores y luego daremos la definición general.
- Dos vectores u y v se dice que son linealmente independientes si la única forma en la que podemos combinarlos para obtener el vector 0 es con coeficientes nulos, es decir $\alpha u + \beta v = 0$ implica que $\alpha = \beta = 0$.
- Por ejemplo $(1, 1)$ y $(2, 2)$ no son linealmente independientes porque $-2 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (2, 2) = (0, 0)$.
- Sin embargo los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son linealmente independientes.

Independencia Lineal de dos vectores

- Por ejemplo, los vectores $\{(1,1),(0,0)\}$ no son linealmente independientes porque podemos encontrar la combinación lineal $0\cdot(1,1)+1\cdot(0,0)=(0,0)$.

Independencia Lineal de dos vectores

- Por ejemplo, los vectores $\{(1,1),(0,0)\}$ no son linealmente independientes porque podemos encontrar la combinación lineal $0\cdot(1,1)+1\cdot(0,0)=(0,0)$.
- En cuanto uno de los coeficientes no sea cero, la combinación es válida.

Independencia Lineal de dos vectores

- Por ejemplo, los vectores $\{(1,1),(0,0)\}$ no son linealmente independientes porque podemos encontrar la combinación lineal $0 \cdot (1,1) + 1 \cdot (0,0) = (0,0)$.
- En cuanto uno de los coeficientes no sea cero, la combinación es válida.
- Eso impide que el vector 0 forme parte de ningún conjunto linealmente idependiente.

Independencia Lineal de dos vectores

- Cuando dos vectores son linealmente dependientes, podemos deducir que uno de ellos es múltiplo del otro.

Independencia Lineal de dos vectores

- Cuando dos vectores son linealmente dependientes, podemos deducir que uno de ellos es múltiplo del otro.
- Pueden incluso ser los dos múltiplos uno de otro.

Independencia Lineal de dos vectores

- Cuando dos vectores son linealmente dependientes, podemos deducir que uno de ellos es múltiplo del otro.
- Pueden incluso ser los dos múltiplos uno de otro.
- En el caso $\{(1,1),(0,0)\}$ sólamente podemos poner $(0,0) = 0 \cdot (1,1)$

Independencia Lineal de dos vectores

- Cuando dos vectores son linealmente dependientes, podemos deducir que uno de ellos es múltiplo del otro.
- Pueden incluso ser los dos múltiplos uno de otro.
- En el caso $\{(1,1),(0,0)\}$ sólamente podemos poner $(0,0) = 0 \cdot (1,1)$
- En el caso $\{(1,1),(2,2)\}$ podemos hacerlo en los dos sentidos $(2,2) = 2 \cdot (1,1)$ y también $(1,1) = \frac{1}{2}(2,2)$

Independencia Lineal de dos vectores

- Con las propiedades vistas anteriormente, suele ser fácil ver a simple vista si dos vectores son linealmente dependientes, porque uno de ellos es múltiplo del otro.

Independencia Lineal de dos vectores

- Con las propiedades vistas anteriormente, suele ser fácil ver a simple vista si dos vectores son linealmente dependientes, porque uno de ellos es múltiplo del otro.
- Si queremos resolverlo de forma sistemática, lo que tenemos que hacer es plantear la combinación lineal de ellos con coeficientes x, y igualada a 0 y resolver el sistema de ecuaciones.

Independencia Lineal de dos vectores

- Con las propiedades vistas anteriormente, suele ser fácil ver a simple vista si dos vectores son linealmente dependientes, porque uno de ellos es múltiplo del otro.
- Si queremos resolverlo de forma sistemática, lo que tenemos que hacer es plantear la combinación lineal de ellos con coeficientes x, y igualada a 0 y resolver el sistema de ecuaciones.
- Al estar igualado a 0, el sistema tiene siempre al menos una solución, la solución 0 (es un sistema homogéneo) pero si el sistema es compatible indeterminado, lo cual sucede si el rango de la matriz de los coeficientes es menor que 2, entonces hay soluciones distintas de cero, de hecho hay infinitas soluciones.

Independencia Lineal de dos vectores

- Todo lo que hemos dicho para el caso de dos vectores de $\mathbb{R}^2$ sería aplicable a dos vectores de $\mathbb{R}^3$ sin mas que añadir una tercera coordenada en todo el razonamiento.

Independencia Lineal de dos vectores

- Todo lo que hemos dicho para el caso de dos vectores de $\mathbb{R}^2$ sería aplicable a dos vectores de $\mathbb{R}^3$ sin mas que añadir una tercera coordenada en todo el razonamiento.
- Así, si dos vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes entonces siempre uno de ellos es múltiplo de otro.

Independencia Lineal de dos vectores

- Todo lo que hemos dicho para el caso de dos vectores de $\mathbb{R}^2$ sería aplicable a dos vectores de $\mathbb{R}^3$ sin mas que añadir una tercera coordenada en todo el razonamiento.
- Así, si dos vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes entonces siempre uno de ellos es múltiplo de otro.
- Se podría plantear también en este caso el sistema de ecuaciones y ver si el rango de la matriz de los coeficientes es 2 (nunca puede ser mayor de 2 porque sólo tiene dos vectores) o menor que dos. Si es 2 el sistema es compatible determinado y la única combinación posible es la trivial. En caso contrario tenemos infinitas combinaciones.

Independencia Lineal (Definición General)

- Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ diremos que son linealmente independientes si la única combinación lineal de ellos con la que se puede obtener el vector 0 es con todos los coeficientes iguales a 0, es decir

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Independencia Lineal (Definición General)

- Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ diremos que son linealmente independientes si la única combinación lineal de ellos con la que se puede obtener el vector 0 es con todos los coeficientes iguales a 0, es decir

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

- Con esta condieración, podemos ir generalizando las propiedades que teníamos para dos vectores.

Independencia Lineal (Definición General)

- Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ diremos que son linealmente independientes si la única combinación lineal de ellos con la que se puede obtener el vector 0 es con todos los coeficientes iguales a 0, es decir

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

- Con esta condieración, podemos ir generalizando las propiedades que teníamos para dos vectores.
- Si el vector 0 es uno de los vectores de la familia, entonces seguro que los vectores son dependientes.

Independencia Lineal (Definición General)

- Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ diremos que son linealmente independientes si la única combinación lineal de ellos con la que se puede obtener el vector 0 es con todos los coeficientes iguales a 0, es decir

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

- Con esta condieración, podemos ir generalizando las propiedades que teníamos para dos vectores.
- Si el vector 0 es uno de los vectores de la familia, entonces seguro que los vectores son dependientes.
- Una familia de vectores es independiente si y sólo si al menos uno de ellos se puede poner como combinación de los otros.

Independencia Lineal (Definición General)

- Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ diremos que son linealmente independientes si la única combinación lineal de ellos con la que se puede obtener el vector 0 es con todos los coeficientes iguales a 0, es decir

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

- Con esta condieración, podemos ir generalizando las propiedades que teníamos para dos vectores.
- Si el vector 0 es uno de los vectores de la familia, entonces seguro que los vectores son dependientes.
- Una familia de vectores es independiente si y sólo si al menos uno de ellos se puede poner como combinación de los otros.
- Tal y como sucedía en el caso de dos vectores, puede que no todos los vectores se puedan poner como combinación de los otros, pero en cuanto uno de ellos se pueda poner, los vectores ya son dependientes.

Cálculo de la Independencia Lineal

- Para demostrar la independencia (o no) de una familia de vectores, tendríamos que plantear el sistema correspondiente y ver si tiene alguna solución no trivial.

Cálculo de la Independencia Lineal

- Para demostrar la independencia (o no) de una familia de vectores, tendríamos que plantear el sistema correspondiente y ver si tiene alguna solución no trivial.
- Eso es equivalente a calcular el rango de la matriz de los coeficientes (o de su traspuesta)

Cálculo de la Independencia Lineal

- Para demostrar la independencia (o no) de una familia de vectores, tendríamos que plantear el sistema correspondiente y ver si tiene alguna solución no trivial.
- Eso es equivalente a calcular el rango de la matriz de los coeficientes (o de su traspuesta)
- La forma más directa es poner los vectores como filas de la matriz y reducirla, si aparece una fila de ceros entonces el rango no es máximo y los vectores son dependientes. Si no aparece ninguna fila de ceros, los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo

Vamos a ver si los siguientes vectores son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para ello los ponemos como filas en una matriz y hacemos la reducción para calcular el rango.

Ejemplo (II)

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1=-\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-2F_1+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=-\frac{2}{3}F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=-\frac{1}{2}F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=3F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el rango es 3, los vectores son independientes.

Subconjuntos de Conjuntos Independientes

- Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, cualquier subconjunto suyo también lo es.

Subconjuntos de Conjuntos Independientes

- Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, cualquier subconjunto suyo también lo es.
- La razón es bastante directa, si tenemos una combinación lineal no trivial de los vectores igualada a 0, la podemos ampliar a cualquier conjunto más grande poniendo coeficientes 0 en los vectores añadidos.

Subconjuntos de Conjuntos Independientes

- Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, cualquier subconjunto suyo también lo es.
- La razón es bastante directa, si tenemos una combinación lineal no trivial de los vectores igualada a 0, la podemos ampliar a cualquier conjunto más grande poniendo coeficientes 0 en los vectores añadidos.
- La nueva combinación lineal tendrá algún coeficiente no nulo (los que provengan de la combinación original) por lo tanto los vectores no serán independientes.

Definición de Base

- Una base es un conjunto de vectores linealmente independiente y generador.

Definición de Base

- Una base es un conjunto de vectores linealmente independiente y generador.
- Como hemos visto antes, los subconjuntos de conjuntos independientes son independientes y los conjuntos que contienen conjuntos generadores son generadores.

Definición de Base

- Una base es un conjunto de vectores linealmente independiente y generador.
- Como hemos visto antes, los subconjuntos de conjuntos independientes son independientes y los conjuntos que contienen conjuntos generadores son generadores.
- Las bases están en un punto intermedio y su número de elementos recibe un nombre especial, es la dimensión del espacio.

Definición de Base

- Una base es un conjunto de vectores linealmente independiente y generador.
- Como hemos visto antes, los subconjuntos de conjuntos independientes son independientes y los conjuntos que contienen conjuntos generadores son generadores.
- Las bases están en un punto intermedio y su número de elementos recibe un nombre especial, es la dimensión del espacio.
- Así en $\mathbb{R}^2$ todas las bases tienen dos elementos y en $\mathbb{R}^3$ todas las bases tendrán tres elementos.

- De todo conjunto generador se puede sacar una base.

- De todo conjunto generador se puede sacar una base.
- Lo que hay que hacer es ir quitando uno a uno los vectores que sean combinación lineal de los demás hasta que el conjunto sea independiente.

- De todo conjunto generador se puede sacar una base.
- Lo que hay que hacer es ir quitando uno a uno los vectores que sean combinación lineal de los demás hasta que el conjunto sea independiente.
- Por lo tanto, nunca podemos tener conjuntos generadores que tengan menos elementos que la dimensión del espacio, y si un conjunto es generador y tiene exactamente el número de elementos que da la dimensión, entonces es base.

- De todo conjunto generador se puede sacar una base.
- Lo que hay que hacer es ir quitando uno a uno los vectores que sean combinación lineal de los demás hasta que el conjunto sea independiente.
- Por lo tanto, nunca podemos tener conjuntos generadores que tengan menos elementos que la dimensión del espacio, y si un conjunto es generador y tiene exactamente el número de elementos que da la dimensión, entonces es base.
- En el caso de $\mathbb{R}^2$ podemos deducir que los conjuntos generadores tienen dos o más elementos y si son generadores y tienen dos elementos son base.

- De todo conjunto generador se puede sacar una base.
- Lo que hay que hacer es ir quitando uno a uno los vectores que sean combinación lineal de los demás hasta que el conjunto sea independiente.
- Por lo tanto, nunca podemos tener conjuntos generadores que tengan menos elementos que la dimensión del espacio, y si un conjunto es generador y tiene exactamente el número de elementos que da la dimensión, entonces es base.
- En el caso de $\mathbb{R}^2$ podemos deducir que los conjuntos generadores tienen dos o más elementos y si son generadores y tienen dos elementos son base.
- Para $\mathbb{R}^3$, todos los conjuntos generadores tienen tres o más elementos, y si tienen exactamente tres es porque son base.

- De todo conjunto generador se puede sacar una base.
- Lo que hay que hacer es ir quitando uno a uno los vectores que sean combinación lineal de los demás hasta que el conjunto sea independiente.
- Por lo tanto, nunca podemos tener conjuntos generadores que tengan menos elementos que la dimensión del espacio, y si un conjunto es generador y tiene exactamente el número de elementos que da la dimensión, entonces es base.
- En el caso de $\mathbb{R}^2$ podemos deducir que los conjuntos generadores tienen dos o más elementos y si son generadores y tienen dos elementos son base.
- Para $\mathbb{R}^3$, todos los conjuntos generadores tienen tres o más elementos, y si tienen exactamente tres es porque son base.
- En el sentido contrario no es cierto, un conjunto puede tener muchos vectores y no ser generador $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ no es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.

- Todo conjunto linealmente independiente se puede ampliar a una base.

- Todo conjunto linealmente independiente se puede ampliar a una base.
- Para ello, vamos metiendo en el conjunto uno a uno los vectores que no estén en el espacio generado, hasta que el conjunto genere todo el espacio.

- Todo conjunto linealmente independiente se puede ampliar a una base.
- Para ello, vamos metiendo en el conjunto uno a uno los vectores que no estén en el espacio generado, hasta que el conjunto genere todo el espacio.
- Por lo tanto, nunca podemos tener conjuntos linealmente independientes con más elementos que la dimensión del espacio.

- Todo conjunto linealmente independiente se puede ampliar a una base.
- Para ello, vamos metiendo en el conjunto uno a uno los vectores que no estén en el espacio generado, hasta que el conjunto genere todo el espacio.
- Por lo tanto, nunca podemos tener conjuntos linealmente independientes con más elementos que la dimensión del espacio.
- En el caso de $\mathbb{R}^2$, cualquier conjunto de tres o más vectores sabemos que es dependiente y en $\mathbb{R}^3$ cualquier conjunto de más de tres vectores lo es.

- Todo conjunto linealmente independiente se puede ampliar a una base.
- Para ello, vamos metiendo en el conjunto uno a uno los vectores que no estén en el espacio generado, hasta que el conjunto genere todo el espacio.
- Por lo tanto, nunca podemos tener conjuntos linealmente independientes con más elementos que la dimensión del espacio.
- En el caso de $\mathbb{R}^2$, cualquier conjunto de tres o más vectores sabemos que es dependiente y en $\mathbb{R}^3$ cualquier conjunto de más de tres vectores lo es.
- En el sentido contrario no es cierto, $\{(1,1,1),(2,2,2)\}$ es un conjunto de dos vectores dependiente en $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas

- Supongamos que tenemos una base de $\mathbb{R}^2$, $B = \{u, v\}$ y un vector cualquiera h.

Coordenadas

- Supongamos que tenemos una base de $\mathbb{R}^2$, $B = \{u, v\}$ y un vector cualquiera h.
- Por ser B generador, podemos encontrar una combinación lineal tal que $h = \alpha u + \beta v$

Coordenadas

- Supongamos que tenemos una base de $\mathbb{R}^2$, $B = \{u, v\}$ y un vector cualquiera h.
- Por ser B generador, podemos encontrar una combinación lineal tal que $h = \alpha u + \beta v$
- Además, si hubiera otra combinación $h = \lambda u + \mu v$ podríamos decir que

$$0 = u - u = \alpha u + \beta v - \lambda u - \mu v = (\alpha - \lambda)u + (\beta - \mu)v$$

y como los vectores son idependientes, deducimos que $\alpha - \lambda = 0$ y $\beta - \mu = 0$. Esto prueba que los valores α y β existen y son únicos.

Coordenadas

- Supongamos que tenemos una base de $\mathbb{R}^2$, $B = \{u, v\}$ y un vector cualquiera h.
- Por ser B generador, podemos encontrar una combinación lineal tal que $h = \alpha u + \beta v$
- Además, si hubiera otra combinación $h = \lambda u + \mu v$ podríamos decir que

  $$0 = u - u = \alpha u + \beta v - \lambda u - \mu v = (\alpha - \lambda)u + (\beta - \mu)v$$

  y como los vectores son idependientes, deducimos que $\alpha - \lambda = 0$ y $\beta - \mu = 0$. Esto prueba que los valores α y β existen y son únicos.
- Esos valores reciben un nombre, se llaman las coordenadas del vector h en la base B.

Coordenadas

- Supongamos que tenemos una base de $\mathbb{R}^2$, $B = \{u, v\}$ y un vector cualquiera h.
- Por ser B generador, podemos encontrar una combinación lineal tal que $h = \alpha u + \beta v$
- Además, si hubiera otra combinación $h = \lambda u + \mu v$ podríamos decir que

$$0 = u - u = \alpha u + \beta v - \lambda u - \mu v = (\alpha - \lambda)u + (\beta - \mu)v$$

  y como los vectores son idependientes, deducimos que $\alpha - \lambda = 0$ y $\beta - \mu = 0$. Esto prueba que los valores α y β existen y son únicos.
- Esos valores reciben un nombre, se llaman las coordenadas del vector h en la base B.
- Para calcularlas, podemos plantear el sistema de ecuaciones correspondiente y resolverlo.

Coordenadas en $\mathbb{R}^3$

- Podemos hacer lo mismo en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que tenemos una base $B = \{u, v, w\}$ y un vector cualquiera h.

Coordenadas en $\mathbb{R}^3$

- Podemos hacer lo mismo en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que tenemos una base $B = \{u, v, w\}$ y un vector cualquiera h.
- Por ser B generador, podemos encontrar una combinación lineal tal que $h = \alpha u + \beta v + \gamma w$

Coordenadas en $\mathbb{R}^3$

- Podemos hacer lo mismo en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que tenemos una base $B = \{u, v, w\}$ y un vector cualquiera h.
- Por ser B generador, podemos encontrar una combinación lineal tal que $h = \alpha u + \beta v + \gamma w$
- Además, si hubiera otra combinación $h = \lambda u + \mu v + \epsilon w$ podríamos deducir como antes que $\alpha - \lambda = 0$, $\beta - \mu = 0$ y $\gamma - \epsilon = 0$. Esto prueba que los valores α, β y γ existen y son únicos.

Coordenadas en $\mathbb{R}^3$

- Podemos hacer lo mismo en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que tenemos una base $B = \{u, v, w\}$ y un vector cualquiera h.
- Por ser B generador, podemos encontrar una combinación lineal tal que $h = \alpha u + \beta v + \gamma w$
- Además, si hubiera otra combinación $h = \lambda u + \mu v + \epsilon w$ podríamos deducir como antes que $\alpha - \lambda = 0$, $\beta - \mu = 0$ y $\gamma - \epsilon = 0$. Esto prueba que los valores α, β y γ existen y son únicos.
- Esos valores reciben el nombre de coordenadas del vector h en la base B.

Bases Canónicas

- En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tenemos unas bases especiales que reciben el nombre de bases canónicas.

Bases Canónicas

- En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tenemos unas bases especiales que reciben el nombre de bases canónicas.
- Son $B = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Bases Canónicas

- En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tenemos unas bases especiales que reciben el nombre de bases canónicas.
- Son $B = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
- En estas bases las coordenadas de un vector (x, y) son precisamente x e y en el caso de $\mathbb{R}^2$ y las de un vector (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ son precisamente x, y y z.

Bases Canónicas

- En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tenemos unas bases especiales que reciben el nombre de bases canónicas.
- Son $B = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
- En estas bases las coordenadas de un vector (x, y) son precisamente x e y en el caso de $\mathbb{R}^2$ y las de un vector (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ son precisamente x, y y z.
- Siempre que podemos elegir una base sin restricciones, lo mejor suele ser elegir la canónica, puesto que las cuentas salen mucho más sencillas.