Curso 0: Matemáticas y sus Aplicaciones

Tema 4. Transformaciones del Plano y el Espacio

Leandro Marín

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Murcia

2012

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Podemos realizar transformaciones del plano y el espacio utilizando fórmulas.

- Podemos realizar transformaciones del plano y el espacio utilizando fórmulas.
- Por ejemplo, supongamos que tenemos $f(x,y) = (2x - y, x + y)$.

- Podemos realizar transformaciones del plano y el espacio utilizando fórmulas.
- Por ejemplo, supongamos que tenemos $f(x,y) = (2x - y, x + y)$.
- Este ejemplo nos da una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

- Podemos realizar transformaciones del plano y el espacio utilizando fórmulas.
- Por ejemplo, supongamos que tenemos $f(x, y) = (2x - y, x + y)$.
- Este ejemplo nos da una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- En este tema nos vamos a ocupar de un tipo especial de aplicaciones, que reciben el nombre de lineales.

- Podemos realizar transformaciones del plano y el espacio utilizando fórmulas.
- Por ejemplo, supongamos que tenemos $f(x,y) = (2x - y, x + y)$.
- Este ejemplo nos da una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- En este tema nos vamos a ocupar de un tipo especial de aplicaciones, que reciben el nombre de lineales.
- Una aplicación f es lineal si $f(au + bv) = af(u) + bf(v)$ para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ y cualquier vector u y v.

Matrices Asociadas

- Si consideramos vectores columna, podemos establecer una aplicación lineal multiplicando por matrices.

Matrices Asociadas

- Si consideramos vectores columna, podemos establecer una aplicación lineal multiplicando por matrices.
- Por ejemplo, si tenemos una matriz de tamaño 2×3 y la multiplicamos por un vector columna de tamaño 3×1 obtenemos una matriz 2×1, que podemos considerar un vector de $\mathbb{R}^2$.

Matrices Asociadas

- Si consideramos vectores columna, podemos establecer una aplicación lineal multiplicando por matrices.
- Por ejemplo, si tenemos una matriz de tamaño 2×3 y la multiplicamos por un vector columna de tamaño 3×1 obtenemos una matriz 2×1, que podemos considerar un vector de $\mathbb{R}^2$.
- Todas las aplicaciones lineales tienen matriz asociada y viceversa.

Cálculo de la Matriz Asociada

- Vamos a calcular la matriz asociada a

$$f(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2}y+2z,-y-z\right)$$

Cálculo de la Matriz Asociada

- Vamos a calcular la matriz asociada a

$$f(x,y,z)=\left(-\frac{1}{2}y+2z,-y-z\right)$$

- Para ello lo que se hace es calcular los valores aplicados a la base canónica.

$$f(1,0,0)=(0,0); f(0,1,0)=(-1/2,-1); f(0,0,1)=(2,-1)$$

Cálculo de la Matriz Asociada

- Vamos a calcular la matriz asociada a

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}y + 2z, -y - z\right)$$

- Para ello lo que se hace es calcular los valores aplicados a la base canónica.

$$f(1,0,0) = (0,0); f(0,1,0) = (-1/2,-1); f(0,0,1) = (2,-1)$$

- Estos valores son las columnas de la matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Fórmula General de una Aplicación

- Vamos a calcular la fórmula general de la aplicación lineal dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Fórmula General de una Aplicación

- Vamos a calcular la fórmula general de la aplicación lineal dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Para calcular la fórmula asociada a la matriz que nos dan, no tenemos más que multiplicar por un vector genérico (x, y, z), pero recordando que los vectores operan con las matrices por la derecha como columnas. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x - 2y - z \end{pmatrix}$$

Fórmula General de una Aplicación

- Vamos a calcular la fórmula general de la aplicación lineal dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Para calcular la fórmula asociada a la matriz que nos dan, no tenemos más que multiplicar por un vector genérico (x, y, z), pero recordando que los vectores operan con las matrices por la derecha como columnas. Esto nos da:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x - 2y - z \end{pmatrix}$$

- Por lo tanto, podemos establecer la fórmula:

$$f(x, y, z) = (0, 2x - 2y - z)$$

Movimientos y Transformaciones

- Vamos a calcular algunos ejemplos de movimientos y transformaciones.

Movimientos y Transformaciones

- Vamos a calcular algunos ejemplos de movimientos y transformaciones.
- Todas ellas se podrán representar mediante matrices.

Movimientos y Transformaciones

- Vamos a calcular algunos ejemplos de movimientos y transformaciones.
- Todas ellas se podrán representar mediante matrices.
- Los movimientos que vamos a considerar son los giros y las simetrías.

Movimientos y Transformaciones

- Vamos a calcular algunos ejemplos de movimientos y transformaciones.
- Todas ellas se podrán representar mediante matrices.
- Los movimientos que vamos a considerar son los giros y las simetrías.
- También vamos a ver las proyecciones como ejemplo básico de transformación.

Matriz de Giro

- Un giro de ángulo α se puede representar mediante la siguiente matriz de transformación:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Matriz de Giro

- Un giro de ángulo α se puede representar mediante la siguiente matriz de transformación:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

- Si hacemos un giro de ángulo α y luego uno de ángulo β, es como si hiciéramos un giro de ángulo $\alpha + \beta$. Como la composición de aplicaciones se corresponde al producto de matrices, tenemos las fórmulas trigonométricas habituales para la suma de ángulos.

Suma de Ángulos

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha+\beta) & -sen(\alpha+\beta) \\ sen(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\beta) & -sen(\beta) \\ sen(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta) & -(cos(\alpha)sen(\beta) + sen(\alpha)cos(\beta)) \\ sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta) & cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta) \end{pmatrix}$$

Por tanto podemos deducir que

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$$

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta)$$

Ejemplo

- Vamos a representa gráficamente el vector $(5, 5)$, realiza un giro de ángulo $\frac{1}{3}\pi$ utilizando la matriz de giro y representar el resultado.

Ejemplo

- Vamos a representa gráficamente el vector $(5, 5)$, realiza un giro de ángulo $\frac{1}{3}\pi$ utilizando la matriz de giro y representar el resultado.
- La matriz del giro es

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Ejemplo

- Vamos a representa gráficamente el vector $(5, 5)$, realiza un giro de ángulo $\frac{1}{3}\pi$ utilizando la matriz de giro y representar el resultado.
- La matriz del giro es

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

- Si ponemos el valor $\pi/3$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.866025403784439 \\ 0.866025403784439 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

- Vamos a representa gráficamente el vector $(5,5)$, realiza un giro de ángulo $\frac{1}{3}\pi$ utilizando la matriz de giro y representar el resultado.
- La matriz del giro es

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

- Si ponemos el valor $\pi/3$ tenemos

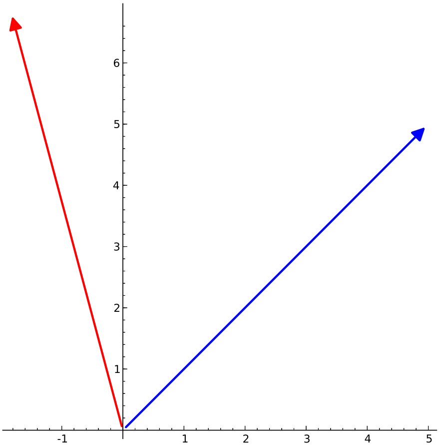
$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.866025403784439 \\ 0.866025403784439 & 0.5 \end{pmatrix}$$

- Aplicado al vector nos da

$$\begin{pmatrix} cos(\pi/3) & -sen(\pi/3) \\ sen(\pi/3) & cos(\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.83012701892219 \\ 6.83012701892219 \end{pmatrix}$$

Representación Gráfica

Representaremos el vector original en color azul y el girado en color rojo.



Simetría

- Para calcular el simétrico de un punto con respecto a un eje de simetría procedemos del siguente modo:

Simetría

- Para calcular el simétrico de un punto con respecto a un eje de simetría procedemos del siguente modo:
- Calculamos una recta perpendicular a la recta que pasa por el punto dado.

Simetría

- Para calcular el simétrico de un punto con respecto a un eje de simetría procedemos del siguente modo:
- Calculamos una recta perpendicular a la recta que pasa por el punto dado.
- La distancia desde el punto al eje de simetría la ponemos en el sentido contrario para calcular el simétrico.

Simetría

- Para calcular el simétrico de un punto con respecto a un eje de simetría procedemos del siguente modo:
- Calculamos una recta perpendicular a la recta que pasa por el punto dado.
- La distancia desde el punto al eje de simetría la ponemos en el sentido contrario para calcular el simétrico.
- Los elementos que están en el eje de simetría quedan fijos.

Simetría

- Para calcular el simétrico de un punto con respecto a un eje de simetría procedemos del siguente modo:
- Calculamos una recta perpendicular a la recta que pasa por el punto dado.
- La distancia desde el punto al eje de simetría la ponemos en el sentido contrario para calcular el simétrico.
- Los elementos que están en el eje de simetría quedan fijos.
- Vamos a hacerlo en un ejemplo.

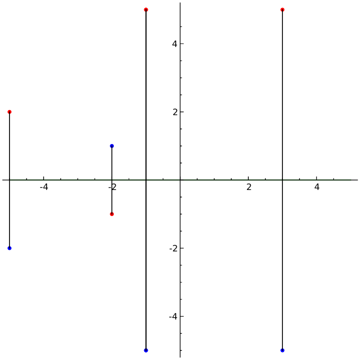
Ejemplo

Vamos a representar en el plano los siguientes puntos:

$$(-1,-1) \quad (2,2) \quad (3,3) \quad (0,1) \quad (4,1)$$

Para cada uno de ellos, calcula su simétrico con respecto al eje 0X y represéntalo en el mismo plano. Deduce la fórmula general de la simetría con respecto al eje 0X.

Gráfico



Viendo el comportamiento de estos puntos podemos deducir que la fórmula general para esta simetría es:

$$f(x, y) = (x, -y)$$

Proyecciones

- Proyectar sobre un eje es muy parecido a las simtetrías.

Proyecciones

- Proyectar sobre un eje es muy parecido a las simtetrías.
- Para ello se traza la recta perpendicular al eje de proyección que pasa por el punto deseado.

Proyecciones

- Proyectar sobre un eje es muy parecido a las simtetrías.
- Para ello se traza la recta perpendicular al eje de proyección que pasa por el punto deseado.
- El punto proyectado es el corte entre la recta perpendicular y el eje de proyección.

Proyecciones

- Proyectar sobre un eje es muy parecido a las simtetrías.
- Para ello se traza la recta perpendicular al eje de proyección que pasa por el punto deseado.
- El punto proyectado es el corte entre la recta perpendicular y el eje de proyección.
- Si el punto ya estaba en el eje de proyección, queda fijo.

Ejemplo de Proyección

- Representaremos en el plano los siguientes puntos:

$$(3,3) \quad (2,2) \quad (-4,-4) \quad (0,4) \quad (-1,1)$$

Ejemplo de Proyección

- Representaremos en el plano los siguientes puntos:

$$(3,3) \quad (2,2) \quad (-4,-4) \quad (0,4) \quad (-1,1)$$

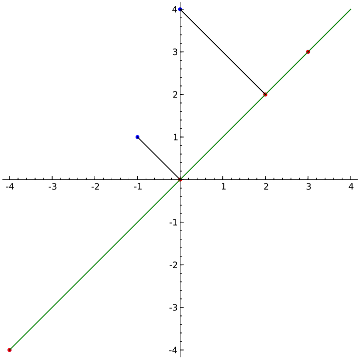
- Para cada uno de ellos, calcularemos su proyeccón respecto a la bisectriz del primer cuadrante y lo representaremos en el mismo plano.

Ejemplo de Proyección

- Representaremos en el plano los siguientes puntos:

$$(3,3) \quad (2,2) \quad (-4,-4) \quad (0,4) \quad (-1,1)$$

- Para cada uno de ellos, calcularemos su proyeccón respecto a la bisectriz del primer cuadrante y lo representaremos en el mismo plano.
- Deduciremos la fórmula general de la proyección con respecto a la bisectriz del primer cuadrante



Viendo el comportamiento de estos puntos podemos deducir que la fórmula general para esta proyección es:

$$f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$