Curso 0: Matemáticas y sus Aplicaciones

Tema 5. Lógica y Formalismo Matemático

Leandro Marín

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Murcia

2012

- Una proposición es una afirmación lógica que puede ser verdadera o falsa.

- Una proposición es una afirmación lógica que puede ser verdadera o falsa.
- Un razonamiento se puede dividir en proposiciones y relaciones entre ellas.

- Una proposición es una afirmación lógica que puede ser verdadera o falsa.
- Un razonamiento se puede dividir en proposiciones y relaciones entre ellas.
- Por ejemplo, p = *Está lloviendo*, q = *Se suspende el partido de fútbol* son dos proposiciones.

- Una proposición es una afirmación lógica que puede ser verdadera o falsa.
- Un razonamiento se puede dividir en proposiciones y relaciones entre ellas.
- Por ejemplo, p = *Está lloviendo*, q = *Se suspende el partido de fútbol* son dos proposiciones.
- Inicialmente no nos importa si son ciertas o falsas, sabemos que deben tener uno de esos dos valores de verdad.

- Una proposición es una afirmación lógica que puede ser verdadera o falsa.
- Un razonamiento se puede dividir en proposiciones y relaciones entre ellas.
- Por ejemplo, p = *Está lloviendo*, q = *Se suspende el partido de fútbol* son dos proposiciones.
- Inicialmente no nos importa si son ciertas o falsas, sabemos que deben tener uno de esos dos valores de verdad.
- Entre las proposiciones se pueden establecer relaciones, por ejemplo *Si está lloviendo se suspende el partido de fútbol* es una relación entre las proposiciones p y q que nos crea una nueva proposición más compleja.

- Una proposición es una afirmación lógica que puede ser verdadera o falsa.
- Un razonamiento se puede dividir en proposiciones y relaciones entre ellas.
- Por ejemplo, p = *Está lloviendo*, q = *Se suspende el partido de fútbol* son dos proposiciones.
- Inicialmente no nos importa si son ciertas o falsas, sabemos que deben tener uno de esos dos valores de verdad.
- Entre las proposiciones se pueden establecer relaciones, por ejemplo *Si está lloviendo se suspende el partido de fútbol* es una relación entre las proposiciones p y q que nos crea una nueva proposición más compleja.
- La unión de proposiciones para crear otras nuevas se realiza mediante los conectores lógicos.

Operadores Lógicos

- Para hacer fórmulas lógicas complejas, podemos utilizar operadores lógicos. Los principales son $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$.

Operadores Lógicos

- Para hacer fórmulas lógicas complejas, podemos utilizar operadores lógicos. Los principales son $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$.
- Si p es una proposición, denotaremos $\neg p$ a la proposición que es cierta exactamente cuando p es falsa y viceversa. Lo leeremos con *no* p.

Operadores Lógicos

- Para hacer fórmulas lógicas complejas, podemos utilizar operadores lógicos. Los principales son $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$.
- Si p es una proposición, denotaremos $\neg p$ a la proposición que es cierta exactamente cuando p es falsa y viceversa. Lo leeremos con *no p*.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \wedge q$ la proposición que es cierta exactamente cuando ambas proposiciones son ciertas, si alguna de ellas es falsa, entonces $p \wedge q$ es falsa. Lo leeremos p y q.

Operadores Lógicos

- Para hacer fórmulas lógicas complejas, podemos utilizar operadores lógicos. Los principales son $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$.
- Si p es una proposición, denotaremos $\neg p$ a la proposición que es cierta exactamente cuando p es falsa y viceversa. Lo leeremos con *no* p.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \wedge q$ la proposición que es cierta exactamente cuando ambas proposiciones son ciertas, si alguna de ellas es falsa, entonces $p \wedge q$ es falsa. Lo leeremos p y q.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \vee q$ la proposición que es cierta cuando alguna de las proposiciones p o q es cierta (o las dos). Se leerá como p o q.

Operadores Lógicos

- Para hacer fórmulas lógicas complejas, podemos utilizar operadores lógicos. Los principales son $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$.
- Si p es una proposición, denotaremos $\neg p$ a la proposición que es cierta exactamente cuando p es falsa y viceversa. Lo leeremos con *no* p.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \wedge q$ la proposición que es cierta exactamente cuando ambas proposiciones son ciertas, si alguna de ellas es falsa, entonces $p \wedge q$ es falsa. Lo leeremos p y q.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \vee q$ la proposición que es cierta cuando alguna de las proposiciones p o q es cierta (o las dos). Se leerá como p o q.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \rightarrow q$ la proposición que es cierta cuando p es falsa o q es verdadera. Se llama p implica q.

Operadores Lógicos

- Para hacer fórmulas lógicas complejas, podemos utilizar operadores lógicos. Los principales son $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$.
- Si p es una proposición, denotaremos $\neg p$ a la proposición que es cierta exactamente cuando p es falsa y viceversa. Lo leeremos con *no* p.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \wedge q$ la proposición que es cierta exactamente cuando ambas proposiciones son ciertas, si alguna de ellas es falsa, entonces $p \wedge q$ es falsa. Lo leeremos p y q.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \vee q$ la proposición que es cierta cuando alguna de las proposiciones p o q es cierta (o las dos). Se leerá como p o q.
- Si p y q son proposiciones, denotaremos $p \rightarrow q$ la proposición que es cierta cuando p es falsa o q es verdadera. Se llama p implica q.
- Todas estas operaciones se pueden combinar utilizando paréntesis.

Algunas Formalizaciones (I)

- Consideremos la frase *Si llueve no iremos de excursión.*

Algunas Formalizaciones (I)

- Consideremos la frase *Si llueve no iremos de excursión.*
- Vamos a denotar $p =$*Llueve* y $q =$*iremos de excursión*

Algunas Formalizaciones (I)

- Consideremos la frase *Si llueve no iremos de excursión.*
- Vamos a denotar $p =$*Llueve* y $q =$*iremos de excursión*
- La frase *Si llueve no iremos de excursión* se representará $p \rightarrow \neg q$

Algunas Formalizaciones (II)

- Consideremos la frase *Siempre que estamos aburridos y no tenemos nada que hacer, vamos de excursión.*

Algunas Formalizaciones (II)

- Consideremos la frase *Siempre que estamos aburridos y no tenemos nada que hacer, vamos de excursión.*
- Vamos a denotar $p =$*Estamos aburridos*, $q =$*tenemos algo que hacer* y $r =$*ir de excursión*

Algunas Formalizaciones (II)

- Consideremos la frase *Siempre que estamos aburridos y no tenemos nada que hacer, vamos de excursión.*
- Vamos a denotar $p =$*Estamos aburridos*, $q =$*tenemos algo que hacer* y $r =$*ir de excursión*
- La frase *Siempre que estamos aburridos y no tenemos nada que hacer, vamos de excursión.* se representará $p \wedge \neg q \rightarrow r$.

Precedencia de Operadores

- Las expresión $p \wedge q \vee r$ podría en principio significar $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$. Entonces tendríamos que estar poniendo paréntesis en todas las expresiones para no hubiera ambigüedad.

Precedencia de Operadores

- Las expresión $p \wedge q \vee r$ podría en principio significar $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$. Entonces tendríamos que estar poniendo paréntesis en todas las expresiones para no hubiera ambigüedad.
- Para evitarlo se establece como en el caso de la suma y la multiplicación lo que se conoce como precedencia de operadores.

Precedencia de Operadores

- Las expresión $p \wedge q \vee r$ podría en principio significar $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$. Entonces tendríamos que estar poniendo paréntesis en todas las expresiones para no hubiera ambigüedad.
- Para evitarlo se establece como en el caso de la suma y la multiplicación lo que se conoce como precedencia de operadores.
- El orden de precedencia es $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$.

Precedencia de Operadores

- Las expresión $p \wedge q \vee r$ podría en principio significar $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$. Entonces tendríamos que estar poniendo paréntesis en todas las expresiones para no hubiera ambigüedad.
- Para evitarlo se establece como en el caso de la suma y la multiplicación lo que se conoce como precedencia de operadores.
- El orden de precedencia es $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$.
- Por lo tanto $p \wedge q \vee r$ significa $(p \wedge q) \vee r$.

Precedencia de Operadores

- Las expresión $p \wedge q \vee r$ podría en principio significar $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$. Entonces tendríamos que estar poniendo paréntesis en todas las expresiones para no hubiera ambigüedad.
- Para evitarlo se establece como en el caso de la suma y la multiplicación lo que se conoce como precedencia de operadores.
- El orden de precedencia es $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$.
- Por lo tanto $p \wedge q \vee r$ significa $(p \wedge q) \vee r$.
- $p \rightarrow q \vee r$ significa $p \rightarrow (q \vee r)$.

Precedencia de Operadores

- Las expresión $p \wedge q \vee r$ podría en principio significar $(p \wedge q) \vee r$ o $p \wedge (q \vee r)$. Entonces tendríamos que estar poniendo paréntesis en todas las expresiones para no hubiera ambigüedad.
- Para evitarlo se establece como en el caso de la suma y la multiplicación lo que se conoce como precedencia de operadores.
- El orden de precedencia es $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$.
- Por lo tanto $p \wedge q \vee r$ significa $(p \wedge q) \vee r$.
- $p \rightarrow q \vee r$ significa $p \rightarrow (q \vee r)$.
- $\neg p \wedge q$ significa $(\neg p) \wedge q$, etc.

- Dada una fórmula proposicional con variables $p, q, r, \cdots$, una tabla de verdad es una representación de la verdad o falsedad de la fórmula en todos los casos posibles de las variables.

- Dada una fórmula proposicional con variables $p, q, r, \cdots$, una tabla de verdad es una representación de la verdad o falsedad de la fórmula en todos los casos posibles de las variables.
- El número de filas de la tabla es 2^n siendo n el número de variables.

- Dada una fórmula proposicional con variables $p, q, r, \cdots$, una tabla de verdad es una representación de la verdad o falsedad de la fórmula en todos los casos posibles de las variables.
- El número de filas de la tabla es 2^n siendo n el número de variables.
- Así por ejemplo, si $f(p,q)$ es una fórmula lógica de dos variables, calcularemos la tabla:

p	q	$f(p,q)$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(1,0)$
1	1	$f(1,1)$

Ejemplo de Tabla de Verdad

Esta sería la tabla de verdad para la fórmula $f(p, q) = p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

En ella podemos apreciar cómo el único caso en que la fórmula $p \wedge q$ es cierta es cuando tanto p como q son ciertas.

- A veces se introducen columnas adicionales con partes de la fórmula (subfórmulas) que facilitan el cálculo.

- A veces se introducen columnas adicionales con partes de la fórmula (subfórmulas) que facilitan el cálculo.
- El orden de las columnas tampoco es importante, podemos poner el que nos resulte más cómodo según vamos haciendo las operaciones intermedias.

- A veces se introducen columnas adicionales con partes de la fórmula (subfórmulas) que facilitan el cálculo.
- El orden de las columnas tampoco es importante, podemos poner el que nos resulte más cómodo según vamos haciendo las operaciones intermedias.
- Lo fundamental es que todos los casos de las variables proposicionales estén considerados.

Ejemplo de Tabla de Verdad (II)

Aquí podemos ver una tabla de verdad de una fórmula más compleja, concretamente $q \rightarrow (r \rightarrow p)$

p	r	$r \rightarrow p$	q	$q \rightarrow (r \rightarrow p)$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Tablas de Verdad y Razonamientos

- A veces, las tablas de verdad se pueden utilizar para hacer razonamientos simples.

Tablas de Verdad y Razonamientos

- A veces, las tablas de verdad se pueden utilizar para hacer razonamientos simples.
- Supongamos que tenemos una o varias fórmulas lógicas que nos dicen que son verdaderas (es lo que se llama hipótesis) y nos dicen que determinemos si son ciertas o falsas las variables proposicionales.

Tablas de Verdad y Razonamientos

- A veces, las tablas de verdad se pueden utilizar para hacer razonamientos simples.
- Supongamos que tenemos una o varias fórmulas lógicas que nos dicen que son verdaderas (es lo que se llama hipótesis) y nos dicen que determinemos si son ciertas o falsas las variables proposicionales.
- Si construimos la tabla de verdad, podemos ver exactamente cuales son los casos en los cuales las fórmulas que nos dan como hipótesis son realmente verdaderas.

Tablas de Verdad y Razonamientos

- A veces, las tablas de verdad se pueden utilizar para hacer razonamientos simples.
- Supongamos que tenemos una o varias fórmulas lógicas que nos dicen que son verdaderas (es lo que se llama hipótesis) y nos dicen que determinemos si son ciertas o falsas las variables proposicionales.
- Si construimos la tabla de verdad, podemos ver exactamente cuales son los casos en los cuales las fórmulas que nos dan como hipótesis son realmente verdaderas.
- Para un razonamiento humano, puede ser más sencillo operar con las fórmulas utilizando reglas, pero para una máquina, a veces este sistema es suficientemente rápido y fácil de programar.

Tablas de Verdad y Razonamientos

- A veces, las tablas de verdad se pueden utilizar para hacer razonamientos simples.
- Supongamos que tenemos una o varias fórmulas lógicas que nos dicen que son verdaderas (es lo que se llama hipótesis) y nos dicen que determinemos si son ciertas o falsas las variables proposicionales.
- Si construimos la tabla de verdad, podemos ver exactamente cuales son los casos en los cuales las fórmulas que nos dan como hipótesis son realmente verdaderas.
- Para un razonamiento humano, puede ser más sencillo operar con las fórmulas utilizando reglas, pero para una máquina, a veces este sistema es suficientemente rápido y fácil de programar.
- Para hacer razonamiento automático se utilizan otras técnicas más complejas que sobrepasan el nivel de este curso cero.

Razonamiento con Tablas

Consideremos la fórmula $\neg((q \vee r) \vee r \wedge q)$, vamos a ver en qué casos es verdadera. Construimos la tabla de verdad:

$r \wedge q$	r	q	$q \vee r$	$(q \vee r) \vee r \wedge q$	$\neg((q \vee r) \vee r \wedge q)$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Y podemos ver que en el único caso en que la hipótesis es cierta, es cuando q y r son ambas falsas.

- En muchas ocasiones, la lógica de proposiciones se queda corta para formalizar razonamientos.

- En muchas ocasiones, la lógica de proposiciones se queda corta para formalizar razonamientos.
- Pensemos por ejemplo en las proposiciones P = *Juan juega al fútbol* y Q = *Luis juega al fútbol*. Son proposiciones diferentes, pero que están muy relacionadas. Nos interesa definir un predicado Fútbol(x) = x *juega al fútbol* y aplicarlo a dos constantes, Juan y Luis, Fútbol(Juan), Fútbol(Luis).

- En muchas ocasiones, la lógica de proposiciones se queda corta para formalizar razonamientos.
- Pensemos por ejemplo en las proposiciones P = *Juan juega al fútbol* y Q = *Luis juega al fútbol*. Son proposiciones diferentes, pero que están muy relacionadas. Nos interesa definir un predicado Fútbol(x) = x *juega al fútbol* y aplicarlo a dos constantes, Juan y Luis, Fútbol(Juan), Fútbol(Luis).
- Podemos también expresar propiedades más complejas, como *Existe un elemento que cumple cierta propiedad* o *Todos los elementos cumplen cierta propiedad*.

El Concepto de Universo

- En lógica de predicados, se entiende como universo el conjunto de objetos sobre los que se aplican los razonamientos.

El Concepto de Universo

- En lógica de predicados, se entiende como universo el conjunto de objetos sobre los que se aplican los razonamientos.
- Cuando hacemos un razonamiento, debemos especificar el universo sobre el que estamos hablando.

El Concepto de Universo

- En lógica de predicados, se entiende como universo el conjunto de objetos sobre los que se aplican los razonamientos.
- Cuando hacemos un razonamiento, debemos especificar el universo sobre el que estamos hablando.
- La verdad o falsedad de una proposición depende del universo.

El Concepto de Universo

- En lógica de predicados, se entiende como universo el conjunto de objetos sobre los que se aplican los razonamientos.
- Cuando hacemos un razonamiento, debemos especificar el universo sobre el que estamos hablando.
- La verdad o falsedad de una proposición depende del universo.
- Por ejemplo, *Existe un elemento tal que al elevarlo al cuadrado nos da 2.*

El Concepto de Universo

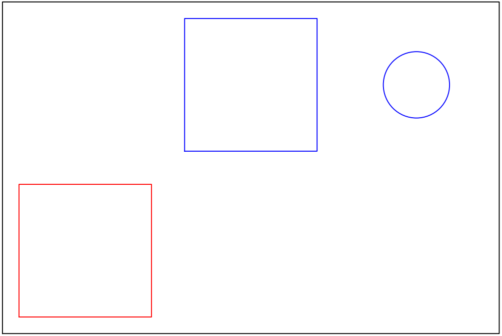
- En lógica de predicados, se entiende como universo el conjunto de objetos sobre los que se aplican los razonamientos.
- Cuando hacemos un razonamiento, debemos especificar el universo sobre el que estamos hablando.
- La verdad o falsedad de una proposición depende del universo.
- Por ejemplo, *Existe un elemento tal que al elevarlo al cuadrado nos da 2.*
- Esta proposición no es cierta en el universo de los números racionales, pero sí en el de los reales.

El Concepto de Universo

- En lógica de predicados, se entiende como universo el conjunto de objetos sobre los que se aplican los razonamientos.
- Cuando hacemos un razonamiento, debemos especificar el universo sobre el que estamos hablando.
- La verdad o falsedad de una proposición depende del universo.
- Por ejemplo, *Existe un elemento tal que al elevarlo al cuadrado nos da 2.*
- Esta proposición no es cierta en el universo de los números racionales, pero sí en el de los reales.
- Los universos pueden ser finitos o infinitos, incluso es posible considerar el universo vacío.

Ejemplo de Universo

Este conjunto de figuras podría ser un universo.



Este universo está formado por tres objetos, dos cuadrados y un círculo que tienen ciertas propiedades.

Cuantificadores

- En lógica de predicados existen dos cuantificadores, el cualtificador universal $\forall$ (para todo) y el existencial $\exists$ (existe)

Cuantificadores

- En lógica de predicados existen dos cuantificadores, el cualtificador universal $\forall$ (para todo) y el existencial $\exists$ (existe)
- Por ejemplo, si tenemos definido el predicado Circ(x) que nos dice un un objeto x es un círculo, podemos escribir $\forall x, \text{Circ}(x)$, que se leería : *Todos los elementos (del universo considerado) son círculos*.

Cuantificadores

- En lógica de predicados existen dos cuantificadores, el cualtificador universal $\forall$ (para todo) y el existencial $\exists$ (existe)
- Por ejemplo, si tenemos definido el predicado Circ(x) que nos dice un un objeto x es un círculo, podemos escribir $\forall x, \text{Circ}(x)$, que se leería : *Todos los elementos (del universo considerado) son círculos*.
- La fórmula $\exists x, \text{Circ}(x)$ se leería: *Existe un círculo (en nuestro universo)*

Cuantificadores

- En lógica de predicados existen dos cuantificadores, el cualtificador universal $\forall$ (para todo) y el existencial $\exists$ (existe)
- Por ejemplo, si tenemos definido el predicado Circ(x) que nos dice un un objeto x es un círculo, podemos escribir $\forall x, \text{Circ}(x)$, que se leería : *Todos los elementos (del universo considerado) son círculos*.
- La fórmula $\exists x, \text{Circ}(x)$ se leería: *Existe un círculo (en nuestro universo)*
- Puesto que la lógica de predicados es una extensión de la lógica de proposiciones, podemos utilizar también los conectores lógicos para escribir fórmulas.

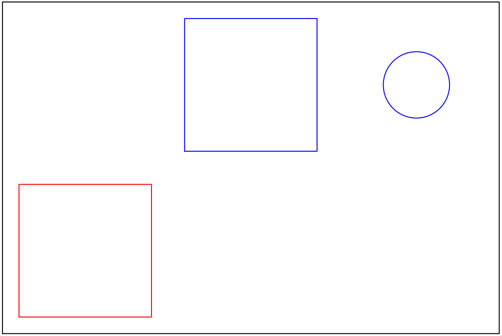
Cuantificadores

- En lógica de predicados existen dos cuantificadores, el cualtificador universal $\forall$ (para todo) y el existencial $\exists$ (existe)
- Por ejemplo, si tenemos definido el predicado Circ(x) que nos dice un un objeto x es un círculo, podemos escribir $\forall x, \text{Circ}(x)$, que se leería : *Todos los elementos (del universo considerado) son círculos*.
- La fórmula $\exists x, \text{Circ}(x)$ se leería: *Existe un círculo (en nuestro universo)*
- Puesto que la lógica de predicados es una extensión de la lógica de proposiciones, podemos utilizar también los conectores lógicos para escribir fórmulas.
- Así por ejemplo, $\forall x, \text{Circ}(x) \rightarrow \text{Azul}(x)$ se leería como *Para todo elemento x de nuestro universo, si x es un círculo, entonces es azul*.

Cuantificadores

- En lógica de predicados existen dos cuantificadores, el cualtificador universal $\forall$ (para todo) y el existencial $\exists$ (existe)
- Por ejemplo, si tenemos definido el predicado Circ(x) que nos dice un un objeto x es un círculo, podemos escribir $\forall x, \mathrm{Circ}(x)$, que se leería : *Todos los elementos (del universo considerado) son círculos*.
- La fórmula $\exists x, \mathrm{Circ}(x)$ se leería: *Existe un círculo (en nuestro universo)*
- Puesto que la lógica de predicados es una extensión de la lógica de proposiciones, podemos utilizar también los conectores lógicos para escribir fórmulas.
- Así por ejemplo, $\forall x, \mathrm{Circ}(x) \rightarrow \mathrm{Azul}(x)$ se leería como *Para todo elemento x de nuestro universo, si x es un círculo, entonces es azul*.
- La proposición anterior sería verdadera si no hubiese ningún circulo de forma trivial.

Ejemplo de Universo (II)



En este universo por ejemplo es cierta la proposición $\exists x, \mathrm{Circ}(x) \wedge \mathrm{Azul}(x)$ y no sería cierta por ejemplo $\forall x, \mathrm{Cuad}(x)$ porque hay elementos que no son cuadrados.

Relación entre $\forall$ y $\exists$

- Existe una fuerte relación entre ambos cuantificadores.

Relación entre $\forall$ y $\exists$

- Existe una fuerte relación entre ambos cuantificadores.
- La frase *Existe un objeto azul* y la frase *No es cierto que todos los elementos no sean azules* son equivalentes, si lo pensamos un poco es evidente (aunque un poco retorcido). Matemáticamente se escribiría $\forall x, \text{Azul}(x)$ y $\neg\exists x \neg\text{Azul}(x)$.

Relación entre $\forall$ y $\exists$

- Existe una fuerte relación entre ambos cuantificadores.
- La frase *Existe un objeto azul* y la frase *No es cierto que todos los elementos no sean azules* son equivalentes, si lo pensamos un poco es evidente (aunque un poco retorcido). Matemáticamente se escribiría $\forall x, \text{Azul}(x)$ y $\neg\exists x \neg\text{Azul}(x)$.
- En el otro sentido también funciona, es equivalente la frase *Es falso que todos los elementos son azules* y *Existe un elemento que no es azul*. Matemáticamente $\neg\forall x \neg\text{Azul}(x)$ y $\exists x\text{Azul}(x)$.

- La inducción matemática es un método que se utiliza para demostrar que una cierta propiedad se cumple para todos los números naturales.

- La inducción matemática es un método que se utiliza para demostrar que una cierta propiedad se cumple para todos los números naturales.
- Supongamos que queremos demostrar que el predicado $H(n)$ se cumple para todos los números naturales n.

- La inducción matemática es un método que se utiliza para demostrar que una cierta propiedad se cumple para todos los números naturales.
- Supongamos que queremos demostrar que el predicado $H(n)$ se cumple para todos los números naturales n.
- Lo primero que tenemos que demostrar es que se cumple para el valor $n = 0$ (a veces la fórmula no tiene sentido para el valor 0 y se empieza desde el valor 1. Lo importante es que haya al menos un valor inicial en el que se cumpla la propiedad)

- La inducción matemática es un método que se utiliza para demostrar que una cierta propiedad se cumple para todos los números naturales.
- Supongamos que queremos demostrar que el predicado $H(n)$ se cumple para todos los números naturales n.
- Lo primero que tenemos que demostrar es que se cumple para el valor $n = 0$ (a veces la fórmula no tiene sentido para el valor 0 y se empieza desde el valor 1. Lo importante es que haya al menos un valor inicial en el que se cumpla la propiedad)
- Luego suponemos que se cumple la propiedad para todos los valores menores o iguales que n (lo que se conoce como hipótesis de inducción) y lo demostramos para $n + 1$. La hipótesis de inducción suele jugar un papel fundamental en la demostración de la propiedad para el valor $n + 1$.

Ejemplo de Demostración por Inducción (I)

- Vamos a demostrar que para todo número natural n, se cumple que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. A esta proposición la llamaremos $H(n)$

Ejemplo de Demostración por Inducción (I)

- Vamos a demostrar que para todo número natural n, se cumple que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. A esta proposición la llamaremos $H(n)$
- Tenemos que demostrar $H(0)$, lo cual nos fuerza a que hagamos una suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ con $n = 0$. Una suma sin sumandos es siempre 0 y el segundo miembro $\frac{1}{2}0 \cdot 1 = 0$, pero aunque este razonamiento es correcto, si no nos sentimos cómodos con una suma vacía, podemos aplicarlo al caso $n = 1$, donde tenemos que $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$, lo cual es correcto.

Ejemplo de Demostración por Inducción (II)

- Supongamos ahora que es cierto $H(n)$ (y todos los valores $H(m)$ con $m \leq n$ si fuera necesario), entonces suponemos que es cierto $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ y vamos a demostrarlo para $n + 1$.

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) =^{*}$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Ejemplo de Demostración por Inducción (II)

- Supongamos ahora que es cierto $H(n)$ (y todos los valores $H(m)$ con $m \leq n$ si fuera necesario), entonces suponemos que es cierto $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ y vamos a demostrarlo para $n+1$.

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=(1+2+\cdots+n)+(n+1)=^{*}$$

$$\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

- Fijémonos como en la igualdad marcada con $*$ hemos utilizado la hipósteis de inducción para conseguir demostrar la igualdad para $n+1$ que es $1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Ejemplo de Demostración Incorrecta

- Hay muchas cosas que pueden fallar en una demostración por inducción. Una de las más simples es olvidar demostrar el caso inicial.

Ejemplo de Demostración Incorrecta

- Hay muchas cosas que pueden fallar en una demostración por inducción. Una de las más simples es olvidar demostrar el caso inicial.
- Vamos a demostrar (erróneamente) que $n = n + 1$ para todo número natural. Eso es evidentemente falso.

Ejemplo de Demostración Incorrecta

- Hay muchas cosas que pueden fallar en una demostración por inducción. Una de las más simples es olvidar demostrar el caso inicial.
- Vamos a demostrar (erróneamente) que $n = n + 1$ para todo número natural. Eso es evidentemente falso.
- Pero si utilizamos como hipótesis de inducción que $n = n + 1$ y sumamos 1 en los dos miembros, obtenemos $n + 1 = n + 2$ que es el caso siguiente.

Ejemplo de Demostración Incorrecta

- Hay muchas cosas que pueden fallar en una demostración por inducción. Una de las más simples es olvidar demostrar el caso inicial.
- Vamos a demostrar (erróneamente) que $n = n + 1$ para todo número natural. Eso es evidentemente falso.
- Pero si utilizamos como hipótesis de inducción que $n = n + 1$ y sumamos 1 en los dos miembros, obtenemos $n + 1 = n + 2$ que es el caso siguiente.
- El problema está en que no hemos demostrado el caso 0, que sería que $0 = 1$ y por eso la demostración no era correcta.

Demostraciones Teóricas

- Existen multitud de demostraciones de gran importancia teórica que se demuestran por inducción.

Demostraciones Teóricas

- Existen multitud de demostraciones de gran importancia teórica que se demuestran por inducción.
- Un número (positivo) n diremos que es compuesto cuando se puede poner como $n = a \cdot b$ con $a, b \notin \{1, n\}$. Diremos que es primo si no es 1 ni tampoco compuesto.

Demostraciones Teóricas

- Existen multitud de demostraciones de gran importancia teórica que se demuestran por inducción.
- Un número (positivo) n diremos que es compuesto cuando se puede poner como $n = a \cdot b$ con $a, b \notin \{1, n\}$. Diremos que es primo si no es 1 ni tampoco compuesto.
- Vamos a demostrar que todo número distinto de 1 se puede descomponer como producto de primos. El primer número que tenemos que probar en este caso es 2, que es claramente primo.

Demostraciones Teóricas

- Existen multitud de demostraciones de gran importancia teórica que se demuestran por inducción.
- Un número (positivo) n diremos que es compuesto cuando se puede poner como $n = a \cdot b$ con $a, b \notin \{1, n\}$. Diremos que es primo si no es 1 ni tampoco compuesto.
- Vamos a demostrar que todo número distinto de 1 se puede descomponer como producto de primos. El primer número que tenemos que probar en este caso es 2, que es claramente primo.
- Supongamos que el resultado es cierto para todos los números más pequeños o iguales que n y vamos a demostrarlo para $n+1$. Pueden pasar dos cosas, que $n+1$ sea primo, en cuyo caso hemos terminado o que sea compuesto, en cuyo caso ponemos $n+1 = a \cdot b$, pero con $a < n+1$ y $b < n+1$ podemos aplicar la hipótesis de inducción a a y b para encontar una descomposición en primos de $n+1$