Categorías de Módulos para Anillos Asociativos y Equivalencias de Morita

Leandro Marín Muñoz

Índice General

Introducción

1. Presentación

Uno de los procedimientos más fructíferos en el estudio de los anillos se basa en asociar a cada anillo con identidad R, su categoría de módulos por la derecha unitarios $\mathsf{Mod}\text{-}R$, y relacionar propiedades "intrínsecas" del anillo R con propiedades de dicha categoría. De este modo, es posible caracterizar muchas de las clases de anillos más clásicas y más importantes, como, por citar sólo algunos ejemplos, los anillos *semisimples* (todo módulo es proyectivo), los anillos *noetherianos* por la derecha (toda suma directa de inyectivos es inyectiva), los anillos *artinianos* por la derecha (todo inyectivo es una directa de envolturas inyectivas de módulos simples), los anillos *regulares* (todo módulo es plano): puede verse una lista más completa de ejemplos en [**6**, pp. 183-186].

El estudio de los anillos asociativos generales (no necesariamente con identidad) no ha tenido, en cambio, un desarrollo paralelo. Hay una primera dificultad, de carácter básico, que ha impedido este desarrollo: no está claro cómo hacer una elección "canónica" y eficiente de una categoría de módulos que se pudiese asociar al anillo asociativo R y que permitiese "reflejar" , mediante propiedades categóricas, las del anillo R. Ésto no quiere decir que no haya habido intentos en esta dirección; de hecho, podemos clasificar dichos intentos en dos grandes grupos:

(1). Se ha observado, en ocasiones, que es posible "aproximar" un anillo con uno al anillo asociativo R. La más conocida de estas "aproximaciones" es la construcción de la extensión de Dorroh del anillo R, que denotaremos ${}^{\mathbb{Z}\times}R$. Como es sabido, el conjunto subyacente de ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ es precisamente el producto $\mathbb{Z} \times R$ con la suma usual y el producto definido por

$$(n, r)(m, s) = (nm, rs + mr + ns)$$

De este modo, ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ resulta ser un anillo con identidad $(1_{\mathbb{Z}}, 0)$, de modo que R se identifica con un ideal bilátero de ${}^{\mathbb{Z}\times}R$. La bondad de esta "aproximación" debe juzgarse como la medida en que las propiedades del anillo R se vean reflejadas en las propiedades de ${}^{\mathbb{Z}\times}R$. Puesto que ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ es un anillo con uno, sus propiedades, a su vez, se corresponderán con las de la categoría de módulos $\mathsf{Mod}\text{-}{}^{\mathbb{Z}\times}R$. En este sentido, es digno de ser destacado el siguiente resultado, por otra parte bien conocido (véase, por ejemplo, [**6**]):

TEOREMA 0.1. *Sea R un anillo, y sea ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ su extensión de Dorroh. La categoría* MOD-R *formada por todos los R-módulos por la derecha es equivalente a la categoría* Mod-${}^{\mathbb{Z}\times}R$ *formada por todos los ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-módulos por la derecha unitarios.*

A la luz de este resultado, es claro que la "aproximación" de R mediante su extensión ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ equivale a la elección, como categoría escogida para asociar al anillo R con el fin de estudiar sus propiedades, de la categoría MOD-R de todos los R-módulos por la derecha. Mientras que esta elección es excelente en un sentido (porque la categoría que asociamos a R tiene muy buenas propiedades, ya que es una categoría de módulos unitarios para un anillo con identidad), queda por ver si es "adecuada" , en el sentido de que las propiedades de R correspondan de manera fiel a propiedades de MOD-R. Si ésto fuera así, entonces el estudio de anillos sin uno podría reducirse efectivamente al de anillos con uno. Sin embargo, algunos problemas dependientes de esta elección muestran que MOD-R puede no ser una buena categoría para estudiar las propiedades de R (de hecho, si R es un anillo con uno, no es MOD-R la categoría que elegimos para estudiar el comportamiento del anillo R, sino la más pequeña Mod-R). Los problemas son debidos, naturalmente, a que las propiedades de R y ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ pueden llegar a ser bastante diferentes. Podemos formular de modo preciso la "diferencia" entre R y ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ para hacernos una idea de las razones por las que MOD-R no es una buena elección para la categoría que intentamos asociar al anillo R.

Supongamos que R es un anillo con uno, y sea $M \in \mathsf{MOD}$-R. Denotemos

$$M' = \{m \in M : mR = 0\} \quad M'' = M/M'.$$

Es fácil ver que $M \simeq M' \oplus M''$. Además si $f : M \to N$ es un morfismo en MOD-R, y usamos las descomposiciones anteriores, $M = M' \oplus M''$, $N = N' \oplus N''$, entonces f se descompone también como $f = f' \oplus f''$ con $f' : M' \to N'$ y $f'' : M'' \to N''$.

Cada M' es un R-módulo de tipo especial: es simplemente un grupo abeliano cuya multiplicación por los escalares de R es trivial, $M'R = 0$. Por su parte, M'' es un R-módulo unitario, es decir, $M'' \in \mathsf{Mod}$-R. Ésto significa que la categoría MOD-R se puede descomponer como producto de otras dos categorías MOD-$R = \mathsf{Mod}$-$\mathbb{Z} \times \mathsf{Mod}$-$R$ En realidad, la parte que nos da la información sobre R es precisamente Mod-R (la categoría que se le asocia a R cuando, como en este caso, R tiene identidad), siendo la parte Mod-$\mathbb{Z}$ dependiente del factor $\mathbb{Z}$ que hemos añadido en la construcción de ${}^{\mathbb{Z}\times}R$. Esta "parte añadida" aparece también en cualquier categoría MOD-R, para R un anillo asociativo arbitrario, y es la que justifica que la elección de la categoría MOD-R para estudiar R no sea verdaderamente adecuada.

Con esta misma idea de "aproximar" los anillos sin uno por medio de anillos con uno (lo que equivale a escoger una categoría usual de módulos como la categoría que "representa" al anillo dado), se ha propuesto también usar el anillo $\mathrm{End}(R_R)$ para estudiar R, al menos en el caso de anillos R "no degenerados" en [**39**, Pg. 88].

(2). La segunda clase de intentos coincide en aceptar la posibilidad de que la categoría de módulos adecuada para estudiar el anillo asociativo R no sea equivalente a la categoría de módulos sobre un anillo con uno. Concretamente se han estudiado diversas categorías de módulos sobre anillos asociativos, que no tienen porqué tener un generador finitamente generado. En todos estos intentos, el concepto de R-módulo unitario (e.d., módulos M_R tales que $MR = M$) ha desempeñado un papel notable. Examinemos algunas de estas propuestas

(i). En los trabajos de Abrams [**1**] y Ánh y Márki [**5**], se supone que R es un anillo con unidades locales y se le asocia la categoría $\mathsf{Mod}\text{-}R$ de todos los módulos unitarios. Con esta elección, Abrams y Ánh-Márki han obtenido una respuesta positiva al problema que hemos planteado al principio: la relación entre las propiedades de R y de $\mathsf{Mod}\text{-}R$ parece ser muy estrecha y, en particular, ellos han obtenido una versión para anillos con unidades locales de la teoría de equivalencias de Morita, que extiende a este caso prácticamente todas las buenas propiedades de las equivalencias de Morita clásicas. Ésto sugiere si la elección de la categoría de R-módulos unitarios podría también tener éxito fuera del restringido marco de los anillos con unidades locales.

(ii). Komatsu [**21**] estudió también equivalencias de Morita para una clase más amplia de anillos, los anillo s-unitarios, usando la misma categoría $\mathsf{Mod}\text{-}R$ de los R-módulos unitarios. Sus resultados son menos completos que los anteriores, pero una parte de la teoría de Morita clásica resulta ser aún válida es este contexto.

(iii). En varios trabajos, Xu, Shum y Turner-Smith [**46**] han desarrollado una teoría de equivalencias (llamadas por ellos *Morita-like equivalences*) que, esencialmente, está basada en escoger también la categoría de R-módulos unitarios $\mathsf{Mod}\text{-}R$, para anillos R que verifiquen la propiedad de que todos los submódulos de unitarios son unitarios. Esta clase de anillos es mas general que las dos anteriores, pero el estudio de estos autores está lejos de ser completo.

(iv). Para el estudio de la clase, más general que las de (i) y (ii), de los anillos idempotentes (e.d., los anillos R tales que $R = R^2$), una nueva elección de la categoría ha sido propuesta en [**12**]: $\mathsf{Mod}\text{-}R$ denota ahora (se puede mantener la notación porque, si R verifica la condición de que los submódulos de módulos unitarios son unitarios, entonces esta nueva categoría $\mathsf{Mod}\text{-}R$ coincide con la de los R-módulos por la derecha unitarios) la categoría de los R-módulos M_R que son, a un tiempo, unitarios y libre de torsión (esta segunda condición quiere decir que si $m \in M$ y $mR = 0$, entonces $m = 0$). Usando esta categoría, se puede obtener también una versión adecuada y completa de la teoría de Morita clásica para esta clase de anillos sin uno.

(v). Podemos finalmente, considerar como otra propuesta la elección de una categoría de módulos para el anillo R, la construcción de la categoría $\sigma[M]$ para un módulo arbitrario M sobre un anillo con uno: véase [**45**]. Esta construcción permite asociar a un anillo asociativo arbitrario R la categoría de Grothendieck $\sigma[R_R]$. Esta categoría coincide, si R es idempotente, con la de todos los submódulos de módulos unitarios; y en el caso general, contiene a todos esos módulos pero puede incluir, posiblemente, otros, como el propio R_R.

El objetivo inicial de la presente memoria es, justamente, intentar resolver el problema planteado al principio; es decir, dado un anillo asociativo arbitrario R, asociarle una categoría de módulos "adecuada" en la que puedan estudiarse propiedades del anillo R como propiedades categóricas, de manera análoga al caso de los anillos con identidad. Con el fin de tener un criterio con el que medir la posible "adecuación" de esa categoría, nos fijaremos en los siguientes puntos.

(a). La construcción que demos debería ser tal que, en el caso particular en que R es un anillo con uno, o un anillo con unidades locales, la categoría elegida debe resultar equivalente a la categoría de los R-módulos unitarios. De esta manera, nuestra construcción generalizaría los casos que se han podido estudiar con éxito hasta ahora. Por las mismas razones, la construcción debería, más en general, dar una categoría equivalente a la categoría $\mathsf{Mod}\text{-}R$ de módulos unitarios y libres de torsión en el caso particular de que el anillo R sea idempotente.

(b). La categoría elegida debe tener propiedades que la hagan, en lo posible, fácil de manejar, con objetos y morfismos que se puedan describir por condiciones que no sean difíciles de comprobar. Si no podemos decir que este sea un requisito inexcusable, es claro que si se trata de una condición bastante conveniente. En este sentido, sería deseable que la categoría construida tuviese propiedades cercanas a las categorías de módulos para anillos sin uno, aunque ya hemos visto que tendremos que admitir que no es exactamente equivalente a una categoría de este tipo.

(c). Una "condición mínima" que parece necesario imponer si queremos que la categoría que construyamos refleje adecuadamente las propiedades del anillo R, es que sea posible desarrollar una teoría de Morita lo más completa posible para estas categorías. De modo general, este es un *test* básico para determinar si nuestra elección es, en principio, aceptable. En efecto, si queremos que haya una relación fuerte entre las propiedades de un anillo R y las de la categoría asociada a R, la existencia de una equivalencia de categorías entre las asociadas a dos anillos R y S, debe implicar la existencia entre los anillos mismos. En particular, identificar lo que serán las equivalencias de Morita para las categorías que construyamos debe ser también un objetivo de este trabajo.

(d). Insistiendo en lo señalado en (c), hay un requisito técnico que también nos parece necesario imponer, porque da una garantia básica de relación entre propiedades del anillo y las de la categoría de módulos asociada. Se trata de lo siguiente: si existe una equivalencia entre las categorías de módulos por la derecha para dos anillos asociativos dados, R y S, entonces debemos también tener una equivalencia entre las correspondientes categorías de los módulos por la izquierda. Esta propiedad del *cambio de lado* nos parece un test de la bondad de la elección: en efecto, las categorías de módulos serán categorías de módulos *por un lado*; el que la equivalencia por la derecha implique la equivalencia por la izquierda da una cierta garantía de que las categorías elegidas están reflejando efectivamente *propiedades del anillo*, sin dependencia del lado considerado.

Para explicar las ideas que están en la base de nuestra elección de la categoría que queremos asociar al anillo asociativo R, debemos volver sobre una propiedad ya citada anteriormente: si R es un anillo con uno, entonces la categoría $\mathsf{MOD}\text{-}R$ de todos los R-módulos por la derecha es el producto de dos subcategorías, $\mathsf{MOD}\text{-}R \simeq \mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z} \times \mathsf{Mod}\text{-}R$, donde $\mathsf{Mod}\text{-}R$ consiste en todos grupos abelianos definiendo una multiplicación trivial por los elementos de R, y $\mathsf{Mod}\text{-}R$ es la subcategoría de R-módulos unitarios. Es este caso, la "buena" categoría se obtiene eliminando el factor no significativo $\mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$, y quedándose con la parte complementaria, $\mathsf{Mod}\text{-}R$. Ahora bien: si R es un anillo general, $\mathsf{MOD}\text{-}R$ sigue conteniendo a la categoría $\mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$ como subcategoría plena, aunque ya no sea un factor directo. Aún así, resulta posible "eliminar" esta parte cuyas propiedades no guardan relación alguna con las del anillo R, recurriendo a las técnicas de localización no conmutativa que provienen de la tesis de Gabriel [**8**]. Concretamente, podemos considerar la menor subcategoría localizante (o menor clase hereditaria de torsión) de $\mathsf{MOD}\text{-}R$ que contiene a $\mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$; si llamamos $\mathcal{C}$ a esta subcategoría, entonces la categoría cociente de $\mathsf{MOD}\text{-}R$ respecto de $\mathcal{C}$ "elimina" efectivamente la clase $\mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$ y será, por las propiedades generales de la localización no conmutativa, una categoría de Grothendieck equivalente a una subcategoría plena de $\mathsf{MOD}\text{-}R$, que denotaremos como $\mathsf{CMod}\text{-}R$, con un funtor de localización $\mathbf{C} : \mathsf{MOD}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R$, que es adjunto por la izquierda del funtor de inclusión. Además de las caracterizaciones que resultan de las propiedades generales de las localizaciones aplicadas a este caso particular, los módulos de la subcategoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$ se pueden describir de forma directa: son los R-módulos M_R tales que el homomorfismo canónico $M_R \to \mathrm{Hom}_R(R_R, M_R)$ es un isomorfismo.

La elección de $\mathsf{CMod}\text{-}R$ tiene, sin duda, importantes ventajas. Aplicando los criterios (a),(b),(c),(d) señalados arriba, vemos que responde muy bien a los criterios (a) y (b): en efecto, si R es idempotente, entonces hay una equivalencia entre $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y la categoría $\mathsf{Mod}\text{-}R$

antes indicada, por lo que $\mathsf{CMod}\text{-}R$ podría generalizar las elecciones hechas en los casos en que se dispone de una buena teoría de Morita. En cuanto a (b), al ser $\mathsf{CMod}\text{-}R$ una categoría de Grothendieck, tiene propiedades bastante próximas a las de una categoría de módulos sobre un anillo unitario, lo que facilita su manejo. Como se verá en la memoria, la existencia de una equivalencia entre las categorías de este tipo, $\mathsf{CMod}\text{-}R \simeq \mathsf{CMod}\text{-}S$, implicará la existencia de unos ciertos bimódulos P y Q que nos describen el comportamiento de las equivalencias de una forma bastante satisfactoria. Podemos pues afirmar que el comportamiento de esta categorías en relación con el criterio (c) resulta también satisfactorio. Sin embargo, falla en el criterio (d). En efecto, se demuestra en la memoria, que la categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$ se reduce a la subcategoría trivial (cuyo único objeto es 0) si y sólo si el anillo R es *T-nilpotente por la izquierda.* Por lo tanto, si R es un anillo T-nilpotente por la izquierda, pero no por la derecha, y S es T-nilpotente por ambos lados, tendríamos que $\mathsf{CMod}\text{-}R \simeq \mathsf{CMod}\text{-}S$, pero las categorías de módulos por la izquierda no son equivalentes.

Sin duda, este inconveniente complica la situación, pero es posible todavía aplicar la misma idea de llegar a una categoría “eliminando” la parte de $\mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$ usando otras técnicas. Así podemos tomar la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$, digamos $\mathcal{D}$, y aplicar las técnicas de colocalización, duales de las anteriores, que aparecen por ejemplo en [**35**]: alli se considera la clase de los módulos que son de **D**-torsión y **D**-codivisibles (en el sentido de ser “proyectivos” respecto de toda sucesión exacta corta

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

de $\mathsf{MOD}\text{-}R$ para la que $X \in \mathcal{D}$), y la correspondiente subcategoría plena es objeto de estudio. Sin embargo, este estudio sólo da buenos resultados cuando la clase $\mathcal{D}$ es cerrada para cocientes, lo que, en nuestro caso, equivaldría a pedir que el anillo R fuese idempotente. En el caso general, no tenemos, por ejemplo, la seguridad de que todo módulo admita, como ocurre en la situación dual, una “colocalización” .

Una manera de superar estas dificultades es la que elegimos en la memoria: en lugar de tomar la clase de los módulos de **D**-torsión y **D**-codivisibles, la ampliamos a la de los módulos de **D**-torsión, pero que sólo son “**d**-codivisibles” en el sentido débil de ser “proyectivos” con respecto a sucesiones exactas cortas como la anterior, pero con $XR = 0$. Por un lado, los módulos de **D**-torsión son, precisamente, los módulos unitarios. Por otro lado, se tiene que los módulos **d**-codivisibles unitarios (los módulos de la clase indicada) son justamente aquellos R-módulos M_R tales que el homomorfismo canónico $M \otimes_R R \to M$ es un isomorfismo. Denotamos en la memoria esta subcategoría plena de $\mathsf{MOD}\text{-}R$ como $\mathsf{DMod}\text{-}R$. Como se ha visto, tenemos asi una alternativa distinta de $\mathsf{CMod}\text{-}R$ para la elección de la categoría asociada a

R. Cómo podemos clasificar esta elección con respecto a los criterios indicados más arriba?

En primer lugar, si R es un anillo idempotente, $\mathsf{DMod}\text{-}R$ es equivalente a la categoría $\mathsf{Mod}\text{-}R$, lo que quiere decir que esta elección satisface también el criterio (a): es una generalización de la elección de la categoría en todos los casos en que se ha obtenido hasta ahora una buena teoría de Morita.

Con respecto al criterio (b), la situación es un poco menos satisfactoria, ya que no sabemos si, en la situación general, $\mathsf{DMod}\text{-}R$ ha de ser siempre una categoría abeliana, dado que no está claro si todo monomorfismo es un núcleo. Sin embargo, en otros sentidos, el comportamiento de $\mathsf{DMod}\text{-}R$ es bastante bueno: por ejemplo, existe un funtor $\mathbf{D} : \mathsf{MOD}\text{-}R \to \mathsf{DMod}\text{-}R$ que resulta ser una especie de "colocalización" , en el sentido de que $\mathbf{D}$ es un adjunto por la derecha del funtor de inclusión. Por otro lado, la categoría $\mathsf{DMod}\text{-}R$ admite una familia de generadores con una descripción bastante explícita. Volveremos enseguida a tratar sobre la existencia de esta familia.

El resultado que arroja el criterio (d) es, sin embargo, llamativamente similar al que se tenía en el caso de la categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$; efectivamente, la categoría $\mathsf{DMod}\text{-}R$ se hace trivial si y sólo si el anillo R resulta ser T-nilpotente por la derecha. Así, el argumento del caso de la $\mathsf{CMod}\text{-}R$ es aplicable aquí, para concluir que tampoco la $\mathsf{DMod}\text{-}R$ permite "cambiar de lado" las equivalencias.

Ante este problema, y teniendo en cuenta que, en el caso de los anillos idempotentes, las equivalencias si se pueden cambiar de lado, observemos mas de cerca cuáles son, en ese caso, las razones que hacen que tal construcción sea factible. Veremos que estas razones se condensan en los dos ingredientes siguientes:

(1). Existe una equivalencia $\mathsf{CMod}\text{-}R \simeq \mathsf{DMod}\text{-}R$. Esta relación no puede darse en el caso general.

(2). La existencia de una equivalencia $\mathsf{CMod}\text{-}R \simeq \mathsf{CMod}\text{-}S$ implica la existencia de una equivalencia $R\text{-}\mathsf{DMod} \simeq S\text{-}\mathsf{DMod}$. Demostraremos en la memoria que ésta es la propiedad que sigue siendo válida cuando R es un anillo asociativo arbitrario.

Esta última propiedad revela que, en realidad, siempre es posible "cambiar de lado" las equivalencias; sólo que al cambiar de lado, las equivalencias cambian a la otra categoría. Cuando, como en el caso idempotente, las dos construcciones de categorías que hemos analizado llevan a categorías a su vez equivalentes, la teoría de Morita funciona satisfactoriamente.

Estos resultados parecen sugerir que podría encontrarse una relación si tomamos simultáneamente *las dos categorías* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $\mathsf{DMod}\text{-}R$ como las adecuadas para reflejar las propiedades de R. Claramente, el ejemplo que nos ha servido para mostrar que ni una ni otra cumplen el criterio (d) no cumple esa misma función si empleamos las dos al mismo tiempo. Esta es la propuesta que tratamos de desarrollar en la memoria. Manteniendo, pues, el objetivo general señalado al principio, los objetivos concretos de este trabajo son estudiar, para un anillo asociativo arbitrario R, las categorías asociadas $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $\mathsf{DMod}\text{-}R$; y, en especial, elaborar una teoría de las equivalencias de Morita correspondiente a ese par de categorías, comprobando si las equivalencias por un lado implican las equivalencias por el otro.

La categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$ proviene, como ya hemos indicado, de un proceso de localización a partir de una categoría de módulos. Este proceso está bien estudiado y ello pone a nuestra disposición una información bastante completa sobre las propiedades de estas categorías. Sin embargo, la situación con las categorías $\mathsf{DMod}\text{-}R$ es radicalmente distinta. Sus propiedades son *terra incognita*, y es preciso crear nuevos instrumentos y técnicas que permiten estudiarlas. En orden a poder llevar a cabo este estudio, un concepto básico empleado ha sido el de *soporte*. Para explicar su significado, supongamos que R es un anillo son es un ideal bilátero de un anillo con un A (es claro que siempre podemos representar R de este modo). Sea $X \subseteq R$ un conjunto generador por la derecha de R (e.d., suponemos $XA = R$), y sea M un R-módulo por la izquierda unitario, $m \in M$. Existe entonces alguna "representación" de m, esto es, una equación

$$m = \sum_{x \in X} x m_x$$

con $m_x \in M$, casi todos nulos. Aplicando esto de nuevo a cada uno de los m_x podemos encontrar elementos $m_{yx} \in M$, casi todos nulos, tales que

$$m = \sum_{(x,y) \in X^2} x y m_{yx}$$

y así sucesivamente. Las elecciones de estas "representaciones" son, en general, arbitrarias, pero al irlas fijando, nos determinan subconjuntos finitos de los conjunto X^n sobre los cuales el elemento correspondiente en M puede no ser nulo. Esta forma de elegir los conjuntos de índices nos establece el concepto de soporte unitario. El hecho es que es posible construir, para cada soporte unitario σ sobre el conjunto X, un R-módulo $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ que está canónicamente asociado al soporte unitario σ, y de manera que $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ está en la categoría $R\text{-}\mathsf{DMod}$. Utilizando estos módulos, una "representación" de un elemento $m \in M$ tal y como hemos descrito antes, se convierte en un homomorfismo $f : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to M$ para algún soporte unitario σ. En otras palabras, la familia de los módulos asociados a soportes unitarios constituye una familia de generadores de $R\text{-}\mathsf{DMod}$.

Como queda dicho, nuestro objetivo final es construir una teoría de Morita que permita "cambiar de lado" las equivalencias. El camino mas natural, a la vista de los comentarios anteriores, sería usar la propiedad (2) que hemos citado anteriormente, pero esto no es suficiente. Necesitamos para completar la teoría, encontrar las consecuencias de la existencia de una equivalencia

$$\mathsf{DMod}\text{-}R \simeq \mathsf{DMod}\text{-}S$$

lo que se complica notablemente por la mayor dificultad que presenta el estudio de las categorías $\mathsf{DMod}\text{-}R$.

En el caso de los anillo con uno, un instrumento clave para obtener consecuencias de la existencia de una equivalencia como la anterior es el teorema de Watts (ver por ejemplo [**38**, Pg.75]). En nuestra situación, ello nos sugiere estudiar las propiedades de los funtores

$$F : \mathsf{DMod}\text{-}R \to \mathsf{DMod}\text{-}S$$

que verifiquen la condición de conservar límites directos. En el caso clásico, la demostración depende de la existencia de un generador que coincide con su anillo de endomorfismos, lo que no es el caso en nuestras hipótesis. Ello nos lleva a introducir, dado cualquier generador G_R de $\mathsf{DMod}\text{-}R$, el módulo

$$\mathbb{C}\,(F) := \mathrm{Hom}_E(G, F(G))$$

donde E es el anillo de endomorfismos de G_R. Entonces se puede obtener una transformación natural de funtores entre $- \otimes_R \mathbb{C}\,(F)$ y el funtor F. Resulta que, si F es equivalente a un producto tensorial, entonces la anterior transformación natural ha de ser una equivalencia, lo que prueba que $\mathbb{C}\,(F)$ es, desde luego, la generalización adecuada del anillo con uno, si queremos extender el resultado de Watts a nuestra situación. Hemos conseguido demostrar que la transformación natural indicada es, en todo caso, un monomorfismo en todo punto. Aún más, la misma transformación natural resulta ser una equivalencia si y sólo si el morfismo canónico

$$\varprojlim F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle) \to F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$$

dado para cada soporte unitario σ sobre un conjunto T-generador por la izquierda del anillo R (donde la definición de conjunto T-generador es una cierta debilitación de la de ser un conjunto generador con la definición dada mas arriba), y donde τ recorre la familia inversa de los soportes unitarios sobre el mismo conjunto, es un epimorfismo.

Los funtores F que conserven límites directos y cumplen esta condición adicional los llamaremos *funtores extensibles*, puesto que son precisamente aquellos que se pueden extender a funtores entre las categorías $\mathsf{MOD}\text{-}R$ y $\mathsf{MOD}\text{-}S$ conservando la propiedad de conservar límites directos. Usando este concepto que, de nuevo, no tiene análogo en la teoría de anillo con uno o en la teoría de anillos idempotentes, donde todos los funtores que conservan límites directos son automáticamente extensibles, llegamos a estar en condiciones de dar una respuesta satisfactoria al problema original. De este modo, construimos el concepto de equivalencia de Morita para anillo asociativos como sigue: R y S son Morita-equivalentes cuando existen equivalencias

$$\mathsf{CMod}\text{-}R \simeq \mathsf{CMod}\text{-}S \quad \text{y} \quad \mathsf{DMod}\text{-}R \simeq \mathsf{DMod}\text{-}S$$

de manera que la segunda de ellas está dada por un funtor extensible. Este concepto satisface el requisito (d) que habíamos anunciado anteriormente de "cambiar de lado" las equivalencias. Por otro lado, la teoría obtenida por medio de este concepto de equivalencia generaliza la de los casos considerados hasta ahora y las extiende efectivamente. Como se ve en esta memoria, la clase de anillo que hemos denominado *tratables* incluye propiamente a los idempotentes y sobre ella se puede obtener una versión satisfactoria de la teoría de Morita. Esto otorga una cierta confirmación a nuestra propuesta de usar el par de categorías $(\mathsf{CMod}\text{-}R, \mathsf{DMod}\text{-}R)$ como el medio adecuado para un estudio categórico de los anillos asociativos generales.

2. Análisis de Resultados

Vamos a hacer ahora un repaso mas minucioso sobre los resultados que se presentan en cada un de los temas de esta memoria.

El primero de los temas es un tema introductorio. En dicho tema empezaremos realizando un repaso rápido sobre los conceptos de anillo asociativo para ir fijando notaciones. De ahí pasaremos a la definición de categoría y de algunos conceptos categóricos clásicos, como los de límites directos e inversos. También se repasará el concepto de funtor, de funtor adjunto y de equivalencia de categorías. A partir de ahí se pasará a las categorías aditivas y a las categorías que hemos llamado abelianas por la derecha.

El concepto de categoría abeliana por la derecha es el que hemos tenido que introducir para solventar el problema de que la categoría R-DMod podría no ser abeliana (aunque como hemos mencionado antes, este problema permanece abierto). La categoría R-DMod va a resultar ser una categoría abeliana por la derecha en todo caso, y en ella se va a poder hablar de sucesiones exactas por la derecha y de funtores exactos por la derecha entre ellas. Las demostraciones que se realizan en el caso de categorías exactas por la derecha, son esencialmente las mismas que las de categorías abelianas realizando algunos pequeños cambios. Puesto que será necesario utilizar este tipo de propiedades mas adelante, incluimos estas demostraciones aquí. También se analizará el concepto de categoría reflexiva y correflexiva, de forma que podamos calcular límites directos e inversos en categorías reflexivas y correflexivas con respecto a categorías completas y cocompletas. El primer tema concluirá con un repaso de las propiedades de los funtores $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ y $- \otimes_R -$.

El segundo tema está dedicado a los soportes. Un soporte, se definirá como un subconjunto $\zeta \subseteq \cup_{k\geq 0} X^k$ tal que para todo $(x_1 \cdots x_n) \in$

ζ con $n \geq 1$ se tiene que $(x_1 \cdots x_{n-1}) \in \zeta$. Al conjunto de todos los soportes sobre X se le denotará $\Xi(X)$.

A partir del concepto de soporte se consideran las uniones e intersecciones de soportes y los operadores $\Delta_{\underline{x}}$ y $\nabla_{\overline{x}}$ aplicados a soportes. La segunda sección de este tema está dedicada al estudio de las propiedades de estas operaciones sobre los soportes.

En la tercera sección se introducen los dos tipos fundamentales de soportes que se van a utilizar, que son los soportes de torsión y los soportes unitarios. Dicho de modo muy general, ambas son restricciones sobre la infinitud, en el caso de los soportes de torsión se restringe al impedir la existencia de cadenas infinitamente largas y en el caso de los soportes unitarios se exige que cada elemento del soporte solo tenga una ramificación finita. El conjunto de soportes unitarios se denotará $\Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y el de soportes de torsión se denotará $\Xi_{\mathbf{T}}(X)$.

La cuarta sección nos introducirá el Teorema del Grafo de König, dado en forma de soportes, que nos dice que la intersección entre un soporte unitario y uno de torsión es finito. A este teorema se la ha dado dicho nombre porque es una reformulación equivalente a la de este conocido teorema.

En términos generales, el Teorema del Grafo de König nos dice que si imponemos a un soporte las dos restricciones de infinitud que habíamos definido anteriormente (de torsión y unitario) obtenemos un conjunto finito, por lo tanto estas dos condiciones son suficientes. Este teorema será fundamental para controlar la finitud de ciertos conjuntos al realizar límites inversos.

Puesto que las condiciones de ser unitarios o de torsión, son restricciones de finitud, es natural que las uniones infinitas de soportes de torsión o unitarios puedan dejar de ser de torsión o unitarios respectivamente. Sin embargo hay casos en los que va a ser necesario considerar uniones infinitas de soportes de estos tipos. La sección quinta está dedicada a las uniones de soportes unitarios y la sexta a las uniones de soportes de torsión. En estas dos secciones se encontrarán condiciones que nos permitan hacer uniones infinitas sin salirnos de los respectivos retículos.

Al final de la sección quinta se ve un lema que pone en relación de nuevo los soportes unitarios con los de torsión, este lema dice lo siguiente

LEMA 2.33. *Sea X un conjunto y sea $\theta : \Xi_{\mathbf{U}}(X) \to \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ una aplicación tal que*

1. *Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ se tiene que $\theta(\sigma) \subseteq \sigma$.*
2. *Para todo par de soportes unitarios sobre X, $\sigma \subseteq \tau$ se tiene que $\theta(\sigma) \subseteq \theta(\tau)$.*

Entonces existe un soporte de torsión $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ tal que para todo $\overline{x} \in \Sigma(X)$ con $\overline{x} \notin \xi$ se tiene que $\theta(\nabla_{\overline{x}}\sigma) \subset (\!(\overline{x})\!)$ para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$.

Este lema, que aquí aparece desconectado y como una aplicación del Teorema del Grafo de König, será la clave de la demostración de los teoremas centrales de la memoria. Hablando de modo muy general, los soportes unitarios van a estar asociados a ciertos módulos y los soportes de torsión, a elementos de dichos módulos. Este lema nos estudia una aplicación $\theta : \Xi_{\mathbf{U}}(X) \to \Xi_{\mathbf{T}}(X)$, que representará a una cierta forma de fijar un elemento en cada uno de los módulos asociados a los soportes unitarios. Esto será de aplicación al estudiar $\varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$.

La sección séptima del Tema 2 estudia el método de inducción en soportes de torsión. Ya se ha mencionado anteriormente, que para estudiar la categoría R-DMod, es necesario desarrollar nuevas técnicas de demostración, éste es uno de esos casos. El método de inducción en soportes de torsión se utilizará para demostrar un resultado que se utilizará para encontrar descomposiciones de los módulos asociados a soportes en sumas directas. La última sección de este tema está fuertemente conectada con este hecho, ya que se estudiarán los subsoportes unitarios escindidos. La relación de orden $\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$ nos va a determinar que el módulo asociado a σ va a ser un sumando directo del asociado a τ de forma canónica.

Este segundo tema nos introduce muchos conceptos, que en principio parecen estar poco motivados. Las razones para todas estas definiciones se irán viendo en los sucesivos temas, pero se ha considerado mejor hacer una introducción de este modo para evitar que razonamientos basados exclusivamente en el soporte, queden diluidas entre los elementos del módulo asociado a él, que ya es fuertemente dependiente del anillo R.

El Tema 3 nos va a introducir las categorías asociadas a un anillo asociativo R. Como hemos mencionado anteriormente, estudiaremos las categorías CMod-R y DMod-R. La definición con la que introducimos estas categorías es la que viene dada por la propiedad de los módulos, concretamente $M \simeq \mathrm{Hom}_R(R, M)$ y $M \simeq M \otimes_R R$ con los homomorfismos canónicos. Mencionábamos también anteriormente que la categoría CMod-R se puede construir también como categoría cociente con respecto a una cierta teoría de torsión. Toda esta construcción se hace también en este tema. Al hablar de módulos de torsión se introducirá también el concepto de conjunto T-generador por la derecha. Un subconjunto $X \subseteq R$ es un conjunto T-generador por la derecha del anillo R si R/XR es un R-módulo por la derecha de torsión. Este concepto generalizará la propiedad de ser un conjunto generador como ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-módulo. Muchas de estas construcciones no se pueden dualizar en esta forma para la categoría DMod-R. En las dos últimas secciones de este tercer tema se ve que los módulos de CMod-R y DMod-R, aparte de la estructura de R-módulos, tienen estructuras de módulos sobre anillos con identidad que cumplan algunas propiedades particulares.

A este tipos de propiedades las llamaremos “Independencia del Anillo Ambiente” , que con otras palabras significaría que las categorías $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $\mathsf{DMod}\text{-}R$ tienen propiedades intrínsecas que no dependen de la categoría de módulos unitario para un anillo con identidad en las que las metamos, ya sea $\mathsf{MOD}\text{-}R$ o cualquier $\mathsf{Mod}\text{-}B$.

En el Tema 4 se van a construir los módulos asociados a soportes unitarios de los que ya hemos hablado varias veces. Dados dos soportes unitarios $\sigma \subseteq \tau$ tendremos un epimorfismo canónico $\Phi_{\tau\sigma} : \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$. Cuando se tenga que $\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$, este epimorfismo será escindido, y el correspondiente monomorfismo escindido será $\Gamma_{\sigma\tau} : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle$. La relación entre el conjunto X y el anillo R vendrá dada por una aplicación $\pi : X \to R$. Cuando $\pi(X)$ resulta ser un conjunto T-generador por la derecha de R, deducimos que $\coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ es un generador de la categoría $R\text{-}\mathsf{DMod}$. Puesto que siempre se puede encontrar un conjunto X y una aplicación $\pi : X \to R$ tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R, concluimos que $R\text{-}\mathsf{DMod}$ siempre tiene un generador.

En este Tema 4 también se estudiarán de forma general los núcleos de los homomorfismos de la forma $\Phi_{\sigma\tau}$. Estos resultados serán necesarios para mas adelante. El tema concluye viendo que la construcción de $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ es independiente de la elección del anillo con identidad que se utilice en su definición, ya sea la extensión de Dorroh o cualquier otro en las mismas condiciones que se vieron en el tema anterior.

En el Tema 5 se dedica a la construcción de los funtores de localización $\mathbf{C} : \mathsf{MOD}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R$ que es adjunto por la izquierda de la inclusión y del funtor $\mathbf{D} : R\text{-}\mathsf{MOD} \to R\text{-}\mathsf{DMod}$ que va a ser adjunto por la derecha de la inclusión de categorías. Para la construcción de $\mathbf{C}$ no tenemos mas que utilizar las propiedades generales de las categorías cocientes, sin embargo, para el caso del funtor $\mathbf{D}$ tendremos que utilizar un generador de la categoría $R\text{-}\mathsf{DMod}$, que sabemos que existe por haberlo demostrado en el Tema 4. La construcción de $\mathbf{D}$ va a resultar independiente de la elección de dicho generador por la unicidad de la adjunción. La existencia de estos funtores tendrá consecuencias inmediatas en las propiedades de las categorías $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $R\text{-}\mathsf{DMod}$. Concretamente $\mathsf{CMod}\text{-}R$ resulta ser una categoría reflexiva con respecto a $\mathsf{MOD}\text{-}R$ y $R\text{-}\mathsf{DMod}$ una categoría correflexiva con respecto a $R\text{-}\mathsf{MOD}$. Ahí se aplicarán todas las propiedades de este tipo de categorías que se vieron en el Tema 1. Se prueba también que la categoría $R\text{-}\mathsf{DMod}$ es abeliana por la derecha, completa y cocompleta. Por ser $\mathsf{CMod}\text{-}R$ una categoría cociente, resulta ser una categoría de Giraud (e.d. el funtor $\mathbf{C}$ conserva núcleos), sin embargo, la categoría $R\text{-}\mathsf{DMod}$ no es coGiraud en general (e.d. el funtor $\mathbf{D}$ no tiene porqué conservar conúcleos). Este contraejemplo se verá en el último tema.

El Tema 6 está dedicado a los funtores extensibles. Una vez que hemos visto propiedades generales de las categorías $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $R\text{-}\mathsf{DMod}$, pasamos ahora a ver las propiedades de los funtores entre ellas. Concretamente nos centramos en los funtores entre R-DMod y R'-DMod que conservan límites directos. Entre estos funtores existen unos[1], que denominaremos extensibles, que son precisamente los que vienen dados por productos tensoriales por ciertos bimódulos. En este tema se probará que si un funtor F que conserva límites directos puede ser equivalente a un funtor producto tensorial, necesariamente F ha de ser equivalente a $\mathbb{C}(F) \otimes_R -$ mediante la transformación natural que denominamos $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$. Esto simplifica mucho los cálculos, ya que sólo tenemos que ver si una cierta tranformación natural es una equivalencia de funtores. El resultado concreto que se prueba es el siguiente

TEOREMA 6.44. *Sea $F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$ con R un anillo y A' un anillo con identidad. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe un conjunto X y una aplicación $\pi : X \to R$ con $\pi(X)$ un conjunto T-generador por la derecha de R tal que para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, la aplicación canónica*
$$\varinjlim_{\tau \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle) \to F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$$
es un epimorfismo.
2. *F es equivalente a un funtor de la forma $P \otimes_R -$ para algún (A', R)-bimódulo con $A'P = P$.*
3. *Existe un funtor $\overline{F} \in \mathsf{LDFun}({}^{\mathbb{Z}\times}R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$ que extiende al funtor F, es decir $\overline{F} \circ \mathbf{I_D} = F$, siendo $\mathbf{I_D} : R\text{-}\mathsf{DMod} \to {}^{\mathbb{Z}\times}R\text{-}\mathsf{Mod}$ la inclusión canónica.*
4. *Existe un generador ${}_RM$ tal que la transformación natural $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ construida a partir de M es una equivalencia de funtores.*
5. *Para todo generador ${}_RM$, la transformación natural $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ construida a partir de M es una equivalencia de funtores.*
6. *Existe un conjunto X junto con una aplicación $\pi : X \to R$ tal que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R y la construcción de $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ para el generador $G = \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ es una equivalencia de funtores.*
7. *Existe un conjunto X junto con una aplicación $\pi : X \to R$ tal que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R y $\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle}$*

[1] De hecho es un problema abierto si todos los funtores que conservan límites directos son extensibles puesto que no se ha encontrado ningún funtor que conserve límties directos y no sea extensible, sin embargo, se conocen muchos tipos de anillos para los cuales todos los funtores entre las categorías asociadas a ellos que conservan límites directos son extensibles. Estas clases incluyen todos los anillos con identidad, los idempotentes, los que tiene equivalencias entre las categorías $\mathsf{CMod}\text{-}R \simeq \mathsf{DMod}\text{-}R$, $R\text{-}\mathsf{CMod} \simeq R\text{-}\mathsf{DMod}$, los T-finitamente generados y los xst

es un isomorfismo para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ *siendo* ς *la construcción asociada al generador* $\coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$*.*

8. *Existe un conjunto* X *junto con una aplicación* $\pi : X \to R$ *tal que* $\pi(X)$ *es un conjunto* T*-generador por la derecha de* R *y* $\varsigma_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}$ *es un epimorfismo para todo* $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ *siendo* ς *la construcción asociada al generador* $\coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$*.*

Todas esta condiciones son equivalentes a la condición de que F sea un funtor extensible. Concretamente se toma como definición la que está en el punto (1) de este teorema. El hecho de tomar un anillo A' con identidad en lugar de tomar una categoría R'-DMod se solucionará en la Sección 7 de este mismo tema. La Sección 6 está dedicada a ver las relaciones existentes entre $\mathbb{C}\,(P \otimes_R -)$ y $\mathbf{C}\,(P)$. Concretamente se ve que son el mismo módulo. Este resultado nos induce como corolario un resultado clásico para anillos con uno, concretamente que el anillo de biendomorfismos de cualquier generador de R-DMod es la localización del anillo ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ (o de R, puesto que ambas coinciden), en la categoría CMod-R. Si R es un anillo con identidad la localización de R es el mismo R y por lo tanto la propiedad nos diría que el anillo de biendomorfismos de un generador de R-Mod es R.

El Tema 7 está dedicado a la Teoría de Morita y a problemas relacionados. Se empieza viendo cuales son los bimódulos que nos pueden proporcionar funtores entre las categorías que estudiamos. Así aparece el concepto de bimódulo permeable que no tiene correspondiente en el caso de anillos con identidad ya que todos los bimódulos sobre anillos con identidad son permeables por ambos lados con respecto a dichos anillos. También aparece el concepto de homomorfismo permeable de anillos por la derecha o por la izquierda, este tipo de homomorfismos $\alpha : R \to R'$ generalizan para el caso de anillos sin uno del hecho de que los homomorfismos de anillos con identidad lleven la identidad de un anillo en la identidad del otro. Así podemos considerar la categoría de anillos con identidad y de homomorfismos de anillos entre ellos (que llevan el uno al uno) como subcategoría plena de dos categorías que incluyen todos los anillos asociativos pero restringen el tipo de homomorfismos de anillos de forma natural.

Utilizando ya todos estos resultados se puede llegar al teorema central de Morita para anillos asociativos, que nos dice que las categorías CMod-R y CMod-R' son equivalentes si y solo si las categorías R-DMod y R'-DMod son equivalentes con una equivalencia extensible, el teorema nos dará también la forma como vienen descritos los funtores. Así podemos definir la propiedad de que dos anillos R y R' sean Morita-equivalentes como sigue: R y R' son Morita-equivalentes si y solo si CMod-$R \simeq \mathsf{CMod}$-R', DMod-$R \simeq \mathsf{DMod}$-R' siendo esta última equivalencia extensible. Este concepto de Morita-equivalencia es ahora simétrico.

El resto del Tema 7 está dedicado al problema de imponer la condición de que las equivalencias de categorías tengan que ser extensibles. Así se verán muchos tipos de anillos para los cuales todas las equivalencias son extensibles. Estos anillos recibirán el nombre de anillos tratables, siendo un problema abierto si ciertamente existe algún anillo intratable.

El Tema 8 se dedicará a la construcción de unos contraejemplos sobre ciertos aspectos de la teoría. Se verá por ejemplo un anillo para el cual la categoría R-DMod no se una categoría coGiraud en R-MOD. También se tratará el problema de la abelianidad de R-DMod centrando el punto donde está concretamente la dificultad, aunque este sigue como problema abierto. El segundo ejemplo es el de un anillo T-finitamente generado para el cual las categorías CMod-R y DMod-R no son equivalentes a través de los funtores **C** y **D**.

La memoria concluye con un índice terminológico, la bibliografía y un formulario que puede ser de utilidad como referencia rápida que ayude a la lectura.

A lo largo de la memoria, algunos de los resultados se han nombrado como "Ejercicios" , no se pretende con ello hacer una lista completa de ejercicios, sólo se pretende dar indicaciones al lector sobre puntos en los que podría tomar la iniciativa para probar resultados que son relativamente accesibles y que permiten profundizar en los conceptos. A pesar de ello, y puesto que todos los ejercicios vienen acompañados de su correspondiente solución, se podría perfectamente considerar la palabra ejercicio como sinónimo de proposición.

3. Agradecimientos

Desearía aprovechar esta ocasión para agradecer a la gente que ha estado a mi alrededor, especialmente a mi familia, su infinita paciencia y su comprensión ante mis incomprensibles cambios de estado de ánimo entre los "parece que sale" y los "parece que no sale" que lleva aparejados cualquier intento de demostración. También desearía agradecer a mi director de tesis, Prof. José Luis Garía Hernández, por su apoyo y su paciencia, al Prof. Patrick F. Smith por los meses que pasé en la Universidad de Glasgow, y al M.E.C. por la beca de formación de profesorado universitario (FPU) que ha permitido el nacimiento de esta tesis doctoral.

TEMA 1

Preliminares

1. Fijando Notaciones sobre Anillos y Módulos

Definición 1.1. Un anillo es una terna $(R, +, \cdot)$ donde R es un conjunto no vacío, $+$ y $\cdot$ son dos operaciones binarias de forma que $(R, +)$ es un grupo abeliano y $(R, \cdot)$ es un semigrupo cumpliendo las siguientes propiedades adicionales de distributividad

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

$$(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$$

para todo $r, s, t \in R$. Las operaciones $+$ y $\cdot$ generalmente quedan implícitas y se habla de un anillo R sin especificar estas operaciones.

Diremos que R tiene identidad si existe un elemento $1_R \in R$ tal que

$$r \cdot 1_R = r = 1_R \cdot r \quad \forall r \in R$$

Definición 1.2. Sean R y S dos anillos y $\alpha : R \to S$ una aplicación. Diremos que α es un homomorfismo de anillos si es un homomorfismo de grupos abelianos que conserva la multiplicación, es decir

$$(r_1 \cdot r_2)^\alpha = r_1^\alpha \cdot r_2^\alpha$$

para todo $r_1, r_2 \in R$.

Definición 1.3. Sea R un anillo y Z un anillo conmutativo con identidad, diremos que R tiene estructura de Z-álgebra si existe una operación

$$\cdot : Z \times R \to R$$

tal que para todo $y, z \in Z$ y todo $r, s \in R$,

$$z \cdot (r + s) = z \cdot r + z \cdot s$$

$$(y + z) \cdot r = y \cdot r + z \cdot r$$

$$z \cdot (r \cdot s) = (z \cdot r) \cdot s = r \cdot (z \cdot s)$$

$$y \cdot (z \cdot r) = (y \cdot z) \cdot r$$

$$1_Z \cdot r = r$$

Al ser Z conmutativo, consideraremos que R tiene una única multiplicación por elementos de Z tanto por la derecha como por la izquierda, por lo tanto

$$r \cdot z := z \cdot r \quad \forall z \in Z, r \in R.$$

Nota 1.4. *Todo anillo R tiene estructura de $\mathbb{Z}$-álgebra siendo $\mathbb{Z}$ el anillo de los enteros.*

Nota 1.5. *Sea R un anillo con estructura de Z-álgebra para algún anillo conmutativo con identidad Z. Comprobar que el conjunto $Z \times R$ con las operaciones de suma componente a componente y multiplicación*

$$(y, r) \cdot (z, s) = (y \cdot z, y \cdot s + z \cdot r + r \cdot s)$$

es un anillo que habitualmente se denotará ${}^{Z\times}R$. Este anillo es un anillo con identidad, siendo su elemento identidad el $(1_Z, 0)$. Existe también un homomorfismo de anillos canónico

$$\begin{array}{rcl} R & \to & {}^{Z\times}R \\ r & \mapsto & (0, r) \end{array}$$

este homomorfismo es inyectivo.

A este anillo se le llama la extensión de Dorroh de R asociada a Z. Habitualmente consideraremos R contenido en su extensión de Dorroh haciendo la identificación $r \equiv (0, r)$.

Definición 1.6. Sea R un anillo. Un R-módulo a derecha es un grupo abeliano M junto con una operación

$$\cdot\ :\ M \times R \to M$$

que satisface las siguientes propiedades

$$m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s$$

$$(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r$$

$$m \cdot (r \cdot s) = (m \cdot r) \cdot s$$

para todo $m, n \in M$ y todo $r, s \in R$.

Si R tiene identidad, diremos que el módulo es unitario si cumple que

$$m \cdot 1_R = m \quad \forall m \in M$$

Si R es conmutativo, hablaremos simplemente de R-módulos sin especificar si son por la izquierda o por la derecha, en este caso para nosotros será lo mismo $m \cdot r$ que $r \cdot m$.

Definición 1.7. Sean R y S dos anillos. Diremos que M es un (R, S)-bimódulo si M es un R-módulo por la izquierda y un S-módulo por la derecha que cumple la siguiente propiedad adicional:

$$(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s)$$

para todo $r \in R$, $m \in M$ y $s \in S$.

Ejemplo 1.8. Sea R un anillo. Todo R-módulo a derecha es un $(\mathbb{Z}, R)$-bimódulo con la estructura de $\mathbb{Z}$-módulo inducida por el hecho de ser un grupo abeliano.

DEFINICIÓN 1.9. Sea R un anillo y sean M_R y N_R dos R-módulos por la derecha. Un R-homomorfismo entre ellos es un homomorfismo de grupos abelianos

$$f : M \to N$$

que conserva la multiplicación por elementos de R, es decir

$$f(m \cdot r) = f(m) \cdot r \quad \forall m \in M, \forall r \in R$$

El conjunto de todos los R-homomorfismos entre M y N se denotará

$$\mathrm{Hom}_R(M_R, N_R)$$

Los homomorfismos entre R-módulos por la derecha se escribirán a la izquierda de los elementos sobre los que se aplican, cuando utilicemos R-módulos por la izquierda escribiremos los homomorfismos a la izquierda.

En general se puede definir la composición de aplicaciones, utilizaremos el criterio general de definir $f \circ g$ como la aplicación que se define al aplicar primero g y luego f tal y como hemos hecho en este caso. Sin embargo cuando utilizamos las notaciones para R-módulos a la izquierda tenemos lo siguiente

Sean ${}_RK$, ${}_RM$ y ${}_RN$ tres R-módulos por la izquierda, entonces si

$$f \in \mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN) \quad \text{y} \quad g \in \mathrm{Hom}_R({}_RK, {}_RM)$$

tenemos $f \circ g$ definida por

$$(k)(f \circ g) = ((k)g)f$$

Esta es la definición de la composición $f \circ g$, pero se produce un cambio de orden en la escritura. Para solucionar eso denotaremos

$$g * f = f \circ g$$

en el caso de R-homomorfismos entre R-módulos por la izquierda. A la operación $*$ la llamaremos la operación opuesta de la composición. En este caso tendremos

$$(k)(g * f) = ((k)g)f$$

Esta notación la utilizaremos exclusivamente para homomorfismos entre R-módulos por la izquierda.

DEFINICIÓN 1.10. Sea R un anillo, y sea M_R un R-módulo por la derecha. Definiremos el anillo de endomorfismos de M_R como

$$\mathrm{End}_R(M_R) = \mathrm{Hom}_R(M_R, M_R)$$

Sea ${}_RM$ un R-módulo por la izquierda, entonces M adquiere estructura de $\mathrm{End}_R({}_RM)$-módulo unitario por la derecha dotando a $\mathrm{End}_R({}_RM)$ de estructura de anillo con la operación $*$ en lugar de con $\circ$. Para indicar este cambio en la operación hablaremos del anillo $\mathrm{End}_R({}_RM)^{\mathrm{op}}$ cuando nos estemos refiriendo al anillo $(\mathrm{End}_R({}_RM), +, *)$.

Con esta estructura M es un $(R, \mathrm{End}_R({}_RM)^{\mathrm{op}})$-bimódulo.

Definición 1.11. Sea R un anillo, ${}_RM$ un R-módulo por la izquierda y $E = \mathrm{End}_R({}_RM)^{\mathrm{op}}$. Definimos el anillo de biendomorfismos de ${}_RM$ como

$$\mathrm{BiEnd}({}_RM) = \mathrm{End}_E(M_E).$$

Existe un homomorfismo de anillos canónico entre R y $\mathrm{BiEnd}({}_RM)$ dado por

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & R & \to & \mathrm{BiEnd}({}_RM) \\ & r & \mapsto & r^{\alpha} \end{array}$$

con $r^{\alpha}(m) = r \cdot m$ para todo $r \in R$ y todo $m \in M$.

2. Categorías

Definición 1.12. Una categoría $\mathcal{A}$ es un sistema consistente en

1. Una clase $\mathrm{Ob}\mathcal{A}$, cuyos elementos reciben el nombre de objetos de la categoría $\mathcal{A}$.
2. Para cada par de objetos (A, B) en la categoría, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ cuyos elementos se denominan morfismos de A en B.
3. Para cada terna de objetos (A, B, C) de la categoría, una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C) \\ & (f, g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

Sujeto a los siguientes axiomas

CAT1 Si el par de objetos (X, Y) es distinto de del par (X', Y') entonces los conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y')$ son disjuntos.

CAT2 Dados A,B,C y D en $\mathrm{Ob}\mathcal{A}$ morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, D)$ entonces

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

CAT3 Para cada objeto A existe un objeto $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ tal que para cualquier par de objetos B y C y cualesquiera morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, A)$ se cumple que

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \quad \text{y} \quad \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

A este morfismo se le llama el morfismo identidad correspondiente al objeto A.

Ejemplo 1.13. Denotaremos por Set a la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre conjuntos.

Ejemplo 1.14. Sea R un anillo. Entonces denotaremos MOD-R la categoría formada por todos los R-módulos y los R-homomorfismos entre ellos.

Ejemplo 1.15. Sea R un anillo con identidad. Entonces denotaremos por $\mathsf{Mod}\text{-}R$ la subcategoría plena de $\mathsf{MOD}\text{-}R$ formada por los R-módulos por la derecha unitarios.

Definición 1.16. Una categoría $\mathcal{A}$ se dice aditiva si cumple las siguientes condiciones:

1. Posee objeto cero.
2. Cada dos objetos de $\mathcal{A}$ poseen un producto.
3. Para cada par de objetos A y B de $\mathcal{A}$ el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano de forma que dados A,B y C, la composición
$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,C)$$
es bilineal, es decir, para todos $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ y todo $a,b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C)$ se cumple que
$$(a+b)\circ f = a\circ f + b\circ f$$
$$a\circ(f+g) = a\circ f + a\circ g$$

Ejercicio 1.1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Entonces todo núcleo es un monomorfismo. Dualmente, todo conúcleo es un epimorfismo.

Solución:
Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{A}$ que posee un núcleo $k : K \to A$. Vamos a ver que k es un monomorfismo. Supongamos que existen dos morfismos $h_1, h_2 : C \to K$ tales que $k\circ h_1 = k\circ h_2$ entonces $k\circ(h_1 - h_2) = 0$ y por lo tanto $f\circ k\circ(h_1-h_2) = 0$. Aplicando que k es el núcleo de f al morfismo $k\circ(h_1-h_2)$, sabemos que existe un único morfismo α tal que $k\circ(h_1-h_2) = k\circ\alpha$, pero nosotros sabemos que $h_1 - h_2$ y 0 cumplen que
$$k\circ(h_1-h_2) = 0 = k\circ 0$$
por lo tanto $h_1 - h_2 = 0$ y $h_1 = h_2$.

La otra demostración se sigue por dualidad. $\square$

Definición 1.17. Diremos que una categoría $\mathcal{E}$ es exacta por la derecha si verifica:

1. Posee objeto cero.
2. Posee núcleos y conúcleos
3. Es conormal (todo epimorfismo es el conúcleo de algún morfismo).
4. Todo morfismo factoriza en un epimorfismo seguido de un monomorfismo.

Una categoría $\mathcal{E}$ se dice exacta por la izquierda si $\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$ es exacta por la derecha.

Diremos que una categoría es exacta si lo es por los dos lados.

De los axiomas que definen las categorías exactas por la derecha, el único que no es autodual es el tercero, el de la conormalidad. La propiedad dual de la conormalidad que cumplen las categorías exactas por la izquierda es el de la normalidad, es decir, que todo monomorfismo es el núcleo de algún morfismo.

Definición 1.18. Diremos que una categoría $\mathcal{A}$ es abeliana por la derecha (izquierda) si es aditiva y exacta por la derecha (izquierda). Diremos que es abeliana si lo es por los dos lados.

En realidad, muchos de los resultados que vamos a ver para categorías abelianas por la derecha o por la izquierda, se podrían ver para categorías exactas por la derecha o por la izquierda, pero algunas de las demostraciones se complican y como a lo largo de esta memoria todas nuestras categorías van a ser aditivas vamos a hacer casi todas estas demostraciones solamente en el caso aditivo. Como el concepto de categoría abeliana por la derecha no es autodual, a veces reduciremos los axiomas para conseguir que algunos resultados puedan ser aplicados tanto a categorías abelianas por la derecha como por la izquierda.

Proposición 1.19. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría con objeto 0, núcleos y conúcleos. Entonces todo núcleo es el núcleo de su conúcleo. Dualmente todo conúcleo es el conúcleo de su núcleo.*

Demostración:
Sea $f : M \to N$ un morfismo de $\mathcal{E}$. Sea $k : K \to M$ el núcleo de f y $c : M \to C$ el conúcleo de k. Tenemos que probar que k es el núcleo de c.

Por ser k el núcleo de f sabemos que $f \circ k = 0$, y por ser c el conúcleo de k y $f \circ k = 0$ deducimos que existe un morfismo $\alpha : C \to N$ tal que $f = \alpha \circ c$.

Sea $h : X \to M$ tal que $c \circ h = 0$, entonces $0 = \alpha \circ c \circ h = f \circ h$ y por ser k el núcleo de f, h ha de factorizar a través de k, es decir, existe un único $\beta : X \to K$ cumpliendo que $k \circ \beta = h$, que es precisamente la condición necesaria para que k sea el núcleo de c.

La última afirmación se obtiene por dualidad. □

Corolario 1.20. *En una categoría exacta por la derecha, todo epimorfismo es el conúcleo de su núcleo y en una categoría exacta por la izquierda, todo monomorfismo es el núcleo de su conúcleo.*

Demostración:
Si e es un epimorfismo en una categoría exacta por la derecha, entonces e es el conúcleo de un cierto morfismo m y usando la proposición anterior, eso implica que e es el conúcleo de su núcleo.

El otro caso es dual. □

Proposición 1.21. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría con objeto 0, núcleos y conúcleos y sea $f : M \to N$ un morfismo en $\mathcal{E}$, Entonces*

1. *Si* $m : N \to L$ *es un monomorfismo en* $\mathcal{E}$*, entonces el núcleo de* f *es el mismo que el núcleo de* $m \circ f$*.*
2. *Si* $e : L \to M$ *es un epimorfismo en* $\mathcal{E}$*, entonces el conúcleo de* f *es el mismo que el conúcleo de* $f \circ e$*.*

Demostración:

1. Sea $k : K \to M$ el núcleo de $m \circ f$, entonces como $m \circ f \circ k = 0 = m \circ 0$ y m es un monomorfismo, deducimos que $f \circ k = 0$.
   Por otro lado supongamos que $h : X \to M$ es tal que $f \circ h = 0$, entonces $m \circ f \circ h = 0$ y por tanto existe un único morfismo $\alpha : X \to K$ tal que $h = k \circ \alpha$, condición que es precisamente la de que k sea el núcleo de f.
2. La demostración en este caso es dual.

□

Proposición 1.22. *Sea* $\mathcal{E}$ *una categoría exacta por la derecha, entonces* $\mathcal{E}$ *es equilibrada, es decir, todo bimorfismo es un isomorfismo.*

Dualmente, todas las categorías exactas por la izquierda, también son equilibradas.

Demostración:
Sea $f : M \to N$ un bimorfismo, es decir, un monomorfismo y un epimorfismo a la vez y sea $c : N \to C$ el conúcleo de f. Utilizando una proposición anterior, sabemos que f es el núcleo de este conúcleo, pero como $c \circ f = 0$ y f es epimorfismo, deducimos que c es el morfismo 0 y que C es el objeto 0.

Consideremos $\mathrm{id}_N : N \to N$ el morfismo identidad. Si componemos este morfismo con c obtenemos el morfismo 0, por lo tanto id_N factoriza a través del núcleo de c que es precisamente f. Es decir, que existe un $h : N \to M$ tal que $f \circ h = \mathrm{id}_N$.

Como $f \circ \mathrm{id}_M = f = \mathrm{id}_N \circ f = f \circ h \circ f$ y usando que f es un monomorfismo, deducimos que $id_M = h \circ f$. □

Vamos a utilizar la siguiente notación. Dado un morfismo f, el núcleo de f se denotará f^k y el conúcleo de f se denotará f^c. Estos morfismos están definidos salvo isomorfismos. Llamaremos imagen de f al núcleo del conúcleo de f, es decir, a $(f^c)^k$ que denotaremos f^{kc}. Del mismo modo, la coimagen de f será el conúcleo del núcleo de f, es decir $(f^k)^c = f^{ck}$.

Si deseamos fijar los objetos desde los que parten o a los que llegan los morfismos, usaremos la siguiente notación. Supongamos que $f : M \to N$ es un morfismo, entonces denotaremos $f^k : \mathrm{Ker}(f) \to M$ al núcleo de f, $f^c : N \to \mathrm{Coker}(f)$ al conúcleo de f, $f^{ck} : M \to \mathrm{Coim}(f)$ la coimagen y $f^{kc} : \mathrm{Im}(f) \to N$ la imagen de f.

Definición 1.23. Sea $\mathcal{E}$ una categoría aditiva con núcleos y conúcleos y sea $f : M \to N$ un morfismo, vamos a definir el residuo de f, que denotaremos $\mathrm{res}(f)$ del siguiente modo:

Como $f \circ f^k = 0$, entonces f factoriza a través del conúcleo de f^k, es decir, a través de la coimagen de f, existe pues un morfismo $h : \mathrm{Coim}(f) \to N$ tal que $h \circ f^{ck} = f$.

Como $f^c \circ f = 0$ entonces $f^c \circ h \circ f^{ck} = 0$, pero como f^{ck} es un conúcleo, por el Ejercicio 1.1 es un epimorfismo y por lo tanto $f^c \circ h = 0$, de donde deducimos que h factoriza a través del núcleo del conúcleo de f, es decir, a través de la imagen de f, y existirá un morfismo $\mathrm{res}(f) : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^{ck}"'] & N \\
\mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "\mathrm{res}(f)"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "f^{kc}"']
\end{tikzcd}$$

Si existieran dos morfismos α y β de $\mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ tales que $f^{kc} \circ \alpha \circ f^{ck} = f = f^{kc} \circ \beta \circ f^{ck}$, utilizando que f^{kc} es un monomorfismo y que f^{ck} es un epimorfismo que sabemos por el Ejercicio 1.1, deduciríamos que $\alpha = \beta$, por lo tanto, la definición de $\mathrm{res}(f)$ es única.

Proposición 1.24. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana por la derecha, entonces para todo morfismo f, $\mathrm{res}(f)$ es un monomorfismo y la descomposición de f en un epimorfismo seguido de un monomorfismo, es*

$$f = \underbrace{f^{kc} \circ \mathrm{res}(f)}_{\text{mono}} \circ \underbrace{f^{ck}}_{\text{epi}}$$

salvo isomorfismos.

Dualmente, en una categoría abeliana por la izquierda, para todo morfismo f, $\mathrm{res}(f)$ es un epimorfismo y la descomposición de f en un epimorfismo seguido de un monomorfismo es

$$f = \underbrace{f^{kc}}_{\text{mono}} \circ \underbrace{\mathrm{res}(f) \circ f^{ck}}_{\text{epi}}$$

salvo isomorfismos.

Demostración:
Consideremos una descomposición de f en epi seguido de mono, $f = v \circ u$ con v mono y u epi. Por la Proposición 1.21 $f^k = (v \circ u)^k = u^k$ por lo tanto $f^{ck} = u^{ck}$ y por ser u epi en una categoría exacta por la derecha, $u = u^{ck}$. De ahí deducimos que

$$v \circ u = f^{kc} \circ \mathrm{res}(f) \circ u$$

y usando que u es un epimorfismo, deducimos que $v = f^{kc} \circ \mathrm{res}(f)$. Como v es un monomorfismo, deducimos también que $\mathrm{res}(f)$ es un monomorfismo.

La otra demostración se sigue por dualidad. $\square$

Ejercicio 1.2. Sea $\mathcal{E}$ una categoría con objeto 0, núcleos y conúcleos.

1. Entonces el núcleo y el conúcleo del morfismo 0 son la identidad.
2. Todo monomorfismo tiene como núcleo 0, en particular $\mathrm{id}^k = 0$.
3. Todo epimorfismo tiene como conúcleo 0, en particular $\mathrm{id}^c = 0$.
4. El núcleo de cualquier núcleo es 0.
5. El conúcleo de cualquier conúcleo es 0.

Solución:

1. Claramente $\mathrm{id} \circ 0 = 0$ y $0 \circ \mathrm{id} = 0$. Además si tenemos cualquier morfismo u tal que $u \circ 0 = 0$ entonces u factoriza a través del morfismo identidad ya que $u = u \circ \mathrm{id}$. Del mismo modo para todo morfismo v con $0 \circ v = 0$, $v = \mathrm{id} \circ v$.
2. Sea α un monomorfismo, por definición de núcleo, $\alpha \circ \alpha^k = 0$ y como también $0 = \alpha \circ 0$ utilizando que α es mono, deducimos que $\alpha^k = 0$.
3. Sea β un epimorfismo, por definición de conúcleo, $\beta^c \circ \beta = 0$ y como también tenemos que $0 = 0 \circ \beta$ deducimos que $\beta^c = 0$.
4. Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathcal{E}$, $f^k : \mathrm{Ker}(f) \to A$ su núcleo y $h : C \to \mathrm{Ker}(f)$ un morfismo tal que $f^k \circ h = 0$. Entonces $f \circ f^k \circ h = 0$ y por definición de núcleo, existirá un único morfismo $\alpha : C \to \mathrm{Ker}(f)$ tal que $f^k \circ h = f^k \circ \alpha$, pero claramente existen dos, h y 0, por lo tanto han de ser iguales, es decir h factoriza a través del morfismo $0 : 0 \to \mathrm{Ker}(f)$. La unicidad de la factorización viene porque entre C y 0 solo puede existir un morfismo por definición de objeto 0.
5. La demostración de este apartado es dual de la del apartado anterior.

$\square$

3. Generalidades sobre Funtores

Definición 1.25. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías. Un funtor covariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una ley que

1. Asigna a cada objeto A de $\mathcal{A}$ un objeto $F(A)$ en $\mathcal{B}$.
2. Asigna a cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ un morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$ tal que
   (a) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ para todo objeto A de $\mathcal{A}$.
   (b) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ para todo par de morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

Un funtor contravariante es un funtor covariante entre $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ y $\mathcal{B}$. Habitualmente utilizaremos la palabra funtor para referirnos exclusivamente a funtores covariantes.

Los funtores se pueden componer de la manera obvia.

EJEMPLO 1.26. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y sea A un objeto de dicha categoría. Se define el funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-) : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$$

como la ley que asigna a cada objeto B de $\mathcal{A}$ el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ y a cada morfismo $f : B \to B'$ la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f) : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B') \\ & g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

EJEMPLO 1.27. Sea $\mathcal{A}$ una categoría y sea A un objeto de dicha categoría. Se define el funtor contravariante

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,A) : \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$$

como el funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(A,-) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}.$$

DEFINICIÓN 1.28. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías y $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dos funtores. Una transformación natural $\tau : F \to G$ es una ley que asocia a cada objeto A de $\mathcal{A}$ un $\mathcal{B}$-morfismo $\tau_A : F(A) \to G(A)$ tal que para todo $\mathcal{A}$-morfismo $f : A \to B$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ G(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Si τ_A es un isomorfismo para cualquier objeto A de $\mathcal{A}$ diremos que τ es un isomorfismo natural o una equivalencia de funtores.

DEFINICIÓN 1.29. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías. Diremos que son equivalentes si existen funtores

$$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \quad \text{y} \quad G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

e isomorfismos naturales entre los funtores

$$F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$$

$$G \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$$

Las categorías se dicen isomorfas si los isomorfismos naturales anteriores son igualdades, es decir, se cumple que

$$F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$$

$$G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$$

DEFINICIÓN 1.30. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías y sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ dos funtores. Diremos que F es adjunto por la izquierda de G (o que G es adjunto por la derecha de F) si existe un isomorfismo natural

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(-),-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,G(-))$$

Denotaremos esta relación diciendo que

$$\langle F, G, \eta\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

es una adjunción.

Una de las características de los funtores adjuntos es que un funtor determina su adjunto de manera única salvo equivalencias.

PROPOSICIÓN 1.31. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor. Supongamos que existen dos funtores $G, G' : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ e isomorfismos naturales*

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, G(-))$$
$$\eta' : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, G'(-))$$

Entonces existe un isomorfismo natural $\tau : G \to G'$ tal que para todo objeto A de $\mathcal{A}$ y todo objeto B de $\mathcal{B}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, \tau_B) \circ \eta_{A,B} = \eta'_{A,B}$$

es decir, que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B)$,

$$\tau_B \circ \eta_{A,B}(f) = \eta'_{A,B}(f).$$

Demostración:
Ver [**16**, Proposition 7.3]. □

Esta proposición nos dice que el adjunto por la derecha queda unívocamente determinado. La proposición dual nos diría que el adjunto por la izquierda queda también unívocamente determinado.

DEFINICIÓN 1.32. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías y sea

$$\langle F, G, \eta\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

una adjunción. Entonces definiremos para todo objeto A de $\mathcal{A}$,

$$u_A = \eta_{A,F(A)}(\mathrm{id}_{F(A)}) : A \to G \circ F(A).$$

Esta asignación determina una transformación natural

$$u : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \to G \circ F$$

que se denomina la unidad de la adjunción.

Definiremos también para todo objeto B de $\mathcal{B}$,

$$v_B = \eta^{-1}_{G(B),B}(\mathrm{id}_{G(B)}) : F \circ G(B) \to B.$$

Esta asignación determina también una transformación natural

$$v : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$$

que se denomina la counidad de la adjunción.

PROPOSICIÓN 1.33. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías y sea*

$$\langle F, G, \eta\rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

una adjunción y sean u y v respectivamente la unidad y la counidad de la adjunción. Entonces

1. *Para todo* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B)$, $\eta_{A,B}(f) = G(f) \circ u_A$.
2. *Para todo* $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$, $\eta^{-1}_{A,B}(g) = v_B \circ F(h)$.

Demostración:
Ésta es la fórmula (7.3) dada en [**16**, Página 65]. □

PROPOSICIÓN 1.34. *Sea A un objeto de $\mathcal{A}$ y B un objeto de $\mathcal{B}$, entonces*

$$v_{F(A)} \circ F(u_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$$
$$G(v_B) \circ u_{G(B)} = \mathrm{id}_{G(B)}$$

Demostración:
Ésta es la fórmula (7.2) dada en [**16**, Página 65]. □

EJEMPLO 1.35. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías equivalentes a través de los funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Entonces F y G son adjuntos el uno del otro por ambos lados.

4. Sucesiones Exactas

En esta sección vamos a fijar una categoría abeliana por la derecha $\mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 1.36. Una sucesión en $\mathcal{A}$,

$$\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

se dice exacta en A_i cuando el conúcleo f_i coincide con la coimagen de f_{i+1}, es decir, $f_i^c = f_{i+1}^{ck}$.

Diremos que la sucesión completa es exacta cuando es exacta en cada uno de los A_i (excepto los extremos).

PROPOSICIÓN 1.37. *Una sucesión del tipo*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$$

es exacta si y solo si α es un monomorfismo. exacta.

Demostración:
Por definición de exactitud, si esta sucesión es exacta entonces $\alpha^{ck} = 0^c = \mathrm{id}$ y como

$$\alpha = \alpha^{kc} \circ \operatorname{res}(\alpha) \circ \alpha^{ck}$$

deducimos que α es una composición de monomorfismos y por lo tanto un monomorfismo.

Por otro lado, si α es un monomorfismo, entonces por el Ejercicio 1.2, sabemos que $\alpha^k = 0$ y por lo tanto $\alpha^{ck} = (\alpha^k)^c = 0^c$ que es la condición de exactitud que necesitamos. □

PROPOSICIÓN 1.38. *Una sucesión del tipo*

$$B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

es exacta si y solo si β es un epimorfismo.

Demostración:
Por definición de exactitud, esta sucesión es exacta si y solo si $0^{ck} = \beta^c$ y como $0^{ck} = \mathrm{id}^c = 0$, entonces la sucesión es exacta si y solo si $\beta^c = 0$ que es equivalente al hecho de que β sea un epimorfismo por el Ejercicio 1.1. □

5. Funtores Aditivos y Exactos por la Derecha

En esta sección vamos a fijar dos categorías abelianas por la derecha $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

DEFINICIÓN 1.39. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor covariante. Diremos que F es un funtor aditivo cuando para todo par de objetos A y B de $\mathcal{A}$, la aplicación

$$\begin{array}{cccc} F_{AB}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A),F(B)) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos abelianos.

NOTA 1.40. *Por ser F_{AB} un homomorfismo de grupos abelianos, es particular, el morfismo 0, que es el elemento neutro, va siempre al morfismo 0 a través de funtores aditivos.*

Los funtores aditivos también conservan el objeto 0, ya que se puede caracterizar el objeto 0 como el único objeto que cuyo anillo de endomorfismos tiene únicamente un elemento ya que en todos los demás objetos, existen al menos dos, el morfismo 0 y la identidad, sin embargo, en el objeto 0 estos dos morfismos coinciden.

PROPOSICIÓN 1.41. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor covariante. Entonces son equivalentes*

1. *F conserva sumas finitas.*
2. *F conserva productos finitos.*
3. *F es aditivo.*

Demostración:
Ver [**16**, Proposition 9.5]. □

DEFINICIÓN 1.42. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo. Diremos que F es exacto por la derecha si conserva conúcleos.

PROPOSICIÓN 1.43. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor aditivo. Entonces son equivalentes*

1. *F es exacto por la derecha.*
2. *Para toda sucesión exacta de la forma*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

en $\mathcal{A}$, la sucesión

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

es exacta en $\mathcal{B}$.

3. *Para toda sucesión exacta de la forma*

$$A \to B \to C \to 0$$

en $\mathcal{A}$, la sucesión

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

es exacta en $\mathcal{B}$.

Demostración:
Empecemos suponiendo que F es exacto por la derecha y vamos a demostrar (3). Para ello vamos a dar nombre a los morfismos de la sucesión

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

Como β es un epimorfismo y $\mathcal{A}$ es exacta por la derecha, β es un conúcleo y por lo tanto $F(\beta)$ también es un conúcleo por lo que $F(\beta)$ es un epimorfismo en $\mathcal{B}$.

Como β es un epimorfismo, β es el conúcleo de su núcleo y por la condición de exactitud en B, el conúcleo de α es β. Como F conserva conúcleos, entonces $F(\alpha)^c = F(\beta)$, pero como $F(\beta)$ es un epimorfismo, y $\mathcal{B}$ es exacta por la derecha, $F(\beta)$ es el núcleo del conúcleo de $F(\beta)$, es decir, $F(\alpha^c) = F(\beta)^{ck}$ que es la condición que nos faltaba para probar que

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

es exacta en $\mathcal{B}$.

La implicación ($3 \Rightarrow 2$) es trivial. Vamos a probar ahora ($2 \Rightarrow 1$).

Empecemos viendo que un funtor de este tipo conserva epimorfismos. Sea $\beta : A \to B$ un epimorfismo en $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es exacta por la derecha, β coincide con el conúcleo de su núcleo, por lo tanto tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\beta) \xrightarrow{\beta^k} A \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0$$

y aplicando el funtor F obtenemos

$$F(\operatorname{Ker}(\beta)) \xrightarrow{F(\beta^k)} F(A) \xrightarrow{F(\beta)} F(B) \longrightarrow 0$$

y utilizando la Proposición 1.38 deducimos que $F(\beta)$ es un epimorfismo.

Vamos a probar ahora que F conserva conúcleos, para ello tomemos un morfismo cualquiera $\alpha : M \to N$ en $\mathcal{A}$. Tenemos que probar que $F(\alpha^c) = F(\alpha)^c$.

Empecemos considerando la siguiente descomposición

$$\alpha = \alpha^{kc} \circ \operatorname{res}(\alpha) \circ \alpha^{ck}$$

Como α^{ck} es un epimorfismo por ser un conúcleo, podemos aplicar la Proposición 1.21 y deducir que

$$\alpha^c = (\alpha^{kc} \circ \operatorname{res}(\alpha))^c.$$

Además, como α^c es un conúcleo, es el conúcleo de su núcleo de donde deducimos que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coim}(\alpha) \xrightarrow{\alpha^{kc} \circ \mathrm{res}(\alpha)} N \xrightarrow{\alpha^c} \mathrm{Coker}(\alpha) \longrightarrow 0$$

Si aplicamos el funtor F obtenemos la sucesión exacta siguiente

$$F(\mathrm{Coim}(\alpha)) \xrightarrow{F(\alpha^{kc} \circ \mathrm{res}(\alpha))} F(N) \xrightarrow{F(\alpha^c)} F(\mathrm{Coker}(\alpha)) \longrightarrow 0$$

Por definición de exactitud de la sucesión anterior sabemos que $F(\alpha^{kc} \circ \mathrm{res}(\alpha))^c = F(\alpha^c)^{ck}$ y como $F(\alpha^c)$ es un epimorfismo y $\mathcal{B}$ es exacta por la derecha, coincide con el conúcleo de su núcleo, de donde deducimos que $F(\alpha^{kc} \circ \mathrm{res}(\alpha))^c = F(\alpha^c)$.

Por otro lado, $\alpha = \alpha^{kc} \circ \mathrm{res}(\alpha) \circ \alpha^{ck}$ por lo tanto $F(\alpha) = F(\alpha^{kc} \circ \mathrm{res}(\alpha)) \circ F(\alpha^{ck})$ y como $F(\alpha^{ck})$ es un epimorfismo deducimos que

$$F(\alpha)^c = F(\alpha^{kc} \circ \mathrm{res}(\alpha))^c$$

que habíamos probado antes que coincidía con $F(\alpha^c)$. □

6. Categorías Reflexivas y Correflexivas

Definición 1.44. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías y sea $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor pleno y fiel .

Diremos que $\mathcal{A}$ es una categoría reflexiva con respecto a $\mathcal{B}$ si y solo si J tiene un adjunto por la izquierda.

Dualmente diremos que $\mathcal{A}$ es una categoría correflexiva con respecto a $\mathcal{B}$ si y solo si J tiene un adjunto por la derecha.

En esta sección vamos a estudiar principalmente las propiedades de las categoría correflexivas ya que serán las que mas apliquemos a lo largo de esta memoria. Las propiedades de las categorías reflexivas vendrán dadas por dualidad.

A partir de ahora fijaremos dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ junto con un funtor pleno y fiel $J : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y un adjunto por la derecha de J que denotaremos $D : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Fijaremos también la unidad y la counidad de la adjunción que denotaremos respectivamente

$$u : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \to D \circ J$$
$$v : J \circ D \to \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$$

y el isomorfismo que da la adjunción

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(J(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, D(-)).$$

Lema 1.45. *Sea A un objeto de $\mathcal{A}$ y B un objeto de $\mathcal{B}$. Entonces para todo morfismo $\alpha : J(A) \to B$ existe un único $\bar{\alpha} : A \to D(B)$ tal que $\alpha = v_B \circ J(\bar{\alpha})$.*

Demostración:
Este morfismo es concretamente $\bar{\alpha} = \eta_{AB}(\alpha)$. Utilizando la Proposición 1.33, sabemos que $\bar{\alpha} = D(\alpha) \circ u_A$ y que $\alpha = v_B \circ J(\bar{\alpha})$. □

PROPOSICIÓN 1.46. *La transformación natural u es una equivalencia de funtores.*

Demostración:
Esta demostración se puede ver en [**16**, Proposition 7.5]. Vamos solamente a decir cual es el inverso de u_X. El inverso de u_X es el único morfismo h tal que $J(h) = v_{J(X)}$. $\square$

LEMA 1.47. *Sea L un objeto de $\mathcal{B}$ tal que para el morfismo $v_L : JD(L) \to L$ existe $v'_L : L \to JD(L)$ con $v_L \circ v'_L = \mathrm{id}_L$. Entonces $v'_L \circ v_L = \mathrm{id}_{JD(L)}$.*

Demostración:
Por ser J pleno, existirá un morfismo $h : D(L) \to D(L)$ tal que $J(h) = v'_L \circ v_L$.

Para el morfismo $\alpha = v_L : JD(L) \to L$ existen dos morfismos $\mathrm{id}_{D(L)}, h : D(L) \to D(L)$ tales que $v_L \circ J(\mathrm{id}_{D(L)}) = \alpha = v_L \circ J(h)$. Utilizando pues la unicidad dada por el Lema 1.45 deducimos que $h = \mathrm{id}_{D(L)}$ y por lo tanto $v'_L \circ v_L = \mathrm{id}_{JD(L)}$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.48. *Sea $((M_i)_{i\in I}, (\sigma_{ji} : M_i \to M_j)_{i\le j})$ un sistema directo en $\mathcal{A}$ tal que para $((J(M_i))_{i\in I}, (J(\sigma_{ji}) : J(M_i) \to J(M_j))_{i\le j})$ existe un límite directo $(L, (q_i : J(M_i) \to L)_{i\in I})$ en $\mathcal{B}$. Entonces $(D(L), (D(q_i)\circ u_{M_i} : M_i \to D(L))_{i\in I})$ es un límite directo de $((M_i)_{i\in I}, (\sigma_{ji})_{i\le j})$ en $\mathcal{A}$. Además, en este caso $v_L : JD(L) \to L$ es un isomorfismo.*

Demostración:
Empecemos viendo que v_L es un isomorfismo. Para ello consideremos la familia de morfismos $v_L \circ JD(q_i) \circ J(u_i)$ con $i \in I$. Para todo $i \in I$ se tiene que $v_L \circ JD(q_i) = q_i \circ v_{J(M_i)}$, por lo tanto

$$v_L \circ JD(q_j) \circ J(u_j) \circ \sigma_{ji} = q_j \circ \underbrace{v_{J(M_j)} \circ J(u_{M_j})}_{\mathrm{id}_{J(M_j)}} \circ \sigma_{ji} =$$

$$q_j \circ \sigma_{ji} = q_i = q_i \circ v_{J(M_i)} \circ J(u_{M_i}) = v_L \circ JD(q_i) \circ J(u_{M_i})$$

Por lo tanto, utilizando la propiedad universal del límite directo, existe un único morfismo $v'_L : L \to JD(L)$ el siguiente diagrama es conmutativo para todo $i \in I$

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{v'_L} & JD(L) \\ {\scriptstyle q_i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle DJ(q_i)} \\ J(M_i) & \xrightarrow{J(u_i)} & JDJ(M_i) \end{array}$$

Es decir, $v'_L \circ q_i = DJ(q_i) \circ J(u_i)$ para todo $i \in I$. Entonces

$$v_L \circ v'_L \circ q_i = v_L \circ DJ(q_i) \circ J(u_i) = q_i \circ v_{J(M_i)} \circ J(u_i) = q_i$$

por lo tanto $v_L \circ v'_L = \mathrm{id}_L$ y por el lema anterior deducimos que v_L es un isomorfismo.

Sea $i \leq j$, por ser (L, q_i) un límite directo, sabemos que $q_i = q_j \circ J(\sigma_{ji})$. Llamemos a este morfismo α, y sean

$$\bar{\alpha} = D(q_j) \circ u_{M_j} \circ \sigma_{ji}$$

$$\bar{\beta} = D(q_i) \circ u_{M_i}$$

Nuestro objetivo es probar que $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. Utilizando la naturalidad de v y las propiedades de los funtores, tenemos que

$$v_L \circ J(\bar{\alpha}) = v_L \circ JD(q_j) \circ J(u_{M_j}) \circ J(\sigma_{ji}) =$$

$$q_j \circ \underbrace{v_{J(M_j)} \circ J(u_{M_j})}_{\mathrm{id}_{J(M_j)}} \circ J(\sigma_{ji}) = q_j \circ J(\sigma_{ji}) =$$

$$\alpha = q_i = q_i \circ \mathrm{id}_{J(M_i)} = q_i \circ v_{J(M_i)} \circ J(u_{M_i}) =$$

$$v_L \circ JD(q_i) \circ J(u_{M_i}) = v_L \circ J(\bar{\beta})$$

y utilizando el Lema 1.45 deducimos que $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$.

Sea $(f_i : M_i \to M)_{i \in I}$ una familia de morfismos en $\mathcal{A}$ tal que para todo $i \leq j$, $f_j \circ \sigma_{ji} = f_i$. Entonces para todo $i \leq j$ se tiene que $J(f_j) \circ J(\sigma_{ji}) = J(f_i)$ por lo que utilizando la propiedad universal del límite directo, deducimos que existe un único morfismo $\bar{f} : L \to J(M)$ tal que $\bar{f} \circ q_i = J(f_i)$ para todo $i \in I$.

Denotemos por $f = u_M^{-1} \circ D(\bar{f})$.

$$f \circ D(q_i) \circ u_{M_i} = u_M^{-1} \circ D(\bar{f}) \circ D(q_i) \circ u_{M_i} =$$

$$u_M^{-1} \circ DJ(f_i) \circ u_{M_i} = f_i \quad \forall i \in I$$

Supongamos que tenemos dos morfismos f y g tales que $f \circ D(q_i) \circ u_{M_i} = g \circ D(q_i) \circ u_{M_i}$ para todo $i \in I$. Entonces para todo $i \in I$ se tiene que

$$J(f) \circ JD(q_i) \circ J(u_{M_i}) = J(g) \circ JD(q_i) \circ J(u_{M_i})$$

Utilizando la naturalidad de v y que v_L es un isomorfismo sabemos que $JD(q_i) = v_L^{-1} \circ q_i \circ v_{J(M_i)}$ y como $v_{J(M_i)} \circ J(u_{M_i}) = \mathrm{id}_{J(M_i)}$ obtenemos para todo $i \in I$ que

$$J(f) \circ v_L^{-1} \circ q_i = J(g) \circ v_L^{-1} \circ q_i$$

y utilizando la propiedad universal del límite directo deducimos que $J(f) \circ v_L^{-1} = J(g) \circ v_L^{-1}$ y por lo tanto $J(f) = J(g)$ y por ser J fiel, $f = g$. □

COROLARIO 1.49. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría correflexiva con respecto a una categoría cocompleta $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A}$ es una categoría cocompleta.*

Demostración:

Basta aplicar la proposición anterior para calcular el límite directo de cualquier sistema directo. □

PROPOSICIÓN 1.50. *Sea* $((M_i)_{i\in I}, (\sigma_{ji} : M_i \to M_j)_{i\leq j})$ *un sistema inverso en* $\mathcal{A}$ *tal que para* $((J(M_i))_{i\in I}, (J(\sigma_{ji}) : J(M_i) \to J(M_j))_{i\leq j})$ *existe un límite inverso* $(L, (p_i : L \to J(M_i))_{i\in I})$ *en* $\mathcal{B}$. *Entonces* $(D(L), (u_{M_i}^{-1} \circ D(p_i) : D(L) \to M_i)_{i\in I})$ *es un límite inverso de* $((M_i)_{i\in I}, (\sigma_{ji})_{i\leq j})$ *en* $\mathcal{A}$.

Demostración:
Sea $i \leq j$. Por la naturalidad de u sabemos que $\sigma_{ji} \circ u_{M_i}^{-1} = u_{M_j}^{-1} \circ DJ(\sigma_{ji})$ por lo tanto

$$\sigma_{ji} \circ u_{M_i}^{-1} \circ D(p_i) = u_{M_j}^{-1} \circ DJ(\sigma_{ji}) \circ D(p_i) =$$

$$u_{M_j}^{-1} \circ D(J(\sigma_{ji}) \circ p_i) = u_{M_j}^{-1} \circ D(p_j)$$

Sea M un objeto en $\mathcal{A}$ y $f_i : M \to M_i$ una familia de morfismos tales que para todo $i \leq j$, $\sigma_{ji} \circ f_i = f_j$. Entonces $J(\sigma_{ji}) \circ J(f_i) = J(f_i)$ por lo que existirá un único $\bar{f} : J(M) \to L$ tal que $p_i \circ \bar{f} = J(f_i)$ para todo $i \in I$.

Denotemos $f = D(\bar{f}) \circ u_M : M \to D(L)$. Entonces para todo $i \in I$,

$$u_{M_i}^{-1} \circ D(p_i) \circ f = u_{M_i}^{-1} \circ D(p_i \circ \bar{f}) \circ u_M u_{M_i}^{-1} \circ D(f_i) \circ u_M = f_i.$$

Supongamos que existen dos morfismos $f, g : M \to D(L)$ tales que

$$u_{M_i}^{-1} \circ D(p_i) \circ g = u_{M_i}^{-1} \circ D(p_i) \circ f \quad \forall i \in I$$

Entonces

$$D(p_i) \circ f = D(p_i) \circ g \quad \forall i \in I \Rightarrow$$

$$JD(p_i) \circ J(f) = JD(p_i) \circ J(g) \quad \forall i \in I \Rightarrow$$

$$v_{J(M_i)} \circ JD(p_i) \circ J(f) = v_{J(M_i)} \circ JD(p_i) \circ J(g) \quad \forall i \in I \Rightarrow$$

$$p_i \circ v_L \circ J(f) = p_i \circ v_L \circ J(g) \quad \forall i \in I \Rightarrow$$

$$v_L \circ J(f) = v_L \circ J(g)$$

y utilizando el Lema 1.45 deducimos que $f = g$. □

COROLARIO 1.51. *Si* $\mathcal{A}$ *es una categoría correflexiva con respecto a una categoría completa* $\mathcal{B}$, *entonces* $\mathcal{A}$ *es también una categoría completa.*

Demostración:
Basta aplicar la proposición anterior para calcular el límite inverso de cualquier sistema inverso. □

PROPOSICIÓN 1.52. *Si* $\mathcal{A}$ *es una categoría correflexiva con respecto a una categoría* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}$ *tiene un cogenerador, entonces* $\mathcal{A}$ *también tiene un cogenerador.*

Demostración:
Sea C un cogenerador de $\mathcal{B}$. Vamos a probar que $D(C)$ es un cogenerador de $\mathcal{A}$, para ello tomemos dos objetos X e Y de $\mathcal{A}$ y dos morfismos $f, g : X \to Y$ tales que $f \neq g$. Como J es un funtor fiel, $J(f) \neq J(g)$ por lo que aplicando la definición de cogenerador podemos encontrar un

morfismo $\alpha : J(Y) \to C$ tal que $\alpha \circ J(f) \neq \alpha \circ J(g)$. Por el Lema 1.45 sabemos que existe un único $\bar{\alpha} : Y \to D(C)$ tal que $\alpha = v_C \circ J(\bar{\alpha})$, pero entonces $v_C \circ J(\bar{\alpha} \circ f) \neq v_C \circ J(\bar{\alpha} \circ g)$ y por lo tanto $J(\bar{\alpha} \circ f) \neq J(\bar{\alpha} \circ g)$. Utilizando de nuevo que J es fiel, deducimos que $\bar{\alpha} \circ g \neq \bar{\alpha} \circ f$, lo que prueba que $D(C)$ es un cogenerador de $\mathcal{A}$. □

7. Los Funtores $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ y $-\otimes_R-$

Ejercicio 1.3. Sea R un anillo con estructura de Z-álgebra sobre un anillo conmutativo con identidad Z.

Sea M un (Z,R)-bimódulo, entonces M tiene estructura de ${}^{Z\times}R$-módulo por la derecha unitario con la operación

$$m \cdot (z,r) = m \cdot z + m \cdot r$$

para todo $z \in Z$, $r \in R$ y $m \in M$.

Recíprocamente sea M un ${}^{Z\times}R$-módulo por la derecha unitario, entonces M tiene estructura de (Z,R)-bimódulo con las operaciones

$$z \cdot m = m \cdot (z,0) \quad \forall z \in Z, \forall m \in M$$

$$m \cdot r = m \cdot (0,r) \quad \forall r \in R, \forall m \in M$$

Estas operaciones son inversas la una de la otra.

Solución:
Vamos a ir comprobando cada una de las condiciones de la definición de módulo.

Sean $m, m' \in M$ y $(z,r), (z',r') \in {}^{Z\times}R$.

- $m((z,r)+(z',r')) = m(z+z', r+r') = m(z+z') + m(r+r') = mz+mz'+mr+mr' = mz+mr+mz'+mr' = m(z,r)+m(z',r')$.
- $(m+m')(z,r) = (m+m')z+(m+m')r = mz+m'z+mr+m'r = mz+mr+m'z+m'r = m(z,r)+m'(z,r)$.
- $m((z,r)(z',r')) = m(zz', zr'+z'r+rr') = mzz'+mzr'+mz'r+mrr' = mz(z',r')+mr(z',r') = (mz+mr)(z',r') = (m(z,r))(z',r')$.
- $m(1_Z,0) = m1_Z + m0 = m$.

Sean $m, m' \in M$, $z, z' \in Z$, $r, r' \in R$.

- $z(m+m') = (m+m')(z,0) = m(z,0) + m'(z,0) = zm + zm'$.
- $(z+z')m = m(z+z',0) = m(z,0) + m(z',0) = zm + z'm$.
- $zz'm = m(zz',0) = m(z'z,0) = m((z',0)(z,0)) = (m(z',0))(z,0) = z(z'm)$.
- $1_Z m = m(1_Z,0) = m$.
- $(m+m')r = (m+m')(0,r) = m(0,r) + m'(0,r) = mr + mr'$.
- $m(r+r') = m(0,r+r') = m((0,r)+(0,r')) = m(0,r)+m(0,r') = mr + mr'$.
- $m(rr') = m(0,rr') = m((0,r)(0,r')) = (m(0,r))(0,r') = (mr)r'$.
- $(zm)r = (m(z,0))(0,r) = m((z,0)(0,r)) = m(0,zr) = m(0,rz) = (m(0,r))(0,z) = z(mr)$.

□

Ejercicio 1.4. Sea R un anillo, entonces utilizando la estructura de $\mathbb{Z}$-álgebra de R y las estructuras de $(\mathbb{Z}, R)$-bimódulos de todos los R-módulos a derecha, se pueden definir funtores que inducen un isomorfismo entre las categorías

$$\mathsf{MOD}\text{-}R \simeq \mathsf{Mod}\text{-}{}^{\mathbb{Z}\times}R$$

por el ejercicio anterior y por la propiedad adicional de que

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\times R}(M, N)$$

con las estructuras inducidas para dos R-módulos a derecha M y N.

Solución:
En realidad lo que tenemos que ver es cómo se comportarían estos funtores con los morfismos.

Sea $f \in \mathrm{Hom}_R(M_R, N_R)$, f en particular es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo, entonces para todo $m \in M$, $(z, r) \in {}^{\mathbb{Z}\times}R$ tenemos

$$f(m)(z, r) = f(m)z+f(m)r = f(mz)+f(mr) = f(mz+mr) = f(m(z, r))$$

Por lo tanto f es también un ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-homomorfismo. Recíprocamente si $M_{\mathbb{Z}\times R}$ y $N_{\mathbb{Z}\times R}$ son dos ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-módulos unitarios y $f : M \to N$ es un ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-homomorfismo, en particular tendremos que para todo $m \in M$ y todo $r \in R$,

$$f(mr) = f(m(0, r)) = f(m)(0, r) = f(m)r.$$

$\square$

El resultado del ejercicio anterior nos muestra entre otras cosas que para cualquier R-módulo M, el funtor

$$\mathrm{Hom}_R(M, -) : \mathsf{MOD}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$$

es equivalente a través del isomorfismo de categorías, al funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\times R}(M, -) : \mathsf{Mod}\text{-}{}^{\mathbb{Z}\times}R \to \mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Z}$$

Otro tipo de funtores que tendrá una especial importancia, son los funtores producto tensorial. Vamos a definir el producto tensorial y vamos a ver que también se puede utilizar la extensión de Dorroh.

Definición 1.53. Sea R un anillo, M_R y ${}_RN$ R-módulos por el lado que se indica y A un grupo abeliano. Una aplicación

$$\beta : M \times N \to A$$

es una aplicación bilineal R-equilibrada cuando

1. $\beta(m_1 + m_2, n) = \beta(m_1, n) + \beta(m_2, n) \quad \forall m_1, m_2 \in M, \forall n \in N.$
2. $\beta(m, n_1 + n_2) = \beta(m, n_1) + \beta(m, n_2) \quad \forall m \in M, \forall n_1, n_2 \in N.$
3. $\beta(mr, n) = \beta(m, rn) \quad \forall m \in M, \forall r \in R, \forall n \in N.$

DEFINICIÓN 1.54. Sea R un anillo, M_R y ${}_RN$ R-módulos por el lado que se indica. Un producto tensorial de M por N es un par (T,τ) donde T es un grupo abeliano y $\tau : M \times N \to T$ es bilineal R-equilibrada y verifica: "Dado un par (A,β) con A grupo abeliano y $\beta : M \times N \to A$ bilineal R-equilibrada, existe un único homomorfismo de grupos abelianos $f : T \to A$ tal que $f \circ \tau = \beta$."

Si existe un producto tensorial con la definición dada anteriormente podemos establecer una biyección entre los homomorfismos de grupos abelianos de T a A y las aplicaciones $M \times N \to A$ bilineales R-equilibradas que a cada homomorfismo $f : T \to A$ lo lleve a $f \circ \tau$.

Esta definición también nos proporciona unicidad salvo isomorfismos:

EJERCICIO 1.5. Sea R un anillo, M_R y ${}_RN$ R-módulos por el lado que se indica. Si (T,τ) y (T',τ') son dos productos tensoriales de M por N entonces existe un isomorfismo $\varphi : T \to T'$ tal que $\varphi \circ \tau = \tau'$.

Solución:
Aplicando la propiedad de la Definición 1.54 a τ obtenemos un único homomorfismo $g : T' \to T$ tal que $\tau = g \circ \tau'$. Aplicando la misma definición a τ' obtenemos un único homomorfismo $f : T \to T'$ tal que $\tau' = f \circ \tau$. Entonces tenemos que $\mathrm{id}_T \circ \tau = \tau = g \circ \tau' = g \circ f \circ \tau$ y utilizando la unicidad deducimos que $g \circ f = \mathrm{id}_T$. De forma simétrica se prueba que $f \circ g = \mathrm{id}_{T'}$. □

Una vez probada la unicidad salvo isomorfismos podemos establecer una notación para el producto tensorial. El producto tensorial de M por N con su estructura de R-módulos, se denotará $M \otimes_R N$ y los elementos de la forma $\tau(m,n)$ se denotarán $m \otimes n$.

Vamos a probar la existencia del producto tensorial basándonos en la existencia del producto tensorial para módulos unitarios sobre un anillo con identidad utilizando la identificación dada en el Ejercicio 1.3.

PROPOSICIÓN 1.55. *Sea R un anillo y sean M_R y ${}_RN$ dos R-módulos por el lado que se indica, entonces $M \otimes_{\mathbb{Z}\times R} N$ junto con*

$$\begin{array}{rccc} \tau : & M \times N & \to & M \otimes_{\mathbb{Z}\times R} N \\ & (m,n) & \mapsto & m \otimes n \end{array}$$

es un producto tensorial sobre R de M y N. En otras palabras, $M \otimes_R N = M \otimes_{\mathbb{Z}\times R} N$.

Demostración:
Solo es necesario comprobar que $M \otimes_{\mathbb{Z}\times R} N$ cumple la propiedad de la definición de producto tensorial, y después utilizaremos la unicidad del producto tensorial para obtener la conclusión que deseamos.

Sea A un grupo abeliano y $\beta : M \times N \to A$ una aplicación bilineal R-equilibrada. Vamos a comprobar que entonces β es también una aplicación ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-equilibrada, para ello sea $m \in M$, $n \in N$ y $(z,r) \in {}^{\mathbb{Z}\times}R$.

$$\beta(m \cdot (z,r), n) = \beta(m \cdot z + m \cdot r, n) = \beta(m \cdot z, n) + \beta(m \cdot z, n).$$

Por ser β bilineal y ser z un número entero, podemos decir que $\beta(m \cdot z, n) = z\beta(m,n) = \beta(m, z \cdot n)$ y utilizando esta igualdad deducimos que

$$\beta(m \cdot r, n) + \beta(m \cdot z, n) = \beta(m, r \cdot n) + \beta(m, z \cdot n) =$$
$$\beta(m, r \cdot n + z \cdot n) = \beta(m, (r,z) \cdot n)$$

Utilizando la propiedad del producto tensorial $M \otimes_{\mathbb{Z} \times R} N$ podemos encontrar un único homomorfismo de grupos abelianos $f : M \otimes_{\mathbb{Z} \times R} N \to A$ tal que $f \circ \tau = \beta$, siendo esta la propiedad que buscábamos. □

Hay ocasiones en las que el grupo abeliano $M \otimes_R N$ tiene una estructura adicional.

Proposición 1.56. *Sean R,S y T anillos y sean ${}_SM_R$ y ${}_RN_T$ bimódulos como se indica, entonces $M \otimes_R N$ es un (S,T)-bimódulo.*

Demostración:
La demostración es similar a la que se hace en el caso de anillos con identidad, vamos a recordarla. El único problema que aparece es definir el producto de elementos de S por elementos de $M \otimes_R N$. Dado un elemento

$$\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i \in M \otimes_R N$$

y un elemento $s \in S$, se puede intentar definir

$$s \sum_{i \in I} m_i \otimes n_i = \sum_{i \in I} (sm_i) \otimes n_i.$$

Sin embargo, esta definición tiene el problema de que la expresión de un elemento de $M \otimes_R N$ como suma de elementos de la forma $m \otimes n$ no es única, tenemos pues que trabajar un poco mas para hacer la definición del producto.

Sea $s \in S$. Consideremos el homomorfismo canónico

$$\begin{array}{rccc} \tau : & M \times N & \to & M \otimes_R N \\ & (m,n) & \mapsto & m \otimes n \end{array}$$

y la aplicación bilineal R-equilibrada

$$\begin{array}{rccc} \beta_s : & M \times N & \to & M \otimes_R N \\ & (m,n) & \mapsto & (sm) \otimes n \end{array}$$

Por la propiedad del producto tensorial existe un único homomorfismo de grupos abelianos $\nu_s : M \otimes_R N \to M \otimes_R N$ tal que $\nu_s \circ \tau = \beta_s$. Definiremos pues $sw = \nu_s(w)$ para todo $w \in M \otimes_R N$. Esto hace que se cumpla la igualdad

$$s \sum_{i \in I} m_i \otimes n_i = \sum_{i \in I} (sm_i) \otimes n_i.$$

Utilizando esta igualdad y el hecho de que M es un S-módulo por la izquierda se puede comprobar fácilmente que $M \otimes_R N$ es un S-módulo por la izquierda. De forma simétrica se hace la prueba de que $M \otimes_R N$ es un T-módulo por la derecha. La comprobación de la propiedad de bimódulo es también inmediata. $\square$

Tal y como vimos en el caso de los funtores $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ y $\mathrm{Hom}_R(-,N)$, en el caso de los funtores producto tensorial $M\otimes_R-$ y $-\otimes_R N$, podemos reducir su estudio al caso de los funtores producto tensorial $M \otimes_{\mathbb{Z}\times R} -$ y $- \otimes_{\mathbb{Z}\times R} N$ ya que son equivalentes de una forma canónica.

Utilizando el resultado correspondiente para anillos con identidad y las extensiones de Dorroh se comprueba inmediatamente que se cumplen las propiedades de adjunción entre los funtores Hom y producto tensorial. Es decir

Proposición 1.57. *Sean R y S dos anillos y sean ${}_SM_R$, ${}_RN$ y ${}_SP$ módulos como se indica. Entonces se tiene un isomorfismo de grupos abelianos*

$$\alpha : \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, P) \to \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_S(M,P))$$

Dado por

$$(m)((\alpha f)(n)) = (m \otimes n)f.$$

Además α es natural en N y en P.

Demostración:
Ver [**3**, Proposition 20.6]. $\square$

Este resultado nos permite garantizar que los funtores $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ conservan límites inversos y que los funtores $M \otimes_R -$ conservan límites directos.

Proposición 1.58. *Sea A un anillo con identidad, M_A y ${}_AN$ dos A-módulos unitarios por el lado que se indica. Sea $\{n_i : i \in I\}$ un conjunto generador del módulo ${}_AN$ y $\{m_i : i \in I\}$ una familia de elementos de M casi todos nulos. Entonces $\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i = 0$ en $M\otimes_A N$ si y solo si existe un conjunto finito F, unos elementos $\{x_f : f \in F\} \subseteq M$ y $\{a_{fi} : (i,f) \in I \times F\} \subseteq R$ cumpliendo las siguientes condiciones:*
1. *$a_{fi} = 0$ para casi todo par $(i,f) \in I \times F$.*
2. *$\sum_{i\in I} a_{fi} n_i = 0$ para todo $f \in F$.*
3. *$m_i = \sum_{f\in F} x_f a_{fi}$ para todo $i \in I$.*

Demostración:
Ver [**45**, Seite 97]. $\square$

TEMA 2

Soportes

1. Primeras Definiciones y Notaciones

Definición 2.1. Sea X un conjunto. Denotaremos $\Sigma(X)$ al conjunto dado por $\cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}X^n$.

En esta definición consideraremos que X^0 contiene una 0-tupla que representaremos como $\varnothing$. En todos los casos consideraremos que si $k \neq j$ entonces X^k no tiene elementos comunes con X^j. El único caso en que esto podría dar algún problema es en el caso X^0 con X^1, es decir, en el caso en que $\varnothing \in X$. Para evitar esto consideraremos que la unión $\cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}X^n$ es una unión disjunta.

A los elementos de $\Sigma(X)$ los denotaremos como $\overline{x}, \overline{y}, \overline{x}^\alpha, \cdots$. Denotaremos por $\lambda(\overline{x})$ el elemento de $\mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $\overline{x} \in X^{\lambda(\overline{x})}$. Con esta notación escribiremos $\overline{x} = x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{x})}$.

Tendremos pues una notación del tipo

$$\overline{y} = y_1 \cdots y_{\lambda(\overline{y})}$$

$$\overline{x}^\alpha = x_1^\alpha \cdots x^\alpha_{\lambda(\overline{x}^\alpha)}$$

$$\cdots$$

Los elementos de $\Sigma(X)$ se pueden yuxtaponer del siguiente modo, dados $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$, definiremos

$$\overline{xy} = x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{x})} y_1 \cdots y_{\lambda(\overline{y})}$$

Con esta definición $\Sigma(X)$ no es mas que el monoide libre sobre X, siendo $\varnothing$ el elemento neutro de este monoide.

A veces, para algún tipo de notaciones nos interesará representar la tupla con los elementos cambiados de orden, es decir, $x_{\lambda(\overline{x})} \cdots x_1$, esta tupla se representará $\underline{x}$. En esta forma se podrán también yuxtaponer, de forma que $\underline{xy} = x_{\lambda(\overline{x})} \cdots x_1 y_{\lambda(\overline{y})} \cdots y_1$.

Vamos a definir la siguiente relación de orden entre los elementos de $\Sigma(X)$. Dados $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$, diremos que $\overline{x} \leq \overline{y}$ si y solo si existe $\overline{w} \in \Sigma(X)$ tal que $\overline{xw} = \overline{y}$. Esta es claramente una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. En cierto modo, esta relación se asemeja a la relación de divisibilidad, pero no utilizaremos la notación de divisibilidad porque estamos trabajando en un monoide no conmutativo.

Si $\overline{x} \leq \overline{y}$, el elemento $\overline{w} \in \Sigma(X)$ tal que $\overline{xw} = \overline{y}$ está unívocamente determinado. A este elemento lo denotaremos $\overline{x}^{-1}\overline{y}$. Ésto no es mas que una mera notación ya que $\overline{x}^{-1}$ no es un elemento de $\Sigma(X)$, por lo tanto no tendrá sentido escribir $\overline{x}^{-1}\overline{y}$ sin $\overline{x} \not\leq \overline{y}$.

Cuando estemos utilizando las notaciones $\underline{x}$ y $\underline{y}$, si $\overline{x} \leq \overline{y}$, y $\overline{z} = \overline{x}^{-1}\overline{y}$, denotaremos $\underline{y}\,\underline{x}^{-1}$ al elemento $\underline{z}$.

DEFINICIÓN 2.2. Definiremos un soporte sobre X como un subconjunto $\zeta \subseteq \Sigma(X)$ tal que para todo $x_1 \cdots x_n \in \zeta$ con $n \geq 1$ se cumple que $x_1 \cdots x_{n-1} \in \zeta$.

Al conjunto de soportes sobre X lo denotaremos $\Xi(X)$.

NOTA 2.3. *Sea $\zeta \in \Xi(X)$, entonces para todo $\overline{y} \in \zeta$, si $\overline{x} \leq \overline{y}$, entonces $\overline{x} \in \zeta$. En particular, si $\zeta \neq \varnothing$ se cumple que $\varnothing \in \zeta$ siendo el recíproco también cierto.*

Lo que hacemos pues con los soportes es completar conjuntos con el orden que hemos definido, de tal modo que si un elemento pertenece al conjunto, todos los que son menores que él también pertenecen al conjunto.

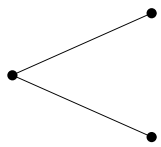
Se podría dar una definición alternativa de soporte sobre X como sigue: Un subconjunto $\zeta \subseteq \Sigma(X)$ es un soporte sobre X si y solo si para todo $\overline{x} \in \zeta$ y todo $\overline{y} \leq \overline{x}$, se cumple que $\overline{y} \in \zeta$.

Vamos a establecer una representación gráfica de los soportes que nos será de utilidad para explicar la idea de algunas demostraciones.

Sea ζ un soporte, vamos a representar cada uno de los elementos del conjunto ζ (a los que llamaremos nodos) como un punto. Si $\zeta \neq \varnothing$, tal y como hemos visto antes se cumple que $\varnothing \in \zeta$. Este nodo lo llamaremos origen y lo pondremos a la izquierda de nuestra representación. A la derecha de este punto y unido mediante segmentos con él, dibujaremos los puntos correspondientes a los nodos de $\zeta \cap X$. A la derecha de éstos los de $\zeta \cap X^2$ uniendo mediante segmentos los nodos de la forma x_1x_2 con x_1 que necesariamente es un nodo por definición de soporte. Así sucesivamente representaremos los nodos de $\zeta \cap X^{n+1}$ a la derecha de los de $\zeta \cap X^n$ uniendo con segmentos los de la forma $x_1 \cdots x_n x_{n+1}$ con $x_1 \cdots x_n$.

Veamos un ejemplo de cómo se hace esta representación. Supongamos que $X = \{a, b\}$ es un conjunto con dos elementos, vamos a representar el siguiente soporte:

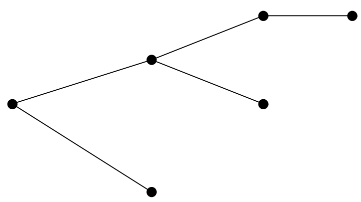
$$\zeta = \{\varnothing, a, b\}$$



Esta representación gráfica tiene tres puntos, que se corresponden con los tres elementos del conjunto ζ, y dos segmentos, los que se corresponden a las relaciones $\varnothing \leq a$ y $\varnothing \leq b$.

Siguiendo con el mismo conjunto X vamos a representar el soporte

$$\xi = \{\varnothing, a, b, aa, ab, aaa\}$$



Del nodo $\varnothing$ salen dos nodos, al igual que del nodo a, sin embargo del nodo aa solo sale uno. Estas representaciones se complicarán cuando tratemos con conjuntos infinitos, pero ya iremos viendo esas cuestiones cuando nos aparezcan.

Vamos a ver ahora algunos ejemplos sencillos de soportes.

Ejemplo 2.4. Sea X un conjunto. El conjunto vacío, $\varnothing$, y el total $\Sigma(X)$ son soportes sobre X.

Ejemplo 2.5. Sea $\overline{x} \in \Sigma(X)$, entonces definiremos

$$(\!(\overline{x})\!) = \{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{y} \leq \overline{x}\}.$$

Concretamente éste es el menor soporte que contiene a $\overline{x}$.

Ejemplo 2.6. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, entonces definimos $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$ el soporte que viene determinado por el conjunto

$$\{\varnothing, x_1, x_1x_2, \cdots, x_1 \cdots x_n, \cdots\}$$

Este soporte lo representaremos gráficamente de la siguiente forma

Los soportes de tipo $(\!(\overline{x})\!)$ y $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$ tienen la propiedad adicional de ser conjuntos completamente ordenados, es decir, si tomamos dos elementos $\overline{y}$, $\overline{z}$ en estos conjuntos, entonces se ha de cumplir que $\overline{y} \leq \overline{z}$ o que $\overline{z} \leq \overline{y}$.

Ejemplo 2.7. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{k=0}^{n} X^k$ es un soporte.

En algunos aspectos las sucesiones del tipo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ se comportan de forma similar a los elementos de $\Sigma(X)$. Vamos a denotar

$$\Sigma_\infty(X) = \Sigma(X) \cup X^{\mathbb{N}}$$

y a extender la definición de orden a los elementos de $\Sigma_\infty(X)$ como sigue: Sean $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$, entonces

$$\overline{x} \leq \overline{y} \Leftrightarrow (\!(\overline{x})\!) \subseteq (\!(\overline{y})\!).$$

Con esta extensión, $\leq$ sigue siendo una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. También vamos a extender la definición de $(\!(-)\!)$ para subconjuntos de $\Sigma_\infty(X)$, dado $H \subseteq \Sigma_\infty(X)$, denotaremos

$$(\!(H)\!) = \cup_{\overline{x}\in H} (\!(\overline{x})\!).$$

Ejercicio 2.1. Demostrar que para todo $H \subseteq \Sigma_\infty(X)$, se cumple que $(\!(H)\!)$ es un soporte sobre X. Además $H \cap \Sigma(X) \subseteq (\!(H)\!)$.

Solución:
Sea $\overline{x} \in H$, entonces existe $\overline{y} \in H$ tal que $\overline{x} \in (\!(\overline{y})\!)$. Si $\overline{w} \leq \overline{x}$, entonces $\overline{w} \leq \overline{y}$ y por lo tanto $\overline{w} \in (\!(\overline{y})\!) \subseteq (\!(H)\!)$.
Dado $\overline{x} \in H \cap \Sigma(X)$, entonces $\overline{x} \in (\!(\overline{x})\!) \subseteq (\!(H)\!)$. □

2. Operaciones Básicas en $\Xi(X)$

Las dos primeras operaciones que se pueden definir son las de unión e intersección que se definen para soportes como la unión e intersección de los conjuntos subyacentes. Es fácil ver que ambas operaciones definidas sobre soportes nos dan soportes.

Ejercicio 2.2. Sea X un conjunto, $\{\zeta_i : i \in I\}$ una familia no vacía de soportes sobre X. Entonces $\cup_{i\in I}\zeta_i$ y $\cap_{i\in I}\zeta_i$ son soportes.

Solución:
Sea $\overline{x} \in \cup_{i\in I}\zeta_i$ y sea $\overline{y} \leq \overline{x}$. Entonces para algún $i_0 \in I$ se cumple que $\overline{x} \in \zeta_{i_0}$. Utilizando que ζ_{i_0} es un soporte deducimos que $\overline{y} \in \zeta_{i_0} \subseteq \cup_{i\in I}\zeta_i$.

Sea $\overline{x} \in \cap_{i\in I}\zeta_i$ y sea $\overline{y} \leq \overline{x}$. Entonces para todo $i \in I$ se cumple que $\overline{x} \in \zeta_i$ y como todos son soportes, $\forall i \in I$, $\overline{y} \in \zeta_i$ por lo tanto $\overline{y} \in \cap_{i\in I}\zeta_i$.

□

Definición 2.8. Sea X un conjunto, $\overline{x} \in \Sigma(X)$ y $\zeta \in \Xi(X)$. Si $\zeta = \varnothing$ definiremos $\nabla_{\overline{x}}\zeta = \varnothing$, si no es vacío, definiremos

$$\nabla_{\overline{x}}\zeta = \{\overline{xy} \in \Sigma(X) : \overline{y} \in \zeta\} \cup (\!(\overline{x})\!).$$

Definiremos también

$$\Delta_{\underline{x}}\zeta = \{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{xy} \in \zeta\}.$$

Nota 2.9. *Como se puede apreciar, si $\zeta \neq \varnothing$ entonces el elemento $\overline{x}$ está tanto en el conjunto $\{\overline{xy} : \overline{y} \in \zeta\}$ como en $(\!(\overline{x})\!)$, en realidad podríamos afinar un poco mas la definición de $\nabla_{\overline{x}}\zeta$ y decir que si $\zeta \neq \varnothing$, entonces*

$$\nabla_{\overline{x}}\zeta = \{\overline{xy} \in \Sigma(X) : \overline{y} \in \zeta\} \cup (\!(x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{x})-1})\!)$$

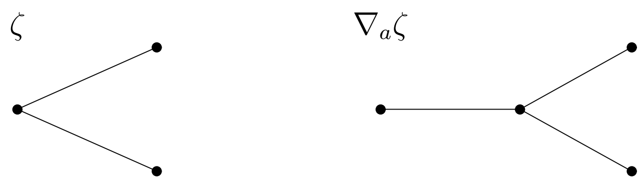
pero no utilizaremos la definición en esta forma para evitar tener que expandir el elemento $\overline{x}$. Solo lo haremos en algunos casos cuando $\lambda(\overline{x}) = 1$.

Vamos a tratar de ver gráficamente lo que representan estas operaciones.

Sea $X = \{a, b\}$ un conjunto con dos elementos y sea $\zeta = \{\varnothing, a, b\}$. Tomemos $x = a$, entonces

$$\nabla_a\zeta = \{\varnothing, a, aa, ab\}$$

Gráficamente tenemos

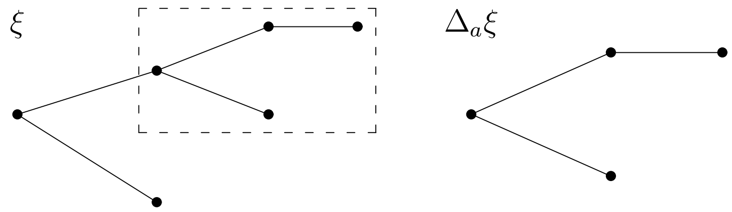


Dicho de otra forma, al aplicar ∇_a a ζ hemos trasladado el nodo origen a la derecha y hemos puesto un nuevo origen. El antiguo soporte aparece a partir del nodo a del nuevo soporte. No hemos perdido pues nada de información.

Tomemos de nuevo $X = \{a, b\}$, $\xi = \{\varnothing, a, b, aa, ab, aaa\}$ y $x = a$, entonces

$$\Delta_a \xi = \{\varnothing, a, b, aa\}$$

Gráficamente tenemos



La operación Δ_a traslada en nodo a al origen y se olvida de todo lo demás que salía del antiguo nodo origen.

Nota 2.10. *Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi(X)$ y $\overline{x} \in \Sigma(X)$. Entonces*

$$\Delta_{\underline{x}} \zeta \cap X = \{y \in X : \overline{x}y \in \zeta\}$$

Demostración:
Es una consecuencia inmediata de la definición. □

Vamos a ver es que las operaciones $\nabla_{\overline{x}}$ y $\Delta_{\underline{x}}$ aplicadas a soportes nos dan soportes.

Ejercicio 2.3. Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi(X)$, $\overline{x} \in \Sigma(X)$. Entonces $\nabla_{\overline{x}}\zeta$ y $\Delta_{\underline{x}}\zeta$ son soportes sobre X.

Solución:
Si $\zeta = \varnothing$ entonces $\nabla_{\overline{x}}\zeta = \varnothing$ que es un soporte. Supongamos que $\zeta \neq \varnothing$, $\overline{y} \in \nabla_{\overline{x}}\zeta$ y que $\overline{w} \leq \overline{y}$. Si $\overline{w} \leq \overline{x}$ entonces tenemos que $\overline{w} \in (\!(\overline{x})\!) \subseteq \nabla_{\overline{x}}\zeta$. Podemos pues suponer que $\overline{w} \not\leq \overline{x}$.

Como $\overline{w} \not\leq \overline{x}$, entonces $\overline{y} \not\leq x$ y por lo tanto $\overline{x} \leq \overline{y}$ y además $\overline{x}^{-1}\overline{y} \in \zeta$. Como $(\!(\overline{y})\!)$ está totalmente ordenado, $\overline{w} \leq \overline{y}$ y $\overline{w} \not\leq \overline{x}$ entonces $\overline{x} \leq \overline{w}$, además, como $\overline{w} \leq \overline{y}$, entonces $\overline{x}^{-1}\overline{w} \leq \overline{x}^{-1}\overline{y}$, por lo que $\overline{x}^{-1}\overline{w} \in \zeta$ y por lo tanto $\overline{w} = \overline{x}(\overline{x}^{-1}\overline{w}) \in \nabla_{\overline{x}}\zeta$.

Sea $\overline{y} \in \Delta_{\underline{x}}\zeta$ y sea $\overline{w} \leq \overline{y}$. Entonces $\overline{xy} \in \zeta$ y $\overline{xw} \leq \overline{xy}$, por lo que $\overline{xw} \in \zeta$ y por tanto $\overline{w} \in \Delta_{\underline{x}}\zeta$. □

Vamos a comprobar que $\nabla_{\overline{x}}$ y $\Delta_{\underline{x}}$ se comportan bien con las uniones e intersecciones.

Proposición 2.11. *Sea X un conjunto, $\{\zeta_i : i \in I\}$ una familia de soportes sobre X y $\overline{x} \in \Sigma(X)$. Entonces*

1a. $\nabla_{\overline{x}} \cup_{i\in I} \zeta_i = \cup_{i\in I} \nabla_{\overline{x}}\zeta_i$
1b. $\Delta_{\underline{x}} \cup_{i\in I} \zeta_i = \cup_{i\in I} \Delta_{\underline{x}}\zeta_i$
2a. $\nabla_{\overline{x}} \cap_{i\in I} \zeta_i = \cap_{i\in I} \nabla_{\overline{x}}\zeta_i$
2b. $\Delta_{\underline{x}} \cap_{i\in I} \zeta_i = \cap_{i\in I} \Delta_{\underline{x}}\zeta_i$

Demostración:

1a. Si $\cup_{i\in I}\zeta_i = \varnothing$ entonces $\zeta_i = \varnothing$ para todo $i \in I$ y $\nabla_{\overline{x}}\zeta_i = \varnothing$ para todo $i \in I$ por lo tanto $\nabla_{\overline{x}} \cup_{i\in I} \zeta_i = \cup_{i\in I}\nabla_{\overline{x}}\zeta_i$ porque ambos miembros son $\varnothing$.

Si $\cup_{i\in I}\zeta_i \neq \varnothing$ denotemos por $I_0 = \{i \in I : \zeta_i = \varnothing\}$ y $J_0 = I \setminus I_0$. Si $\zeta_i = \varnothing$ entonces se cumple que $\{\overline{xy} \in \Sigma(X) : \overline{y} \in \zeta_i\} = \varnothing = \nabla_{\overline{x}}\zeta_i$. Utilizando esto y aplicando las definiciones deducimos que

$$\nabla_{\overline{x}} \cup_{i\in I} \zeta_i = (\!(\overline{x})\!) \cup \{\overline{xy} \in \Sigma(X) : \overline{y} \in \cup_{i\in I}\zeta_i\} =$$

$$(\!(\overline{x})\!) \cup (\cup_{i\in I}\{\overline{xy} : \overline{y} \in \zeta_i\}) =$$

$$(\!(\overline{x})\!) \cup (\cup_{i\in I_0}\{\overline{xy} : \overline{y} \in \zeta_i\}) \cup$$

$$(\cup_{j\in J_0}\{\overline{xy} : \overline{y} \in \zeta_j\}) =$$

$$(\cup_{i\in I_0}\nabla_{\overline{x}}\zeta_i) \cup (\!(\overline{x})\!) \cup (\cup_{j\in J_0}\{\overline{xy} : \overline{y} \in \zeta_j\}) =$$

$$(\cup_{i\in I_0}\nabla_{\overline{x}}\zeta_i) \cup (\cup_{j\in J_0}\nabla_{\overline{x}}\zeta_j) = \cup_{i\in I}\nabla_{\overline{x}}\zeta_i$$

1b.

$$\Delta_{\underline{x}} \cup_{i\in I} \zeta_i = \{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{xy} \in \cup_{i\in I}\zeta_i\} =$$

$$\cup_{i\in I}\{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{xy} \in \zeta_i\} = \cup_{i\in I}\Delta_{\underline{x}}\zeta_i.$$

2a. Tal y como vimos en la Nota 2.3 un soporte ζ es vacío si y solo si $\varnothing \notin \zeta$. Aplicando esto a la intersección deducimos que

$$\cap_{i\in I}\zeta_i = \varnothing \Rightarrow \varnothing \notin \cap_{i\in I}\zeta_i \Rightarrow$$

$$\exists i_0 \in I \quad \varnothing \notin \zeta_{i_0} \Rightarrow \exists i_0 \in I \quad \zeta_{i_0} = \varnothing \Rightarrow$$

$$\exists i_0 \in I \quad \nabla_{\overline{x}}\zeta_{i_0} = \varnothing \Rightarrow \cap_{i\in I}\nabla_{\overline{x}}\zeta_i = \varnothing$$

Si $\cap_{i\in I}\zeta_i \neq \varnothing$ entonces para todo $i \in I$, $\zeta_i \neq \varnothing$ por lo que

$$\nabla_{\overline{x}} \cap_{i\in I} \zeta_i = \{\overline{xy} : \overline{y} \in \cap_{i\in I}\zeta_i\} \cup (\!(\overline{x})\!) =$$

$$= \cap_{i\in I}\{\overline{xy} : \overline{y} \in \zeta_i\} \cup (\!(\overline{x})\!) = \cap_{i\in I}\nabla_{\overline{x}}\zeta_i.$$

2b.

$$\Delta_{\underline{x}} \cap_{i\in I} \zeta_i = \{\overline{y} : \overline{xy} \in \cap_{i\in I}\zeta_i\} =$$

$$\cap_{i\in I}\{\overline{y} : \overline{xy} \in \zeta_i\} = \cap_{i\in I}\Delta_{\underline{x}}\zeta_i.$$

□

De aquí se deduce que $\Delta_{\underline{x}}$ y $\nabla_{\overline{x}}$ conservan el orden ya que $\zeta \subseteq \xi$ si y solo si $\zeta \cup \xi = \xi$.

Ejercicio 2.4. Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi(X)$ y $\overline{x} \in \Sigma(X)$, entonces $\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\zeta = \zeta$.

Solución:

Si $\zeta = \varnothing$ entonces $\nabla_{\overline{x}}\varnothing = \varnothing$ y $\Delta_{\underline{x}}\varnothing = \varnothing$, por lo tanto $\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\varnothing = \varnothing$. Si $\zeta \neq \varnothing$ tenemos

$$\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\zeta = \Delta_{\underline{x}}(\{\overline{xy} : \overline{y} \in \zeta\} \cup (\!(\overline{x})\!)\ ) =$$
$$\{\overline{w} : \overline{xw} \in \{\overline{xy} : \overline{y} \in \zeta\} \cup (\!(\overline{x})\!)\} = \zeta$$

□

Proposición 2.12. *Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi(X)$ y sean $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$ Entonces*
1. $\nabla_{\overline{x}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{xy}}\zeta$.
2. $\Delta_{\underline{x}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \Delta_{\underline{xy}}\zeta$.

Demostración:

1. Si $\zeta = \varnothing$ la igualdad está clara ya que ambos miembros son el conjunto vacío. Supongamos que $\zeta \neq \varnothing$, entonces
$$\nabla_{\overline{x}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{x}}(\ (\!(\overline{y})\!) \cup \{\overline{yw} : \overline{w} \in \zeta\}) =$$
$$(\!(\overline{x})\!) \cup \{\overline{xz} : \overline{z} \in (\!(\overline{y})\!)\} \cup \{\overline{xz} : \overline{z} \in \{\overline{yw} : \overline{w} \in \zeta\}\} =$$
$$(\!(\overline{xy})\!) \cup \{\overline{xyw} : \overline{w} \in \zeta\} = \nabla_{\overline{xy}}\zeta.$$
2.
$$\Delta_{\underline{x}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \Delta_{\underline{x}}\{\overline{w} : \overline{yw} \in \zeta\} =$$
$$\{\overline{z} : \overline{xz} \in \{\overline{w} : \overline{yw} \in \zeta\}\} = \Delta_{\underline{xy}}\zeta.$$

□

Proposición 2.13. *Sea X un conjunto $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$ y $\zeta \in \Xi(X)$. Entonces*

$$\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \begin{cases} \nabla_{\overline{x}^{-1}\overline{y}}\zeta & si\ \overline{x} \leq \overline{y} \\ \Delta_{\underline{x}\,\underline{y}^{-1}}\zeta & si\ \overline{y} \leq \overline{x} \\ \varnothing & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demostración:
Empecemos suponiendo que $\overline{x} \leq \overline{y}$. Podemos definir $\overline{z} = \overline{x}^{-1}\overline{y}$ con lo que $\overline{y} = \overline{xz}$, entonces

$$\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{xz}}\zeta = \Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\nabla_{\overline{z}}\zeta = \nabla_{\overline{z}}\zeta.$$

Supongamos ahora que $\overline{y} \leq \overline{x}$ y tomemos $\overline{z} = \overline{y}^{-1}\overline{x}$. Con la notación para en el otro sentido tenemos que $\underline{z} = \underline{x}\,\underline{y}^{-1}$, entonces $\underline{x} = \underline{zy}$, por lo tanto

$$\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \Delta_{\underline{zy}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \Delta_{\underline{z}}\Delta_{\underline{y}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \Delta_{\underline{z}}\zeta.$$

Supongamos por último que no se cumplen ninguna de las dos desigualdades anteriores. Si $\zeta = \varnothing$ la igualdad del enunciado es trivial. Podemos pues suponer también que $\zeta \neq \varnothing$. Entonces

$$\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \Delta_{\underline{x}}(\{\overline{yz} : \overline{z} \in \zeta\} \cup (\!(\overline{y})\!)\ ) =$$

$$\{\overline{w} : \overline{xw} \in \{\overline{yz} : \overline{z} \in \zeta\} \cup (\!(\overline{y})\!)\}$$

Si $\overline{xw} \in (\!(\overline{y})\!)$ entonces $\overline{x} \leq \overline{y}$ lo cual es imposible. Si $\overline{xw} = \overline{yz}$ para ciertos $\overline{w}$ y $\overline{z}$, entonces $\overline{x}, \overline{y} \in (\!(\overline{xw})\!) = (\!(\overline{yz})\!)$, pero este conjunto está completamente ordenado y por lo tanto tendríamos que tener una relación $\overline{x} \leq \overline{y}$ o $\overline{y} \leq \overline{x}$. Esto hace que sea imposible encontrar elementos $\overline{w}, \overline{z}$ tales que $\overline{xw} = \overline{yz}$ y por lo tanto, el conjunto

$$\{\overline{w} : \overline{xw} \in \{\overline{yz} : \overline{z} \in \zeta\} \cup (\!(\overline{y})\!)\}$$

es necesariamente el conjunto vacío. □

EJERCICIO 2.5. Sea X un conjunto, $x \in X$. Calcular

1. $\nabla_x\varnothing$
2. $\Delta_x\varnothing$
3. $\nabla_x\{\varnothing\}$
4. $\Delta_x\{\varnothing\}$
5. $\nabla_x\Delta_x\{\varnothing\}$
6. $\Delta_x(\!(x)\!)$
7. $\nabla_x\Delta_x(\!(x)\!)$

Solución:

1. $\nabla_x\varnothing = \varnothing$ por definición.
2. $\Delta_x\varnothing = \{\overline{y} : x\overline{y} \in \varnothing\} = \varnothing$.
3. $\nabla_x\{\varnothing\} = \{x\overline{y} : \overline{y} \in \{\varnothing\}\} \cup (\!(x)\!) = (\!(x)\!)$.
4. $\Delta_x\{\varnothing\} = \{\overline{y} : x\overline{y} \in \{\varnothing\}\} = \varnothing$.
5. $\nabla_x\Delta_x\{\varnothing\} = \nabla_x\varnothing = \varnothing$.
6. $\Delta_x(\!(x)\!) = \Delta_x\nabla_x\{\varnothing\} = \{\varnothing\}$.
7. $\nabla_x\Delta_x(\!(x)\!) = \nabla_x\Delta_x\nabla_x\{\varnothing\} = \nabla_x\{\varnothing\} = (\!(x)\!)$.

□

DEFINICIÓN 2.14. Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi(X)$ y $\overline{x} \in \zeta$. Denotaremos $(\underline{x})\zeta = \nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\zeta$.

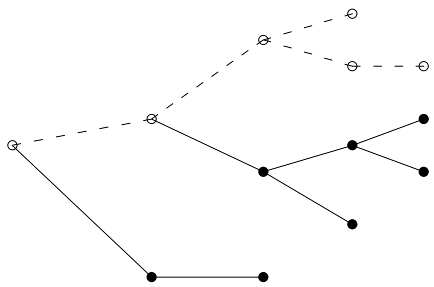
Gráficamente podría representarse del siguiente modo. Si $X = \{a, b\}$ y

$$\zeta = \{\varnothing, a, b, aa, aab, aaa, aaba, abaa, abab, abb, ba\}$$

entonces

$$(aa)\zeta = \{\varnothing, a, aa, aab, aaa, aaba\}.$$

Representando el valor a por encima del b tenemos ζ el conjunto completo y $(aa)\zeta$ es el que está representado de forma punteada.



PROPOSICIÓN 2.15. *Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi(X)$ y $\overline{x} \in \Sigma(X)$, entonces*

$$(\underline{x})\zeta = \begin{cases} \{\overline{y} \in \zeta : \overline{x} \leq \overline{y}\} \cup (\!(\overline{x})\!) & \text{si } \overline{x} \in \zeta \\ \varnothing & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En particular $(\underline{x})\zeta \subseteq \zeta$ en cualquier caso.

Demostración:
Empecemos suponiendo que $\overline{x} \notin \zeta$, entonces

$$\Delta_{\underline{x}}\zeta = \{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{xy} \in \zeta\}$$

pero si $\overline{x} \notin \zeta$ no se puede dar que $\overline{xy} \in \zeta$ por definición de soporte, por lo tanto $\Delta_{\underline{x}}\zeta = \varnothing$ y $\nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\zeta = \varnothing$.

Supongamos ahora que $\overline{x} \in \zeta$, entonces

$$\Delta_{\underline{x}}\zeta = \{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{xy} \in \zeta\}$$

tiene como mínimo el elemento $\varnothing$ por lo que no es vacío y por lo tanto

$$\nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\zeta = \nabla_{\overline{x}}\{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{xy} \in \zeta\} =$$

$$\{\overline{xz} \in \Sigma(X) : \overline{z} \in \{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{xy} \in \zeta\}\} \cup (\!(\overline{x})\!) =$$

$$\{\overline{xz} \in \Sigma(X) : \overline{xz} \in \zeta\} \cup (\!(x)\!) = \{\overline{y} \in \zeta : \overline{x} \leq \overline{y}\} \cup (\!(x)\!).$$

□

PROPOSICIÓN 2.16. *Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi(X)$, $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$, entonces $(\underline{xy})\zeta \subseteq (\underline{y})\zeta$.*

Demostración:
Por la Proposición 2.15 sabemos que $(\underline{x})\Delta_{\underline{y}}\zeta \subseteq \Delta_{\underline{y}}\zeta$ y como $\nabla_{\overline{x}}$ conserva el orden, tenemos que

$$(\underline{xy})\zeta = \nabla_{\overline{yx}}\Delta_{\underline{xy}}\zeta = \nabla_{\overline{y}}(\underline{x})\Delta_{\underline{y}}\zeta \subseteq \nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = (\underline{y})\zeta.$$

□

PROPOSICIÓN 2.17. *Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi(X)$, $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$, entonces*

$$(\underline{x})(\underline{y})\zeta = \begin{cases} (\underline{y})\zeta & si\ \overline{x} \leq \overline{y} \\ (\underline{x})\zeta & si\ \overline{y} \leq \overline{x} \\ \varnothing & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demostración:
Vamos a utilizar varias veces en esta demostración la Proposición 2.13.

Supongamos primero que $\overline{xz} = \overline{y}$, entonces

$$(\underline{x})(\underline{y})\zeta = \nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{x}}\nabla_{\overline{z}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{xz}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = (\underline{y})\zeta.$$

Supongamos ahora que $\overline{yz} = \overline{x}$, entonces

$$(\underline{x})(\underline{y})\zeta = \nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{z}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{zy}}\zeta = \nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\zeta = (\underline{x})\zeta.$$

Si no se cumple ninguna de las relaciones $\overline{x} \leq \overline{y}$ ni $\overline{y} \leq \overline{x}$ entonces

$$(\underline{x})(\underline{y})\zeta = \nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{x}}\varnothing = \varnothing.$$

□

EJERCICIO 2.6. Sea X un conjunto, $x \in X$. Calcular los soportes $\zeta \in \Xi(X)$ tales que $\zeta = \cup_{x\in\zeta\cap X}(x)\zeta$.

Solución:
Si $\zeta = \varnothing$ o si $\zeta = \{\varnothing\} = X^0$ se cumple que $\zeta \cap X$ no tiene ningún elemento [1] y por tanto $\cup_{x\in\zeta\cap X}\nabla_x\Delta_x\zeta = \varnothing$.

Si $\zeta \neq \varnothing, \{\varnothing\}$ entonces se cumple que $X \cap \zeta \neq \varnothing$ y por lo tanto $\varnothing \in \cup_{x\in\zeta\cap X}(x)\zeta$. Además para todo $x_1 \cdots x_n \in \zeta$ se tiene que $x_1 \cdots x_n \in (x_1)\zeta \subseteq \cup_{x\in\zeta\cap X}(x)\zeta$ por lo tanto $\zeta = \cup_{x\in\zeta\cap X}(x)\zeta$.

El resultado pues del ejercicio es que todos los soportes cumplen esta condición excepto $\{\varnothing\}$. □

3. Soportes Unitarios y de Torsión

DEFINICIÓN 2.18. Sea X un conjunto. Un soporte sobre X diremos que es finito si lo es como conjunto.

DEFINICIÓN 2.19. Sea X un conjunto y sea $\zeta \in \Xi(X)$. Denotaremos

$$\mathrm{Seq}(\zeta) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : x_1 \cdots x_n \in \zeta \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Diremos que un soporte ζ es de torsión si $\mathrm{Seq}(\zeta) = \varnothing$. Al conjunto de soportes de torsión lo denotaremos $\Xi_{\mathbf{T}}(X)$.

EJEMPLO 2.20. Todo soporte finito es un soporte de torsión.

[1] Recordemos que estamos denotando con $\varnothing$ la única 0-tupla, y que este elemento es diferente de todas las 1-tuplas que son los elementos de X.

EJEMPLO 2.21. Sea X un conjunto, $k \in \mathbb{N}$, entonces el soporte

$$\cup_{n=0}^{k} X^n$$

es un soporte de torsión.

DEFINICIÓN 2.22. Sea X un conjunto y $\zeta \in \Xi(X)$. Diremos que ζ es preunitario si para todo $\overline{x} \in \Sigma(X)$, el conjunto $\Delta_{\underline{x}}\zeta \cap X$ es finito.

Diremos que ζ es unitario si para todo $\overline{x} \in \zeta$ el conjunto $\Delta_{\underline{x}}\zeta \cap X$ es finito y no vacío. Al conjunto de soportes unitarios sobre X, lo denotaremos $\Xi_{\mathbf{U}}(X)$.

EJEMPLO 2.23. Sea X un conjunto y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X. Entonces $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$ es un soporte unitario sobre X.

Demostración:
Los elementos de $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$ son precisamente

$$\{\varnothing, x_1, x_1x_2, \cdots, x_1\cdots x_t, \cdots\}$$

entonces aplicando la definición de $\Delta_{x_t\cdots x_1}$ se tiene que

$$\Delta_{x_t\cdots x_1}(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!) = \{\varnothing, x_{t+1}, x_{t+1}x_{t+2}, \cdots\} = (\!(x_{t+n} : n \in \mathbb{N})\!)$$

y por lo tanto

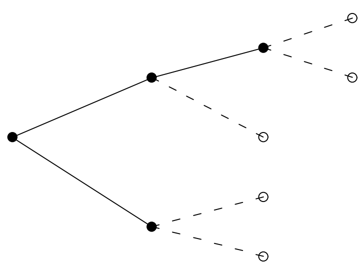
$$X \cap \Delta_{x_t\cdots x_1}(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!) = \{x_{t+1}\}$$

que es finito y no vacío para todo $t \in \mathbb{N}$. $\square$

DEFINICIÓN 2.24. Sea X un conjunto y $\zeta \in \Xi(X)$. Llamaremos frontera exterior de ζ o simplemente frontera de ζ al conjunto

$$\partial\zeta = \begin{cases} \{\varnothing\} & \text{si } \zeta = \varnothing \\ \{\overline{x} \in \Sigma(X) \setminus \zeta : \forall \overline{y} < \overline{x}, \overline{y} \in \zeta\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $X = \{a, b\}$ y $\zeta = \{\varnothing, a, b, aa\}$ vamos a ver gráficamente cómo sería la frontera de ζ.



EJERCICIO 2.7. Sea X un conjunto y sea $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$, entonces $\xi \cup \partial\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$.

Solución:
Si $\xi = \varnothing$, el resultado es cierto de forma trivial.

Lo primero que tenemos que ver es que $\xi \cup \partial\xi$ es un soporte. Para ello sea $\overline{x} \in \xi \cup \partial\xi$ y sea $\overline{y} < \overline{x}$. Si $\overline{x} \in \xi$ entonces por ser ξ un soporte, $\overline{y} \in \xi \subseteq \xi \cup \partial\xi$. Si $\overline{x} \in \partial\xi$ entonces $\overline{y} \in \xi \subseteq \xi \cup \partial\xi$.

Una vez visto que $\xi \cup \partial\xi$ es un soporte, tenemos que probar que $\mathrm{Seq}(\xi \cup \partial\xi) = \varnothing$. Vamos a verlo por reducción al absurdo suponiendo que existe un $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\xi \cup \partial\xi)$. Como ξ es un soporte de torsión, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathrm{Seq}(\xi)$ por lo tanto existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 \cdots x_{n_0} \notin \xi$. Sea k el primer elemento para el cual $x_1 \cdots x_k \in \xi$ y $x_1 \cdots x_{k+1} \notin \xi$ (notemos que si $k = 0$, $\varnothing \in \xi$ ya que $\xi \neq \varnothing$, por lo tanto el k que buscamos ha de existir). Por la definición de frontera, $x_1 \cdots x_{k+1} \in \partial\xi$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\xi \cup \partial\xi)$, entonces $x_1 \cdots x_{k+2} \in \xi \cup \partial\xi$.

Si $x_1 \cdots x_{k+2} \in \xi$ entonces $x_1 \cdots x_{k+1} \in \xi$ por ser ξ un soporte, lo cual es una contradicción.

Si $x_1 \cdots x_{k+2} \in \partial\xi$, entonces $x_1 \cdots x_{k+1} \in \xi$ por definición de frontera, pero esto tampoco es posible. $\square$

Ejercicio 2.8. Sea X un conjunto, $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $x \in X$, entonces

$$\Delta_x\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X) \quad \nabla_x\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X).$$

Del mismo modo, para todo $\overline{y} \in \Sigma(X)$,

$$\Delta_{\underline{y}}\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X) \quad \nabla_{\overline{y}}\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X).$$

Solución:
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\Delta_x\xi)$, entonces $x_1 \cdots x_n \in \Delta_x\xi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que $xx_1 \cdots x_n \in \Delta_x\xi$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por definición de Δ_x y eso hace que la sucesión infinita $(x, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ esté en $\mathrm{Seq}(\xi)$ lo cual es una contradicción.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\nabla_x\xi)$, entonces $x_1 \cdots x_n \in \nabla_x\xi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definición de ∇_x esto hace que $x_1 = x$ y que $x_2 \cdots x_n \in \xi$ para todo $n \geq 2$ por lo tanto la sucesión infinita $(x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ está en $\mathrm{Seq}(\xi)$ lo cual es una contradicción.

El otro resultado se sigue inmediatamente por inducción en $\lambda(\overline{y})$. $\square$

Ejercicio 2.9. Sea X un conjunto, $x \in X$, $\zeta \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, entonces

$$\Delta_x\zeta \in \Xi_{\mathbf{U}}(X) \quad \nabla_x\zeta \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$$

Del mismo modo, para todo $\overline{y} \in \Sigma(X)$,

$$\Delta_{\underline{y}}\zeta \in \Xi_{\mathbf{U}}(X) \quad \nabla_{\overline{y}}\zeta \in \Xi_{\mathbf{U}}(X).$$

Solución:
Si $\zeta = \varnothing$ entonces tanto $\Delta_x\zeta$ como $\nabla_x\zeta$ son el conjunto vacío que es un soporte unitario. Podemos suponer pues que ζ es no vacío.

Sea $\overline{y} \in \Delta_x\zeta$. Por definición de Δ_x, se ha de cumplir que $x\overline{y} \in \zeta$ y por ser ζ unitario se cumple que $X \cap \Delta_{\underline{yx}}\zeta$ es un conjunto finito y no vacío, pero precisamente

$$X \cap \Delta_{\underline{yx}}\zeta = X \cap \Delta_{\underline{y}}\Delta_x\zeta$$

lo cual prueba que $X \cap \Delta_x\zeta$ es finito y no vacío.

Si $x \notin \zeta$, entonces $\nabla_x\zeta = \varnothing$ que es un soporte unitario, por lo que podemos suponer que $x \in \zeta$.

Sea $\overline{y} \in \nabla_x\zeta$, entonces pueden pasar dos cosas. La primera es que $\overline{y} = \varnothing$, en cuyo caso tendíamos que

$$X \cap \Delta_{\underline{y}}\nabla_x\zeta = X \cap \nabla_x\zeta = \{x\}$$

que es finito y no vacío. La segunda posibilidad es que $\lambda(\overline{y}) \geq 1$, en cuyo caso, por definición de ∇_x, tendríamos que $\overline{y} = x\overline{z}$ para un cierto $\overline{z} \in \zeta$. Entonces

$$X \cap \Delta_{\underline{y}}\nabla_x\zeta = X \cap \Delta_{\underline{z}}\Delta_x\nabla_x\zeta = X \cap \Delta_{\underline{z}}\zeta$$

que es finito y no vacío porque $\zeta \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y $\overline{z} \in \zeta$.

El otro resultado se sigue inmediatamente por inducción en $\lambda(\overline{y})$. □

4. El Teorema del Grafo de König

TEOREMA 2.25. [TEOREMA DEL GRAFO DE KÖNIG]. *Sea X un conjunto, ζ un soporte preunitario sobre X y $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ entonces $\zeta \cap \xi$ es finito.*

Demostración:
Vamos a empezar probando que los conjuntos $\zeta \cap \xi \cap X^n$ son finitos para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Para $n = 0$, $\zeta \cap \xi \cap X^0$ es finito porque X es finito y para $n = 1$, $\zeta \cap \xi \cap X^1 \subseteq \zeta \cap X = \Delta_{\varnothing}\zeta \cap X$ que es finito por ser ζ un soporte preunitario.

Supongamos que lo tenemos probado para n. Vamos a probarlo para $n + 1$.

$$\zeta \cap \xi \cap X^{n+1} =$$
$$\{x_1 \cdots x_{n+1} \in X^{n+1} : x_1 \cdots x_n \in \zeta\cap\xi\cap X^n \text{ y } x_{n+1} \in X\cap\Delta_{x_1\cdots x_n}(\zeta\cap\xi)\} \subseteq$$
$$\cup_{x_1\cdots x_n \in \zeta\cap\xi\cap X^n} X \cap \Delta_{x_1\cdots x_n}\zeta$$

siendo este último conjunto finito porque es una unión finita (por hipótesis de inducción) de conjuntos finitos (por ser ζ preunitario).

Sea $n \geq t$, vamos a definir la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f_{nt}: & X^n \cap \zeta \cap \xi & \rightarrow & X^t \cap \zeta \cap \xi \\ & x_1 \cdots x_n & \mapsto & x_1 \cdots x_t \end{array}$$

Esta aplicación está bien definida por ser ζ y ξ soportes.

Vamos a considerar los conjuntos $\mathrm{Im}(f_{nt})$. Estos conjuntos cumplen la siguiente relación de inclusión entre ellos

$$X^t \cap \zeta \cap \xi = \mathrm{Im}(f_{tt}) \supseteq \mathrm{Im}(f_{t+1,t}) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}(f_{t+k,t}) \supseteq \cdots$$

esta cadena de inclusiones ha de estabilizarse puesto que $X^t \cap \zeta \cap \xi$ es un conjunto finito.

Podemos pues encontrar para cada $t \in \mathbb{N}$ un $n_t \geq t$ tal que para todo $k \geq n_t$ se cumpla $\mathrm{Im}(f_{n_t t}) = \mathrm{Im}(f_{kt})$

Vamos a ver como se comporta la aplicación $f_{t+1,t}$ sobre el conjunto $\mathrm{Im}(f_{n_{t+1},t+1})$. Sea $k = \max(n_t, n_{t+1})$,

$$\mathrm{Im}(f_{n_t t}) = \mathrm{Im}(f_{kt}) = f_{kt}(X^k \cap \zeta \cap \xi) =$$

$$f_{t+1,t}(f_{k,t+1}(X^m \cap \zeta \cap \xi) = f_{t+1,t}(\mathrm{Im}(f_{k,t+1})) = f_{t+1,t}(\mathrm{Im}(f_{n_{t+1},t+1}))$$

Tenemos pues una cadena de aplicaciones suprayectivas

$$\cdots \to \mathrm{Im}(f_{n_3,3}) \to \mathrm{Im}(f_{n_2,2}) \to \mathrm{Im}(f_{n_1,1}) \to \mathrm{Im}(f_{n_0,0})$$

Supongamos que $\mathrm{Im}(f_{n_0,0})$ no es vacío, entonces existirá $x_1 \in \mathrm{Im}(f_{n_1,1})$ y un x_2 tal que $(x_1 x_2) \in \mathrm{Im}(f_{n_2,2})$ ya que f_{21} es suprayectiva sobre el conjunto $\mathrm{Im}(f_{n_2,2})$. De este modo podemos encontrar una sucesión infinita $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que para todo $t \in \mathbb{N}$ se tenga que

$$(x_1 \cdots x_t) \in \mathrm{Im}(f_{n_t,t}) \subseteq X^t \cap \zeta \cap \xi \subseteq \xi$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que $\mathrm{Seq}(\xi) = \varnothing$.

Por lo tanto $\mathrm{Im}(f_{n_0,0}) = \varnothing$ y entonces $X^{n_0} \cap \xi \cap \zeta = \varnothing$ y a partir de él todos los conjuntos $X^k \cap \xi \cap \zeta$ son también vacíos. De ahí deducimos que $\zeta \cap \xi$ es finito ya que está contenido en $\cup_{t=0}^{n_0} X^k \cap \xi \cap \zeta$ que es una unión finita de conjuntos finitos. □

Ejercicio 2.10. Sea X un conjunto y sea ζ un soporte preunitario, entonces existe un $\xi \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ tal que $\zeta \subseteq \xi$.

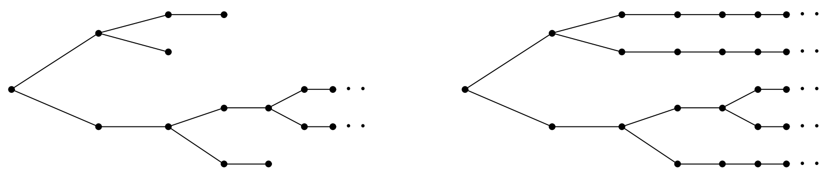
Solución:
Pueden existir muchas formas de extender ζ, vamos a definir una de las posibles:

$$(x_1 \cdots x_n) \in \xi :\Leftrightarrow \text{ se cumple alguna de las siguientes condiciones}$$

1. $x_1 \cdots x_n \in \zeta$.
2. Existe un $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ tal que $x_1 \cdots x_k \in \zeta$, $x_1 \cdots x_k x \notin \zeta$ para todo $x \in X$ y $x_k = x_{k+1} = \cdots = x_n$.

Lo que hemos hecho con esta construcción es poner una cadena infinita en cada uno de los nodos de los cuales no salía ningún otro, gráficamente sería algo del siguiente tipo:

Supongamos que ζ es el soporte que representamos a la izquierda. El problema por el cual este soporte no es unitario es por los nodos de los cuales no sale ningún otro. El proceso que se hace es pegar en cada uno de estos nodos una cadena infinita. El resultado lo representamos a la derecha.



$\square$

EJERCICIO 2.11. Sea $\xi \in \Xi(X)$, ξ es un soporte finito si y solo si existen $\zeta \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $\bar{\zeta} \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ con $\xi = \zeta \cap \bar{\zeta}$.

Solución:
Supongamos que $\zeta \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $\bar{\zeta} \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Entonces utilizando el teorema del grafo de König, deducimos que $\zeta \cap \bar{\zeta}$ es un soporte finito.

En la otra dirección, tomemos ξ un soporte finito. Utilizando el ejercicio anterior, podemos encontrar $\bar{\zeta} \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ tal que $\xi \subseteq \bar{\zeta}$. Como todo soporte finito es de torsión, podemos tomar $\zeta = \xi$, pero entonces queda claro que $\xi = \zeta \cap \bar{\zeta}$. $\square$

EJERCICIO 2.12. Sea $\zeta \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$

1. Para todo $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$, el conjunto $\partial\xi \cap \zeta$ es finito.
2. Dar un ejemplo de algún soporte $\bar{\xi} \in \Xi(X)$ tal que $\partial\bar{\xi} \cap \zeta$ sea un conjunto infinito para algún ζ unitario.

Solución:

1. Consideremos el soporte de torsión $\xi \cup \partial\xi$, como $\zeta \cap \partial\xi \subseteq \zeta \cap (\xi \cup \partial\xi)$ y este último es finito por el teorema del grafo de König, entonces $\zeta \cap \partial\xi$ es finito.
2. Consideremos $X = \{a, b\}$ un conjunto de dos elementos, tomemos como

$$\zeta = \cup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X^n$$

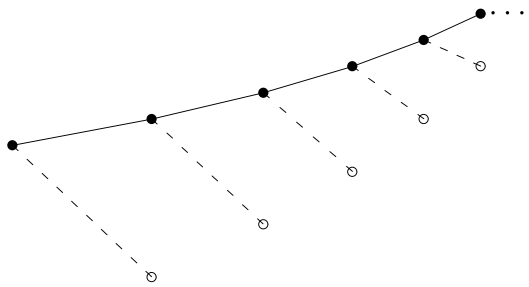
$$\bar{\xi} = \{\varnothing, a, aa, aaa \cdots\}$$

Entonces

$$\zeta \cap \partial\bar{\xi} = \{\underbrace{aa \cdots a}_{n} b : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

que es un conjunto infinito.

Gráficamente sería un conjunto del siguiente tipo



□

5. Uniones de Soportes Unitarios

En esta sección vamos a estudiar el problema de cuando la unión de una familia de soportes unitarios es a su vez un soporte unitario. Es muy sencillo ver un caso en el que se comporta muy bien.

PROPOSICIÓN 2.26. *Sea X un conjunto, $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, entonces $\cup_{k=1}^{n}\sigma_k$ es un soporte unitario sobre X.*

Demostración:
Sea $\overline{x} \in \cup_{k=1}^{n}\sigma_k$, entonces existe $k_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $\overline{x} \in \sigma_{k_0}$.

$$X \cap \Delta_{\overline{x}} \cup_{k=1}^{n} \sigma_k = X \cap (\cup_{k=1}^{n}\Delta_{\overline{x}}\sigma_k) =$$
$$\cup_{k=1}^{n} X \cap \Delta_{\overline{x}}\sigma_k$$

Para cada $k \in \{1, \cdots, t\}$ el conjunto $X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma_k$ es un conjunto finito por ser todos los σ_k unitarios y para k_0, $X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma_{k_0}$ es no vacío por ser σ_{k_0} unitario, esto prueba que el conjunto

$$X \cap \Delta_{\underline{x}} \cup_{k=1}^{n} \sigma_k$$

es finito y no vacío. □

EJERCICIO 2.13. Encontrar un conjunto X y una cantidad infinita de soportes unitarios tales que su unión no sea un soporte unitario.

Solución:
Sea X un conjunto infinito, y para cada $x \in X$, sea

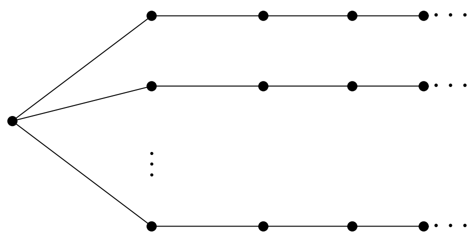
$$\sigma_x = \{\varnothing, x, xx, \cdots\} = (\!(x : n \in \mathbb{N})\!)$$

Entonces $\cup_{x \in X}\sigma_x$ no es un soporte unitario porque $\varnothing \in \cup_{x \in X}\sigma_x$ y

$$X \cap \Delta_{\varnothing} \cup_{x \in X} \sigma_x = \cup_{x \in X}(X \cap \sigma_x) = X$$

que es un conjunto infinito.

El problema gráficamente es el siguiente: estamos uniendo infinitos soportes del tipo y todos salen del nodo origen, pero en diferentes direcciones. La unión de todos es un soporte del tipo



que no es unitario puesto que del nodo origen salen infinitas ramificaciones. $\square$

Existe una forma muy sencilla de garantizar que la unión de una familia de soportes unitarios sea también un soporte unitario. Es la siguiente

LEMA 2.27. *Sea $(\sigma_i)_{i\in I}$ una familia de soportes unitarios sobre X. Entonces $\cup_{i\in I}\sigma_i$ es un soporte unitario si y solo si existe $\rho \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ tal que $\sigma_i \subseteq \rho$ para todo $i \in I$.*

Demostración:
Si $\cup_{i\in I}\sigma_i$ es un soporte unitario, está claro que lo podemos tomar como ρ y todos los σ_i cumplen que $\sigma_i \subseteq \rho$.

Recíprocamente supongamos que existe el ρ del enunciado. Vamos a probar que para todo $\overline{x} \in \cup_{i\in I}\sigma_i$ se cumple que

$$X \cap \Delta_{\underline{x}} \cup_{i\in I} \sigma_i$$

es finito y no vacío.

Para probar que es finito no hay mas que darse cuenta de que $\Delta_{\underline{x}} \cup_{i\in I} \sigma_i \subseteq \Delta_{\underline{x}}\rho$ por conservar $\Delta_{\underline{x}}$ el orden. Pero como $\overline{x} \in \rho$, $X \cap \Delta_{\underline{x}}\rho$ es finito y por lo tanto $X \cap \Delta_{\underline{x}} \cup_{i\in I} \sigma_i$ es finito por ser un subconjunto suyo.

Para ver que no es vacío tomemos un $i_0 \in I$ tal que $\overline{x} \in \sigma_{i_0}$, entonces $X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma_{i_0}$ es no vacío y está contenido en $X \cap \Delta_{\underline{x}} \cup_{i\in I} \sigma_i$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.28. *Sea X un conjunto finito. Entonces todas las uniones arbitrarias de soportes unitarios sobre X son soportes unitarios.*

Demostración:
Sea $\rho = \cup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} X^k$. Este es un soporte unitario porque para todo $\overline{x} \in \rho$ se cumple que

$$X \cap \Delta_{\underline{x}}\rho = X$$

que es un conjunto finito y no vacío (si ρ es no vacío entonces X es no vacío) por lo tanto ρ es un soporte unitario. Además contiene a cualquier otro soporte unitario sobre X. □

PROPOSICIÓN 2.29. *Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, entonces*

$$\sigma = \cup_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in \mathrm{Seq}(\sigma)} ⦅x_n : n \in \mathbb{N}⦆$$

Demostración:
Vamos a probar los dos contenidos. Por un lado tenemos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\sigma)$ entonces claramente todos los $x_1 \cdots x_n \in \sigma$ por lo que $⦅x_n : n \in \mathbb{N}⦆ \subseteq \sigma$.

En el otro sentido pueden darse dos casos. El primero es que $\sigma = \varnothing$ en cuyo caso $\mathrm{Seq}(\sigma) = \varnothing$ y el resultado es trivial. El otro caso es cuando $\sigma \neq \varnothing$, podemos entonces tomar sea $x_1 \cdots x_n \in \sigma$. Vamos a probar por inducción en k que para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe un elemento $x_{n+k} \in X$ tal que $x_1 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_{n+k} \in \sigma$.

Para $k = 0$ está claro. Supongamos que hemos encontrado $x_{n+1}, \cdots, x_{n+k-1}$ y queremos encontrar x_{n+k}. Como $x_1 \cdots x_{n+k-1} \in \sigma$ por hipótesis de inducción y σ es un soporte unitario, entonces

$$X \cap \Delta_{x_{n+k-1}\cdots x_1}\sigma$$

es un conjunto finito y no vacío. Por el hecho de ser no vacío podemos tomar un elemento cualquiera $x_{n+k} \in X \cap \Delta_{x_{n+k-1}\cdots x_1}\sigma$ con lo que tenemos que $x_1 \cdots x_{n+k-1}x_{n+k} \in \sigma$ utilizando la Nota 2.10.

Con esta definición encontramos una sucesión infinita $(x_t)_{t\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\sigma)$ ya que para todo $t \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_1 \cdots x_t \in \sigma$, además

$$x_1 \cdots x_n \in ⦅x_t : t \in \mathbb{N}⦆ \subseteq \cup_{(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in \mathrm{Seq}(\sigma)} ⦅y_k : k \in \mathbb{N}⦆$$

□

EJERCICIO 2.14. Encontrar un ejemplo de soportes unitarios que al intersecarlos den un soporte no unitario.

Solución:
El ejemplo se puede dar tomando como conjunto $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$, y como soportes unitarios los siguientes

$$\sigma = \{\varnothing, a, aa, aaa, \cdots, aaa\cdots a, \cdots\}$$

$$\tau = \{\varnothing, b, bb, bbb, \cdots, bbb\cdots b, \cdots\}$$

En este caso $\sigma \cap \tau = \{\varnothing\}$ que es un soporte finito no unitario puesto que $\Delta_{\varnothing}(\sigma \cap \tau) \cap X = \varnothing$. □

PROPOSICIÓN 2.30. *Sea $(\sigma_i)_{i\in I}$ una familia de soportes unitarios sobre X con $I \neq \varnothing$. Entonces el mayor soporte unitario contenido en $\cap_{i\in I}\sigma_i$ es*

$$\cup_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\cap_{i\in I}\mathrm{Seq}(\sigma_i)}(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$$

Demostración:
Denotemos por $\tau = \cup_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\cap_{i\in I}\mathrm{Seq}(\sigma_i)}(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$.

Utilizando el Lema 2.27 podemos deducir que τ es un soporte unitario ya que podemos utilizar como ρ cualquiera de los σ_i.

Para probar que τ es el mayor soporte unitario contenido en la intersección de los σ_i consideremos un soporte unitario σ tal que $\sigma \subseteq \sigma_i$ para todo $i \in I$.

Entonces $\mathrm{Seq}(\sigma) \subseteq \mathrm{Seq}(\sigma_i)$ para todo $i \in I$ y por lo tanto $\mathrm{Seq}(\sigma) \subseteq \cap_{i\in I}\mathrm{Seq}(\sigma_i)$. De ahí deducimos utilizando la proposición anterior que

$$\sigma = \cup_{(x_n)\in\mathrm{Seq}(\sigma)}(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!) \subseteq \cup_{(x_n)\in\cap_{i\in I}\mathrm{Seq}(\sigma_i)}(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!) = \tau$$

□

Las uniones infinitas de soportes unitarios que mas nos van a interesar son las que provienen de la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.31. *Sea X un conjunto, $\tau \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y $H : \tau \to \Xi_{\mathbf{U}}(X) \setminus \{\varnothing\}$ una aplicación. Entonces el soporte*

$$\sigma = \bigcup_{\overline{x}\in\tau} \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x})$$

es un soporte unitario sobre X que contiene a τ.

Demostración:
Sea $\overline{y} \in \sigma$, entonces ha de existir un $\overline{x}_0 \in \tau$ tal que $\overline{y} \in \nabla_{\overline{x_0}} H(\overline{x}_0)$ y como éste es un soporte unitario, entonces $X \cap \Delta_{\underline{y}} \nabla_{\overline{x_0}} H(\overline{x}_0)$ es no vacío por lo que $X \cap \Delta_{\underline{y}}\sigma$ es no vacío.

Para probar que es finito vamos a probar que

$$X \cap \Delta_{\underline{y}}\sigma \subseteq \bigcup_{\substack{\overline{x}\in\tau \\ \lambda(\overline{x})\leq\lambda(\overline{y})+1}} X \cap \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x})$$

Como $\tau \cap \left(\cup_{k=0}^{\lambda(\overline{y})+1} X^k\right)$ es un conjunto finito por ser éste último un soporte de torsión, la unión de la derecha es una unión finita de conjuntos finitos y por lo tanto finita. Si probamos pues la inclusión anterior habremos probado la finitud del conjunto $X \cap \Delta_{\underline{y}}\sigma$.

Sea $w \in X \cap \Delta_{\underline{y}}\sigma$ entonces $w \in \Delta_{\underline{y}}\sigma$ y por lo tanto $\overline{y}w \in \sigma$ por lo que habrá de estar en alguno de los $\Delta_{\underline{x}} H(\overline{x})$ con $\overline{x} \in \tau$.

Si $\overline{y}w \in \Delta_{\underline{x}} H(\overline{x})$ con $\overline{x} \in \tau$ y $\lambda(\overline{x}) \leq \lambda(\overline{y}) + 1$ entonces claramente tenemos que

$$w \in \bigcup_{\substack{\overline{x}\in\tau \\ \lambda(\overline{x})\leq\lambda(\overline{y})+1}} X \cap \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x}).$$

Si $\overline{y}w \in \Delta_{\underline{x}} H(\overline{x})$ con $\overline{x} \in \tau$ y $\lambda(\overline{x}) > \lambda(\overline{y}) + 1$ entonces $\lambda(\overline{y}w) = \lambda(\overline{y}) + 1 < \lambda(\overline{x})$ por lo que $\overline{y} = x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{y})}$ y $w = x_{\lambda(\overline{y})+1}$. En tal caso

$$w \in \{x_{\lambda(\overline{y})+1}\} = X \cap \nabla_{x_{\lambda(\overline{y})+1}} H(x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{y})+1}) =$$
$$X \cap \Delta_{x_{\lambda(\overline{y})} \cdots x_1} \Delta_{x_{\lambda(\overline{y})+1} \cdots x_1} H(x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{y})} 1) =$$
$$X \cap \Delta_{\underline{y}} \nabla_{x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{y})+1}} H(x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{y})+1}) \subseteq \bigcup_{\substack{\overline{x} \in \tau \\ \lambda(\overline{x}) \leq \lambda(\overline{y})+1}} X \cap \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x})$$

Nos queda por probar que $\tau \subseteq \sigma$ pero eso es muy sencillo porque para todo $\overline{x} \in \tau$ se tiene que $\overline{x} \in \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x})$ ya que $H(\overline{x}) \neq \varnothing$ por hipótesis. □

La forma mas común en la que vamos a utilizar esta proposición es la siguiente:

Corolario 2.32. *Sea X un conjunto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X y $H : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \Xi_{\mathbf{U}}(X) \setminus \{\varnothing\}$ una aplicación. Entonces el soporte*

$$\sigma = \cup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \nabla_{x_1 \cdots x_n} H(n)$$

es un soporte unitario sobre X que contiene a $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$.

Demostración:
Basta aplicar el resultado anterior tomando como τ el soporte unitario $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$ y como H la que nos da el enunciado definiendo $H(x_1 \cdots x_n) = H(n)$. □

Vamos a ver una aplicación directa de esta construcción en el siguiente lema:

Lema 2.33. *Sea X un conjunto y sea $\theta : \Xi_{\mathbf{U}}(X) \to \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ una aplicación tal que*

1. *Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ se tiene que $\theta(\sigma) \subseteq \sigma$.*
2. *Para todo par de soportes unitarios sobre X, $\sigma \subseteq \tau$ se tiene que $\theta(\sigma) \subseteq \theta(\tau)$.*

Entonces existe un soporte de torsión $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ tal que para todo $\overline{x} \in \Sigma(X)$ con $\overline{x} \notin \xi$ se tiene que $\theta(\nabla_{\overline{x}}\sigma) \subset (\!(\overline{x})\!)$ para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$.

Demostración:
Vamos a definir ξ como sigue

$$\xi = \{\overline{x} \in \cup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} X^k : \exists \sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X) \text{ tal que } \theta(\nabla_{\overline{x}}\sigma) \not\subset (\!(\overline{x})\!)\}$$

Lo que tenemos que probar es que ξ es un soporte de torsión, con lo cual habremos concluido la prueba. Vamos a empezar viendo que es un soporte, para ello tomemos $x_1 \cdots x_n \in \xi$. Si existe un σ tal que $\theta(\nabla_{x_1 \cdots x_n}\sigma) \not\subset (\!(x_1 \cdots x_n)\!)$ se tendrá en particular que $\theta(\nabla_{x_1 \cdots x_{n-1}} \nabla_{x_n}\sigma) \not\subset (\!(x_1 \cdots x_{n-1})\!)$ ya que $(\!(x_1 \cdots x_{n-1})\!) \subseteq (\!(x_1 \cdots x_n)\!)$, pero esto implica que existe un soporte unitario τ, concretamente $\nabla_{x_n}\sigma$ tal que $\theta(\nabla_{x_1 \cdots x_{n-1}}\tau) \not\subset (\!(x_1 \cdots x_{n-1})\!)$.

Aparte de demostrar que es un soporte tenemos que ver que es de torsión, para ello vamos a probar que no existe ninguna cadena $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\xi)$ suponiendo por reducción al absurdo que existe una que denotaremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La existencia de esta cadena hace que podamos encontrar para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ un soporte $H(n)$ tal que

$$\theta(\nabla_{x_1\cdots x_n} H(n)) \not\subset (\!(x_1 \cdots x_n)\!)$$

Si $\theta(\nabla_{x_1\cdots x_n} H(n)) \not\subset (\!(x_1 \cdots x_n)\!)$ es porque existe un elemento

$$y_1 \cdots y_k \in \theta(\nabla_{x_1\cdots x_n} H(n)) \subseteq \nabla_{x_1\cdots x_n} H(n)$$

tal que $y_1 \cdots y_k \notin (\!(x_1 \cdots x_n)\!)$. Como $y_1 \cdots y_k \in \nabla_{x_1\cdots x_n} H(n)$ e $y_1 \cdots y_k \notin (\!(x_1 \cdots x_n)\!)$, por definición tendremos que $k \geq n$ y que $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_n$ y por ser $\theta(\nabla_{x_1\cdots x_n} H(n))$ un soporte deduciremos que $(\!(x_1 \cdots x_n)\!) \subseteq \theta(\nabla_{x_1\cdots x_n} H(n))$.

Aplicando el Corolario 2.32 sabemos que

$$\sigma = \cup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \nabla_{x_1\cdots x_n} H(n)$$

es un soporte unitario que contiene $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$

Además tenemos que

$$(\!(x_1 \cdots x_n)\!) \subseteq \theta(\nabla_{x_1\cdots x_n} H(n)) \subseteq \theta(\sigma)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ de donde se concluirá que $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!) \subseteq \theta(\sigma)$ lo cual es una contradicción porque $\theta(\sigma)$ es un soporte de torsión. □

6. Uniones de Soportes de Torsión

Está claro que las uniones arbitrarias de soportes de torsión no tienen porqué ser soportes de torsión, en particular porque cualquier soporte se puede poner como unión de soportes de torsión.

Proposición 2.34. *Sea X un conjunto y sea $\zeta \in \Xi(X)$, entonces*

$$\zeta = \cup_{\overline{x}\in\zeta} (\!(\overline{x})\!)$$

Demostración:
Si $\overline{x} \in \zeta$ entonces por ser ζ un soporte sabemos que $(\!(\overline{x})\!) \subseteq \zeta$ por lo que $\cup_{\overline{x}\in\zeta} (\!(\overline{x})\!) \subseteq \zeta$.

Por otro lado, para cualquier $\overline{x} \in \zeta$ se tiene que $\overline{x} \in (\!(\overline{x})\!)$ por lo que tenemos el otro contenido. □

Sin embargo, como pasaba en el caso de soportes unitarios, la unión finita de soportes de torsión es un soporte de torsión

Proposición 2.35. *Sea X un conjunto y sean $(\zeta_i)_{i\in F}$ una familia de soportes de torsión con F un conjunto finito. Entonces $\cup_{i\in F}\zeta_i \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$.*

Demostración:
Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\cup_{i\in F}\zeta_i)$. Denotemos

$$F_n = \{i \in F : x_1 \cdots x_n \in \zeta_i\}$$

Para todo $n \geq 1$ tenemos que si $i \in F_n$ entonces $i \in F_{n-1}$ por ser ζ_i un soporte. Esto nos da una cadena de inclusiones del siguiente tipo

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$$

Como todos los F_n son finitos, ha de existir un cierto $k \in \mathbb{N}$ tal para todo $t \geq k$, $F_k = F_t$. Si este F_k fuera vacío entonces tendríamos que no existe ningún $i \in F$ tal que $x_1 \cdots x_k \in \zeta_i$ lo cual contradice el hecho de que $x_1 \cdots x_k \in \cup_{i \in F} \zeta_i$. Por lo tanto F_k es no vacío. Podemos tomar un elemento $f \in F_k$ y como $f \in F_t$ para todo $t \geq k$ entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\zeta_f)$ lo que contradice el hecho de que ζ_f es un soporte de torsión. □

Como sucedía en el caso de soportes unitarios es posible construir soportes de torsión juntando infinitos soportes de torsión indexados por otro soporte de torsión. Formalmente, el resultado es el siguiente:

Proposición 2.36. *Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $H : \zeta \to \Xi_{\mathbf{T}}(X) \setminus \{\varnothing\}$ una aplicación. Entonces*

$$\xi = \cup_{\overline{x} \in \zeta} \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x})$$

es un soporte de torsión sobre X tal que $\zeta \subseteq \xi$.

Demostración:
Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\xi)$. Como ζ es un soporte de torsión, existirá un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 \cdots x_{n_0} \in \partial\zeta$. Lo que vamos a probar, es que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\cup_{t=0}^{n_0-1} \nabla_{x_1 \cdots x_t} H(x_1 \cdots x_t))$ lo cual contradice la proposición anterior.

Como $x_1 \cdots x_n \in \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x})$ está claro que para todo $n < n_0$ tenemos $x_1 \cdots x_n \in \cup_{t=0}^{n_0-1} \nabla_{x_1 \cdots x_t} H(x_1 \cdots x_t)$.

Si $n \geq n_0$ entonces $x_1 \cdots x_n \notin \zeta$ pero $x_1 \cdots x_n \in \xi$ por lo que existirá un cierto $\overline{y} \in \zeta$ tal que $x_1 \cdots x_n \in \nabla_{\overline{y}} H(\overline{y})$. Del hecho de que $x_1 \cdots x_n \in \nabla_{\overline{y}} H(\overline{y})$ deducimos que $x_1 = y_1, \cdots, x_t = y_t$ con $t = \max\{\lambda(\overline{y}), n\}$, pero como $\overline{y} \in \zeta$ y $x_1 \cdots x_n \notin \zeta$ se tiene que cumplir que $\lambda(\overline{y}) < n$, es decir, que $\overline{y} \in (\!(x_1 \cdots x_n)\!) \cap \xi = (\!(x_1 \cdots x_{n_0-1})\!)$ por lo que $\lambda(\overline{y}) < n_0$ y por lo tanto

$$x_1 \cdots x_n \in \nabla_{x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{y})}} H(x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{y})}) \subseteq \cup_{t=0}^{n_0-1} \nabla_{x_1 \cdots x_t} H(x_1 \cdots x_t).$$

Para ver que $\zeta \subseteq \xi$ no hay mas que notar que para todo $\overline{x} \in \zeta$ tenemos que $\overline{x} \in \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x})$ por ser $H(\overline{x}) \neq \varnothing$. □

Corolario 2.37. *Sea X un conjunto, $\zeta \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $H : \zeta \to \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ una aplicación. Entonces*

$$\xi = \cup_{\overline{x} \in \zeta} \nabla_{\overline{x}} H(\overline{x})$$

es un soporte de torsión sobre X.

Demostración:
El conjunto ξ es claramente un soporte por ser una unión de soportes.

El único problema para deducir que es de torsión aplicando el resultado anterior es que podría darse el caso de que para ciertos $\overline{x} \in \zeta$ se tuviera $H(\overline{x}) = \varnothing$. Para evitar esto definamos $M(\overline{x}) = H(\overline{x}) \cup \{\varnothing\}$. Para esta aplicación M tenemos que

$$\cup_{\overline{x}\in\zeta} \nabla_{\overline{x}} M(\overline{x}) \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$$

y como ξ es un subsoporte de éste deducimos que también es de torsión porque no puede contener sucesiones infinitas. □

7. El Método de Inducción en Soportes de Torsión

En esta sección vamos a explicar una técnica de demostración basada en el Teorema del Grafo de König a la que llamaremos inducción en soportes de torsión. Aplicaremos esta técnica a un resultado concreto para ver su funcionamiento.

Definición 2.38. Sea X un conjunto, $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Llamaremos

$$\nu(\partial\xi \cap \sigma) = \max\{\lambda(\overline{x}) : \overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma\}$$

Como $\partial\xi \cap \sigma$ es un conjunto finito y no vacío, entonces $\nu(\partial\xi \cap \sigma) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, además siempre existe al menos un $\overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma$ tal que $\lambda(\overline{x}) = \nu(\partial\xi \cap \sigma)$.

Proposición 2.39. *Sea $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$, $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y $x \in X \cap \sigma$, entonces*

$$\nu(\partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma) = 0 \quad \text{ó} \quad \nu(\partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma) < \nu(\partial\xi \cap \sigma)$$

Demostración:
Empecemos notando que por el Ejercicio 2.8 $\Delta_x\xi$ es un soporte de torsión y $\Delta_x\sigma$ es un soporte unitario.

Sea $\overline{y} \in \partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma$ un elemento en el cual se alcanza el máximo, es decir $\lambda(\overline{y}) = \nu(\partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma)$.

Se pueden dar dos casos. El primero es que $\lambda(\overline{y}) = 0$ en cuyo caso ya habríamos terminado porque $\nu(\partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma) = 0$. Si $\lambda(\overline{y}) \geq 1$ entonces tenemos por un lado que $\overline{y} \in \Delta_x\sigma$ que por definición de Δ_x significa que $x\overline{y} \in \sigma$. Por otro lado $\overline{y} \notin \Delta_x\xi$ y $y_1 \cdots y_{\lambda(\overline{y})-1} \in \Delta_x\xi$ de ahí deducimos que $x\overline{y} \notin \xi$ y $xy_1 \cdots y_{\lambda(\overline{y})-1} \in \xi$ por lo que $x\overline{y} \in \partial\xi$. De todo esto concluimos que $x\overline{y} \in \partial\xi \cap \sigma$ por lo que

$$\nu(\partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma) = \lambda(\overline{y}) < \lambda(\overline{y}) + 1 \leq \nu(\partial\xi \cap \sigma)$$

□

Proposición 2.40. *Sea X un conjunto, $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X) \setminus \{\varnothing\}$ y $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rrcl} \alpha : & \{(x,\overline{y}) : x \in X \cap \sigma, \overline{y} \in \partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma\} & \to & \partial\xi \cap \sigma \\ & (x,\overline{y}) & \mapsto & x\overline{y} \end{array}$$

es una biyección entre ambos conjuntos.

Demostración:
Tenemos que empezar probando que está bien definida. Para ello tomemos $x \in X \cap \sigma$ e $\overline{y} \in \partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma$.

Como $\overline{y} \in \Delta_x\sigma$ entonces $x\overline{y} \in \sigma$. Para ver que $x\overline{y} \in \partial\xi$ tenemos que considerar dos casos. El primero es que $\overline{y} = \varnothing$, en tal caso $\varnothing \in \partial\Delta_x\xi$ por lo que $\Delta_x\xi = \varnothing$ y por lo tanto $x \notin \xi$. Pero como $\xi \neq \varnothing$ necesariamente $x\overline{y} = x \in \partial\xi$.

El segundo caso es cuando $\lambda(\overline{y}) \geq 1$. En este caso $\overline{y} \notin \Delta_x\xi$ e $y_1 \cdots y_{\lambda(\overline{y})-1} \in \Delta_x\xi$ de donde deducimos que $x\overline{y} \notin \xi$ y $xy_1 \cdots y_{\lambda(\overline{y})-1} \in \xi$ por lo que $x\overline{y} \in \partial\xi$.

La aplicación α es claramente inyectiva. La única dificultad está en ver que también es suprayectiva. Para ver la suprayectividad consideraremos un elemento $\overline{w} \in \partial\xi \cap \sigma$. Como $\xi \neq \varnothing$ se ha de dar que $\lambda(\overline{w}) \geq 1$ por lo que podemos poner $\overline{w} = x\overline{y}$ para un cierto $\overline{y}$ y un $x \in X$. Como $\overline{w} \in \sigma$, del hecho de que σ sea un soporte deducimos que $x \in \sigma$ y por definición de Δ_x que $\overline{y} \in \Delta_x\sigma$. Para ver que $\overline{y} \in \partial\Delta_x\xi$ tenemos que considerar dos casos. El primero es el caso en que $\lambda(\overline{y}) = 0$. En tal caso tendríamos que $x \in \partial\xi$ por lo que $x \notin \xi$ y $\Delta_x\xi$ ha de ser vacío. Entonces $\overline{y} \in \partial\Delta_x\xi = \{\varnothing\}$.

El segundo caso es cuando $\lambda(\overline{y}) \geq 1$. En este caso tendríamos que $x\overline{y} \notin \xi$ pero $xy_1 \cdots y_{\lambda(\overline{y})-1} \in \xi$ de donde concluimos que $\overline{y} \in \partial\Delta_x\xi$. □

PROPOSICIÓN 2.41. *Sea X un conjunto, $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Entonces*

$$\sigma = \bigcup_{\overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma} (\underline{x})\sigma$$

Demostración:
Si $\sigma = \varnothing$ entonces $\partial\xi \cap \sigma$ no tiene ningún elemento y la proposición se cumple porque unimos una familia vacía de conjuntos y esa unión por definición es el conjunto vacío. Supondremos a partir de ahora que $\sigma \neq \varnothing$.

La demostración se hará por inducción en $\nu(\partial\xi \cap \sigma)$ Empecemos viendo el caso en que $\nu(\partial\xi \cap \sigma) = 0$. Si se da este caso entonces tenemos que $\varnothing \in \partial\xi$ por lo que necesariamente $\xi = \varnothing$ por lo que $\partial\xi \cap \sigma = \{\varnothing\}$ y la igualdad del enunciado se reduce a $\sigma = \nabla_\varnothing\Delta_\varnothing\sigma$, igualdad que es cierta por definición de $\nabla_\varnothing$ y $\Delta_\varnothing$.

Supongamos que hemos probado ya el resultado para todos los $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y todos los $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ tales que $\nu(\partial\xi \cap \sigma) < n$ y vamos a probarlo en el caso n.

Como $\sigma \neq \{\varnothing\}$ ya que es un soporte unitario podemos aplicar el Ejercicio 2.6 y deducir que $\sigma = \cup_{x \in X \cap \sigma}(x)\sigma$. Sea $x \in X \cap \sigma$. Por hipótesis de inducción sabemos que

$$\Delta_x\sigma = \bigcup_{\overline{y} \in \partial\Delta_x\xi \cap \Delta_x\sigma} \nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\Delta_x\sigma$$

y aplicando ∇_x a los dos miembros de la igualdad deducimos que

$$(x)\sigma = \bigcup_{\overline{y}\in\partial\Delta_x\xi\cap\Delta_x\sigma} (\underline{y}x)\sigma$$

Uniendo esto con la igualdad del Ejercicio 2.6 tenemos que

$$\sigma = \cup_{x\in X\cap\sigma}(x)\sigma = \bigcup_{x\in X\cap\sigma}\ \bigcup_{\overline{y}\in\partial\Delta_x\xi\cap\Delta_x\sigma} (\underline{y}x)\sigma = \bigcup_{\overline{w}\in\partial\xi\cap\sigma} (\underline{w})\sigma$$

siendo esta última igualdad consecuencia de la Proposición 2.40. □

8. Subsoportes Unitarios Escindidos

DEFINICIÓN 2.42. Sea σ_i una familia de soportes unitarios con i recorriendo un cierto conjunto de índices I y tales que $\cup_{i\in I}\sigma_i$ es un soporte unitario. Entonces diremos que la unión $\tau = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ es una unión directa y lo representaremos $\tau = \biguplus_{i\in I}\sigma_i$ si para todo $i \in I$, $\sigma_i \bigcap \left(\bigcup_{j\in I\setminus\{i\}}\sigma_j\right)$ es un soporte finito (o equivalentemente de torsión ya que todo subsoporte de torsión de un unitario es finito).

EJEMPLO 2.43. Sea X un conjunto, $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Entonces

$$\sigma = \biguplus_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} (\underline{x})\sigma$$

Demostración:
El hecho de que $\sigma = \cup_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(\underline{x})\sigma$ ya lo vimos en la Proposición 2.41.

Para ver que esta unión es directa denotemos $F = \partial\xi\cap\sigma$ y tomemos $\overline{x} \in F$, $I = F\setminus\{\overline{x}\}$. Tenemos que probar que $(\underline{x})\sigma\cap\cup_{\overline{y}\in I}(\underline{y})\sigma$ es finito. Supongamos que no lo es y que podemos tomar una sucesión

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}((\underline{x})\sigma \cap \cup_{\overline{y}\in I}(\underline{y})\sigma)$$

El conjunto F es finito y podemos tomar un número natural $n_0 > \max\{\lambda(\overline{w}) : \overline{w} \in F\}$.

El elemento $z_1\cdots z_{n_0} \in (\underline{x})\sigma \cap \cup_{\overline{y}\in I}(\underline{y})\sigma$, por lo tanto existirá un $\overline{y} \in I$ tal que $z_1\cdots z_{n_0} \in (\underline{x})\sigma\cap(\underline{y})\sigma$. Al haber tomado $n_0 \geq \lambda(\overline{x}), \lambda(\overline{y})$, deducimos que que $\overline{x}, \overline{y} \in (\!(z_1\cdots z_{n_0})\!)$ y como este conjunto está completamente ordenado, podemos asegurar que $\overline{x} \leq \overline{y}$ o que $\overline{y} \leq \overline{x}$. Vamos a ver que ninguno de los dos casos es posible.

Si $\overline{y} \leq \overline{x}$, como ambos son distintos se ha de dar que $\overline{y} < \overline{x}$ y como $\overline{x} \in \partial\xi$, entonces $\overline{y} \in \xi$ lo cual es imposible porque $\overline{y} \in \partial\xi$ por estar en F. Si $\overline{x} \leq \overline{y}$ se llega a una contradicción simétricamente. □

DEFINICIÓN 2.44. Sean $\sigma, \tau \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ tales que $\sigma \subseteq \tau$. Diremos que σ es un subsoporte unitario escindido de τ si existe otro subsoporte unitario $\rho \subseteq \tau$ tal que $\tau = \sigma\uplus\rho$. A esta relación la denotaremos $\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$.

LEMA 2.45. *Sea $\sigma, \tau, \rho \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ tales que $\tau = \sigma \uplus \rho$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n_0$,*

$$(x_m \cdots x_1)\tau \subseteq \sigma \quad \text{ó} \quad (x_m \cdots x_1)\tau \subseteq \rho$$

Demostración:
Supongamos por reducción al absurdo que esto no sucede, es decir, que existe una cadena infinita $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que par todo $n \in \mathbb{N}$, $(x_n \cdots x_1)\tau \not\subseteq \sigma$ y $(x_n \cdots x_1)\tau \not\subseteq \rho$. En particular se tiene que para todo n, $x_1 \cdots x_n \in \tau$ porque si no tendríamos que $(x_n \cdots x_1)\tau = \varnothing$ y ya habríamos llegado a una contradicción.

Tomemos un $n \in \mathbb{N}$. Si $x_1 \cdots x_n \notin \sigma$, como $\tau = \sigma \cup \rho$, entonces tenemos que $x_1 \cdots x_n \in \rho$, en particular $(\!(x_1 \cdots x_n)\!) \subseteq \rho$. Además, para todo $x_1 \cdots x_n z_1 \cdots z_t \in (x_n \cdots x_1)\tau$ tendríamos que $x_1 \cdots x_n z_1 \cdots z_t \notin \sigma$ puesto que si estuviera en σ, por definición de soporte tendríamos que $x_1 \cdots x_n \in \sigma$. Hemos probado pues que si $x_1 \cdots x_n \notin \sigma$, necesariamente $(x_n \cdots x_1)\tau \subseteq \rho$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x_1 \cdots x_n \in \sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Del mismo modo se prueba que $x_1 \cdots x_n \in \rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así se llega a una contradicción con el hecho de que $\sigma \cap \rho$ sea finito. $\square$

PROPOSICIÓN 2.46. *Sean $\sigma \subseteq \tau$ dos soportes unitarios. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *$\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$.*
2. *Existe un soporte de torsión ξ y un subconjunto finito $F \subseteq \partial\xi \cap \tau$ tal que $\sigma = \cup_{\overline{x}\in F}(\underline{x})\tau$.*

Demostración:
$(2 \Rightarrow 1)$. Sea $G = (\partial\xi \cap \tau) \setminus F$ y sea $\rho = \cup_{\overline{x}\in G}(\underline{x})\tau$. Por la Proposición 2.41 sabemos que $\rho \cup \sigma = \tau$. Además vimos en el Ejemplo 2.43, que para todo $\overline{x} \in \partial\xi \cap \tau$, el conjunto

$$(\underline{x})\tau \cap \cup_{\substack{\overline{y}\in\partial\xi\cap\tau \\ \overline{y}\neq\overline{x}}}(\underline{y})\tau$$

es finito, en particular, para todo $\overline{x} \in G$, $(\underline{x})\tau \cap \sigma$ es finito, pero entonces $\rho \cap \sigma = \cup_{\overline{x}\in G}(\underline{x})\tau \cap \sigma$ es un conjunto finito por ser una unión de conjuntos finitos.

$(1 \Rightarrow 2)$. Denotemos por ρ a un soporte unitario tal que $\rho \uplus \sigma = \tau$. Consideremos el soporte siguiente

$$\xi = \{\overline{x} \in \Sigma(X) : (\underline{x})\tau \not\subseteq \sigma \text{ y } (\underline{x})\tau \not\subseteq \rho\}.$$

Este conjunto es un soporte ya que si $\overline{x} \in \xi$ y $\overline{y} \leq \overline{x}$ entonces $(\underline{x})\tau \subseteq (\underline{y})\tau$ por lo tanto $(\underline{y})\tau$ tampoco puede estar contenido en ninguno de esos dos soportes. El soporte ξ es un soporte de torsión aplicando directamente el Lema 2.45.

Sea $F = \{\overline{x} \in \partial\xi \cap \tau : (\underline{x})\tau \subseteq \sigma\}$ y $G = \{\overline{x} \in \partial\xi \cap \tau : (\underline{x})\tau \subseteq \rho\}$. Por definición de ξ, está claro que para todo $\overline{x} \in \partial\xi \cap \tau$ se tiene que tener uno de estos dos contenidos, o $(\underline{x})\tau \subseteq \sigma$ o $(\underline{x})\tau \subseteq \rho$, por lo tanto $\overline{x} \in F$, o $\overline{x} \in G$. Esto hace que $F \cup G = \partial\xi \cap \tau$ y $F \cap G = \varnothing$. Además

Para todo $\overline{x} \in F$, tenemos que $(\underline{x})\tau \subseteq \sigma$, por lo tanto $(\underline{x})\tau \subseteq (\underline{x})\sigma$, además el otro contenido se tiene porque el operador $(\underline{x})$ conserva el orden, por lo tanto $(\underline{x})\tau = (\underline{x})\sigma$ para todo $\overline{x} \in F$. Del mismo modo se ve que $(\underline{x})\tau = (\underline{x})\rho$ para todo $\overline{x} \in G$.

Además es una simple comprobación ver que $\partial\xi \cap \sigma = F$ y que $\partial\xi \cap \rho = G$. Por lo tanto tenemos que

$$\sigma = \cup_{\overline{x}\in F}(\underline{x})\sigma = \cup_{\overline{x}\in F}(\underline{x})\tau$$

que era lo que queríamos probar. □

EJERCICIO 2.15. Sea $\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$ con $\sigma = \cup_{\overline{x}\in F}(\underline{x})\tau$ para un cierto subconjunto $F \subseteq \partial\xi \cap \tau$. Entonces

1. $F = \partial\xi \cap \sigma$.
2. Para todo $\overline{x} \in \sigma \setminus \xi$ se tiene que $(\underline{x})\sigma = (\underline{x})\tau$.
3. Para todo $\zeta \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ tal que $\xi \subseteq \zeta$ se tiene que $\sigma = \cup_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\xi}(\underline{x})\tau$.

Solución:

1. Sea $\overline{x} \in F$. Como $\overline{x} \in (\underline{x})\tau$ entonces $\overline{x} \in \sigma$ por lo tanto $F \subseteq \partial\xi \cap \sigma$. Recíprocamente, sea $\overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma$, entonces

$$\overline{x} \in \partial\xi \cap (\cup_{\overline{y}\in F}(\underline{y})\tau) = \cup_{\overline{y}\in F}(\partial\xi \cap (\underline{y})tau)$$

Si demostramos que para todo $\overline{y} \in \partial\xi\cap\tau$ se tiene que $\partial\xi\cap(\underline{y})\tau = \{\overline{y}\}$ entonces habremos terminado. Vamos pues a demostrar ésto: Sea $\overline{z} \in \partial\xi \cap (\underline{y})\tau$, por el hecho de que $\overline{z} \in (\underline{y})\tau$, tenemos que $\overline{z} \in \{\overline{w} \in \tau : \overline{y} \le \overline{w}\} \cup (\!(\overline{y})\!)$. Si $\overline{z} \in (\!(\overline{y})\!)$ entonces como este conjunto es completamente ordenado y $\overline{y} \in \partial\xi$ tendríamos que $\overline{z} = \overline{y}$. Del mismo modo, si $\overline{z} \in \tau$ cumple que $\overline{y} \le \overline{z}$, como $\overline{y}, \overline{z} \in \partial\xi$ se tendría que $\overline{y} = \overline{z}$. En cualquiera de los casos tenemos que $(\underline{y})\tau \cap \partial\xi = \{\overline{y}\}$ que era lo que necesitábamos probar.
2. Sea $\overline{x} \in \sigma \setminus \xi$. Entonces existirá un $\overline{y} \in \partial\xi \cap \sigma$ tal que $\overline{y} \le \overline{x}$. Como $\sigma \subseteq \tau$ entonces $(\underline{x})\sigma \subseteq (\underline{x})\tau$. Para probar el otro contenido tomemos $\overline{z} \in (\underline{x})\tau = (\underline{x})(\underline{y})\tau$, entonces $\overline{z} \in (\underline{y})\tau \subseteq \sigma$. Además, como $\overline{z} \in (\underline{x})\tau$ se cumplirá alguna de estas dos condiciones, o $\overline{z} \le \overline{x}$ o $\overline{x} \le \overline{z}$. En cualquiera de los dos casos, esa condición unida al hecho de que $\overline{z} \in \sigma$ nos fuerza a que $\overline{z} \in (\underline{x})\sigma$.
3. Como $\xi \subseteq \zeta$, se tiene que para todo $\overline{x} \in \partial\zeta \cap \sigma$, $(\underline{x})\tau = (\underline{x})\sigma$, por lo tanto

$$\cup_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\sigma}(\underline{x})\tau = \cup_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\sigma}(\underline{x})\sigma = \sigma.$$

□

EJERCICIO 2.16. Encontrar un ejemplo de dos soportes unitarios $\sigma \subseteq \tau$ para los cuales no se tenga $\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$.

Solución:
Sea $X = \{a, b\}$. Vamos a considerar el soporte $\tau = \Sigma(X)$ que es un soporte unitario y

$$\sigma = ((a : n \in \mathbb{N})) = \{\varnothing, a, aa, aaa, \cdots\}$$

Claramente $\sigma \subseteq \tau$, pero para todo $\overline{x} \in \sigma$ se tiene que $(\underline{x})\sigma \neq (\underline{x})\tau$, la razón es porque $(\underline{x})\sigma = \sigma$ para todo $\overline{x} \in \sigma$ y $\overline{x}b \in (\underline{x})\tau \setminus \sigma$. □

EJERCICIO 2.17. Sean σ, τ dos soportes unitarios tales que $\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$, entonces existe un único soporte unitario ρ tal que $\sigma \uplus \rho = \tau$.

Solución:
Supongamos que existen dos, ρ y ρ' y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\rho)$. En particular esto significa que $x_1 \cdots x_n \in \tau$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $\sigma \cap \rho'$ es finito, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq n_0$, $x_1 \cdots x_m \notin \sigma \cap \rho'$. Si $x_1 \cdots x_{n_0} \in \sigma$ entonces $x_1 \cdots x_m \in \sigma$ para todo $m \geq n_0$ ya que σ es un soporte y llegaríamos a una contradicción con el hecho de que $\sigma \cap \rho$ sea finito. Tenemos pues que para todo $m \geq n_0$, $x_1 \cdots x_m \in \rho'$ por lo tanto $\mathrm{Seq}(\rho) \subseteq \mathrm{Seq}(\rho')$.

Simétricamente se prueba que $\mathrm{Seq}(\rho') \subseteq \mathrm{Seq}(\rho)$. Entonces

$$\rho = \cup_{\overline{x}^* \in \mathrm{Seq}(\rho)} ((\overline{x}^*)) = \cup_{\overline{x}^* \in \mathrm{Seq}(\rho')} ((\overline{x}^*)) = \rho'.$$

□

EJERCICIO 2.18. La relación $\subseteq_{\oplus}$ es una relación de orden en $\Xi_{\mathbf{U}}(X)$.

Solución:
Sea σ un soporte unitario, entonces $\sigma = \sigma \uplus \varnothing$ por lo que $\sigma \subseteq_{\oplus} \sigma$.

Si $\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$ y $\tau \subseteq_{\oplus} \sigma$ en particular tenemos que $\sigma \subseteq \tau$ y $\tau \subseteq \sigma$, por lo tanto $\sigma = \tau$.

Si $\rho \subseteq_{\oplus} \sigma \subseteq_{\oplus} \tau$ entonces existen soportes unitarios ρ', σ' tales que $\rho \uplus \rho' = \sigma$ y $\sigma \uplus \sigma' = \tau$.

Sea $\hat{\rho} = \rho' \cup \sigma'$, entonces $\hat{\rho} \cup \rho = \sigma' \cup \rho \cup \rho' = \sigma' \cup \sigma = \tau$, además $\hat{\rho} \cap \rho = (\rho' \cap \rho) \cup (\sigma' \cap \rho) \subseteq (\rho' \cap \rho) \cup (\sigma' \cap \sigma)$ que es una unión de dos conjuntos finitos y por lo tanto finito. Esto prueba que $\hat{\rho} \uplus \rho = \tau$ y por lo tanto que $\rho \subseteq_{\oplus} \tau$. □

TEMA 3

La Definición de las Categorías

En este capítulo vamos a fijar, a no ser que se diga expícitamente, un anillo R y un anillo con identidad A tal que R sea un ideal bilátero de A. Cuando hablemos de A-módulos nos referiremos siempre a A-módulos unitarios. Las construcciones las vamos a hacer basándonos en esta elección. Veremos mas adelante que estas construcciones son independientes de la citada elección.

1. La Categoría CMod-R

Sea M_A un A-módulo por la izquierda. El grupo abeliano $\mathrm{Hom}_A(R_A, M_A)$ tiene estructura de A-módulo por la derecha con la operación

$$(f \cdot a)(r) = f(ar) \quad \forall f \in \mathrm{Hom}_A(R_A, M_A), a \in A, r \in R.$$

Denotaremos

$$\lambda_M : M_A \to \mathrm{Hom}_A(R_A, M_A)$$

como $\lambda_M(m)(r) = m \cdot r$ para todo $m \in M$ y todo $r \in R$.

Ejercicio 3.1.

$$\lambda : \mathrm{Id}_{\mathsf{Mod}\text{-}A} \to \mathrm{Hom}_A(R_A, -)$$

es una transformación natural de funtores.

Solución:
Sea $f : M_A \to N_A$ un A-homomorfismo. El diagrama que tenemos que probar que es conmutativo es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
M_A \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_A(R_A, M_A) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_A(R_A, f)"] \\
N_A \arrow[r, "\lambda_N"'] & \mathrm{Hom}_A(R_A, N_A)
\end{tikzcd}$$

Para comprobar la conmutatividad vamos a ver que para todo $m \in M$ se cumple que $\mathrm{Hom}_A(R_A, f)(\lambda_M(m))$ y $\lambda_N(f(m))$ son el mismo elemento de $\mathrm{Hom}_A(R_A, M_A)$, es decir, que

$$\begin{gathered}
\forall m \in M, \forall r \in R \quad \mathrm{Hom}_A(R_A, f)(\lambda_M(m))(r) = \\
(f \circ \lambda_M(m))(r) = f(\lambda_M(m)(r)) = f(m \cdot r) = \\
f(m) \cdot r = \lambda_N(f(m))(r).
\end{gathered}$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}_A(R_A, f)(\lambda_M(m)) = \lambda_N(f(m))$ y la transformación es natural. □

Definición 3.1. Sea R un anillo. Denotaremos por $\mathsf{CMod}\text{-}R$ a la subcategoría plena de $\mathsf{Mod}\text{-}A$ formada por los A-módulos M tales que λ_M es un isomorfismo.

Nota 3.2. *Sea A un anillo y sea M_A un A-módulo de la categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$, entonces se cumple que*

$$\forall m \in M, mR = 0 \textit{ si y solo si } m = 0$$

ya que el conjunto de los $m \in M$ que cumplen la condición $mR = 0$ son precisamente los elementos de $\mathrm{Ker}(\lambda_M)$. Esta propiedad también la cumplen todos los A-submódulos de M_A aunque no estén en la categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$.

Definición 3.3. A los A-módulos por la derecha M_A que cumplen la condición de que para todo $m \in M$, $mR = 0$ si y solo si $m = 0$ los llamaremos libres de torsión y a la clase de A-módulos por la derecha libres de torsión la denotaremos $\mathcal{F}$.

Proposición 3.4. *Sea M_A un A-módulo a derecha de la categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$. Un A-submódulo N_A de M_A está en $\mathsf{CMod}\text{-}R$ si y solo si M/N es libre de torsión.*

Demostración:
Denotemos por $j : N_A \to M_A$ la inclusión canónica. Empecemos suponiendo que M/N es libre de torsión. Vamos a probar que

$$\lambda_N : N_A \to \mathrm{Hom}_A(R_A, N_A)$$

es un isomorfismo. Por una parte

$$\mathrm{Ker}(\lambda_N) = \{n \in N : nR = 0\} \subseteq \mathrm{Ker}(\lambda_M) = 0$$

por lo tanto λ_N es un monomorfismo. Para ver que es un epimorfismo sea $h : R_A \to N_A$ un A-homomorfismo. Si componemos h con la inclusión canónica, $j \circ h$ es un A-homomorfismo entre A y M por lo tanto existe un $m \in M$ tal que $h(r) = m \cdot r$ para todo $r \in R$. El único problema es probar que m pertenece efectivamente a N, pero eso se comprueba fácilmente porque para todo $r \in R$, $m \cdot r \in N$, por lo tanto $(m + N)R = 0$ en M/N que es libre de torsión, entonces $m + N = 0$ o lo que es lo mismo, $m \in N$, por lo tanto $h = \lambda_N(m)$.

Recíprocamente supongamos que λ_N es un isomorfismo y que tenemos un $m \in M$ tal que $(m + N)R = 0$. Definamos $h : R \to N$ como $h(r) = m \cdot r$, la imagen de h está efectivamente en N ya que $m \cdot r + N = 0$ para todo $r \in R$.

Por ser λ_N un isomorfismo, podemos encontrar un $n \in N$ tal que $h(r) = n \cdot r$ para todo $r \in R$, pero entonces deducimos que $(m - n)R = 0$ y como M es libre de torsión, $m = n \in N$, es decir $m + N = 0$. □

Ejercicio 3.2. Sea R un anillo con identidad, entonces $\mathsf{CMod}\text{-}R = \mathsf{Mod}\text{-}R = \mathcal{F}$.

Solución:
Sea $M \in \mathsf{Mod}$-R, vamos a ver que λ_M es un isomorfismo viendo que λ_M es monomorfismo y epimorfismo. Sea $m \in \operatorname{Ker}(\lambda_M)$, entonces $\lambda_M(m)(r) = 0$ para todo $r \in R$, en particular $\lambda_M(m)(1_R) = 0$, pero $\lambda_M(m)(1_R) = m \cdot 1_R = m$ por ser M un A-módulo unitario.

Para ver que es epimorfismo sea $f : R \to M$ un A-homomorfismo. La antiimagen de f va a ser precisamente $f(1_R)$.

$$\lambda_M(f(1_R))(r) = f(1_R) \cdot r = f(1_R \cdot r) = f(r)$$

y esto para todo $r \in R$, por lo tanto $f = \lambda_M(f(1_A))$ tal y como afirmábamos.

Por otra parte sea $M \in \mathsf{CMod}$-R, este módulo es libre de torsión ya que los elementos $m \in M$ tales que $mR = 0$ son precisamente los elementos de $\operatorname{Ker}(\lambda_M) = 0$.

Finalmente tomemos un $M \in \mathcal{F}$. Tenemos que ver que para todo $m \in M$ se cumple que $m \cdot 1_R - m = 0$. Para ello vamos a ver que este elemento es anulado por todos los de R. Sea $r \in R$,

$$(m \cdot 1_R - m) \cdot r = (m \cdot 1_R) \cdot r - m \cdot r =$$
$$m \cdot (1_R \cdot r) - m \cdot r = m \cdot r - m \cdot r = 0.$$

$\square$

DEFINICIÓN 3.5. Denotaremos por $\mathbf{I_C} : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}A$ al funtor inclusión que a cada módulo de CMod-R lo lleva a él mismo considerado en Mod-R.

A veces consideraremos los módulos dentro de Mod-A mencionándolo, pero sin utilizar la notación de $\mathbf{I_C}$ para no recargar excesivamente la escritura.

NOTA 3.6. *Sean M_A y N_A dos A-módulos de CMod-R y sea f un homomorfismo entre M_A y N_A. Entonces f es un isomorfismo en CMod-R si y solo si es un isomorfismo en Mod-A.*

Demostración:
La razón es porque CMod-R es una subcategoría plena de Mod-A. $\square$

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea $((M_i)_{i\in I}, (\tau_{ij} : M_j \to M_i)_{i\leq j})$ un sistema inverso con $M_i \in \mathsf{CMod}$-R para todo $i \in I$. Entonces $\varprojlim_{i\in I} M_i$ calculado en Mod-A pertenece de hecho a CMod-R.*

Demostración:
Como todos los $M_i \in \mathsf{CMod}$-R sabemos que λ_{M_i} es un isomorfismo para todo $i \in I$. Lo que vamos a probar es que $\lambda_{\varprojlim M_i}$ es también un isomorfismo.

La forma mas rápida de verlo es sabiendo que el funtor $\mathrm{Hom}_A(R_A, -)$ conserva límites inversos ya que tiene un adjunto por la derecha. Entonces

$$\mathrm{Hom}_A(R_A, \varprojlim_{i\in I} M_i) \simeq \varprojlim_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(R_A, M_i) \simeq \varprojlim_{i\in I} M_i$$

y la composición de estos isomorfismos es precisamente $\lambda_{\varprojlim M_i}$. □

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea* $((M_i)_{i\in I}, (\tau_{ij} : M_j \to M_i)_{i\leq j})$ *un sistema inverso con* M_i *en* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *para todo* $i \in I$. *Entonces* $\varprojlim_{i\in I} M_i$ *calculado en* $\mathsf{Mod}\text{-}A$ *es también el límite inverso de dichos objetos en la categoría* $\mathsf{CMod}\text{-}R$.

Demostración:
Puesto que todos los objetos de $\mathsf{CMod}\text{-}R$ son A-módulos por la derecha y todos los morfismos de $\mathsf{CMod}\text{-}R$ son también A-homomorfismos, sabemos que $\varprojlim_{i\in I} M_i$ cumple la propiedad universal del límite inverso en la categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$. Como además pertenece a la categoría, utilizando la unicidad del límite inverso deducimos que este ha de ser precisamente el límite inverso del sistema. □

NOTA 3.9. *Lo que hemos probado, en otras palabras, es que el funtor* $\mathbf{I_C} : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}A$ *conserva límites inversos.*

2. La Categoría $\mathsf{DMod}\text{-}R$

Sea M_A un A-módulo por la derecha, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \beta: & M \times R & \to & M \\ & (m, r) & \mapsto & m \cdot r \end{array}$$

es bilineal y A-equilibrada, por lo que el siguiente homomorfismo está bien definido

$$\begin{array}{rccc} \mu_M: & M \otimes_A R & \to & M \\ & m \otimes r & \mapsto & m \cdot r \end{array}$$

EJERCICIO 3.3. $\mu : - \otimes_A R \to \mathrm{Id}_{\mathsf{Mod}\text{-}A}$ es una transformación natural.

Solución:
Sean M_A y N_A dos A-módulos por la derecha y sea $f : M \to N$ un A-homomorfismo entre ellos. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times R \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f\times \mathrm{id}_A"'] & M \otimes_A R \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "f\otimes_A R"'] & M \arrow[d, "f"] \\ N \times R \arrow[r, "\sigma"'] & N \otimes_A R \arrow[r, "\mu_N"'] & N \end{tikzcd}$$

Siendo τ y σ los canónicos. El cuadrado exterior es conmutativo ya que

$$f \circ \mu_M \circ \tau(m,r) = f(m \cdot r) = f(m) \cdot r =$$
$$\mu_N \circ \sigma \circ (f(m), r) = \mu_N \circ \sigma \circ f \times \mathrm{id}_A(m,r)$$

El cuadrado de la izquierda también es conmutativo por definición de $f \otimes_A R$. Por lo tanto tenemos que

$$\mu_N \circ f \otimes_A R \circ \tau = f \circ \mu_M \circ \tau$$

y utilizando que τ es suprayectiva deducimos que

$$\mu_N \circ f \otimes_A R = f \circ \mu_M.$$

□

Definición 3.10. Denotaremos por $\mathsf{DMod}\text{-}R$ a la subcategoría plena de $\mathsf{Mod}\text{-}A$ formada por los A-módulos M tales que μ_M es un isomorfismo[1].

Nota 3.11. *Sea M_A un A-módulo de $\mathsf{DMod}\text{-}R$, entonces $MR = M$ ya que MR es precisamente la imagen del homomorfismo μ_M. Además esta propiedad es heredada por cualquier cociente de M_A aunque no pertenezca a la categoría $\mathsf{DMod}\text{-}R$.*

Definición 3.12. Un A-módulo por la derecha M_A se dice que es unitario si $MR = M$. A la clase de A-módulos por la derecha unitarios la denotaremos $\mathcal{U}$.

Proposición 3.13. *Sea M_A un A-módulo de $\mathsf{DMod}\text{-}R$ y K_A un A-submódulo de M_A. Entonces M/K está en $\mathsf{DMod}\text{-}R$ si y solo si K es unitario.*

Demostración:
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
K & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{p} & M/K & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle \mu_K}\uparrow & & {\scriptstyle \simeq}\uparrow{\scriptstyle \mu_M} & & \uparrow{\scriptstyle \mu_{M/K}} & & \\
K \otimes_A R & \xrightarrow[j\otimes \mathrm{id}_R]{} & M \otimes_A R & \xrightarrow[p\otimes \mathrm{id}_R]{} & M/K \otimes_A R & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

El homomorfismo μ_M es un isomorfismo y $\mu_{M/K}$ es siempre un epimorfismo porque M/K es unitario. Tenemos que probar que μ_K es un epimorfismo si y solo si $\mu_{M/K}$ es un monomorfismo.

Supongamos primero que $\mu_{M/K}$ es un monomorfismo y tomemos un $k \in K$, $j(k) \in M$ y por lo tanto podemos tomar un $v \in M \otimes_A R$ tal que $\mu_M(v) = j(k)$.

$$\mu_{M/K} \circ (p \otimes \mathrm{id}_R)(v) = p \circ \mu_M(v) = p \circ j(k) = 0$$

[1]Estos módulos han sido llamados firmes en [**37**].

y usando que $\mu_{M/K}$ es un monomorfismo deducimos que $(p\otimes\mathrm{id}_R)(v) = 0$ por tanto $v \in \mathrm{Ker}(p\otimes\mathrm{id}_R) = \mathrm{Im}(j\otimes\mathrm{id}_R)$ y podemos tomar $w \in K\otimes_A R$ tal que $v = (j \otimes \mathrm{id}_R)(w)$.

$$j \circ \mu_K(w) = \mu_M \circ (j \otimes \mathrm{id}_R)(w) = \mu_M(v) = j(k)$$

de donde deducimos que $k = \mu_K(w)$ ya que j es un monomorfismo.

Recíprocamente supongamos que μ_K es un epimorfismo y sea $w \in \mathrm{Ker}(\mu_{M/K})$. Usando la suprayectividad de $M \otimes_A \mathrm{id}_R$ podemos tomar $w \in M \otimes_A R$ tal que $(p \otimes \mathrm{id}_R)(v) = w$.

$$p \circ \mu_M(w) = \mu_{M/K} \circ (p \otimes \mathrm{id}_R)(v) = 0$$

y entonces $\mu_M(w) \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(j)$. Usando la suprayectividad de μ_K podemos encontrar $z \in K \otimes_A R$ tal que $j \circ \mu_K(z) = \mu_M(v)$, pero $j \circ \mu_K(z) = \mu_M \circ (j \otimes \mathrm{id}_R)(z)$ y usando que μ_M es un isomorfismo, deducimos que $v = (j \otimes \mathrm{id}_R)(z)$. Entonces

$$w = (p \otimes \mathrm{id}_R)(v) = (p \otimes \mathrm{id}_R) \circ (j \otimes \mathrm{id}_R)(z) = 0.$$

$\square$

EJERCICIO 3.4. Sea R un anillo con identidad, entonces $\mathsf{DMod}\text{-}R = \mathcal{U} = \mathsf{Mod}\text{-}R$.

Solución:
Sea $M \in \mathsf{DMod}\text{-}R$. Como $MR = \mathrm{Im}(\mu_M) = M$ está claro que M es unitario.

Supongamos que $M \in \mathcal{U}$. Vamos a ver que $M \in \mathsf{Mod}\text{-}R$, es decir, que $m \cdot 1_R m$ para todo $m \in M$. Como $m \in M = MR$ podemos encontrar elementos $m_i \in M$ y $r_i \in R$ con $i \in \{1, \cdots, n\}$, tales que $m = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i$.

$$m \cdot 1_R = (\sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i) \cdot 1_R = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (r_i \cdot 1_A) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i = m.$$

Por último tomemos $M \in \mathsf{Mod}\text{-}R$. Todos los elementos $m \in M$ podemos ponerlos como $\mu_M(m \otimes 1_R)$, esto prueba que μ_M es suprayectiva. Para ver que es inyectiva tomemos $\sum_{i=1}^n m_i \otimes r_i \in \mathrm{Ker}(\mu_M)$, es decir, $\sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i = 0$, entonces

$$\sum_{i=1}^n m_i \otimes r_i = \sum_{i=1}^n m_i \otimes r_i \cdot 1_R = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i \otimes 1_R = 0 \otimes 1_R = 0.$$

$\square$

DEFINICIÓN 3.14. Denotaremos por $\mathbf{I_D} : \mathsf{DMod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}A$ al funtor inclusión que a cada módulo de $\mathsf{DMod}\text{-}R$ lo lleva a él mismo considerado en $\mathsf{Mod}\text{-}A$.

A veces consideraremos los módulos dentro de $\mathsf{Mod}\text{-}A$ mencionándolo, pero sin utilizar la notación de $\mathbf{I_D}$ para no recargar excesivamente la escritura.

NOTA 3.15. *Sean M_A y N_A dos A-módulos de* DMod-R *y sea f un homomorfismo entre M_A y N_A. Entonces f es un isomorfismo en* DMod-R *si y solo si es un isomorfismo en* Mod-A*.*

Demostración:
La razón es porque DMod-R es una subcategoría plena de Mod-A. □

PROPOSICIÓN 3.16. *Sea $((M_i)_{i\in I}, (\tau_{ij} : M_j \to M_i)_{i\leq j})$ un sistema directo con $M_i \in$* DMod-R *para todo $i \in I$. Entonces $\varinjlim_{i\in I} M_i$ calculado en* Mod-A *pertenece de hecho a* DMod-R*.*

Demostración:
La forma mas rápida de ver esta demostración es teniendo en cuenta que el funtor $-\otimes_A R$ conserva límites directos puesto que tiene un adjunto por la izquierda, por lo tanto si $M_i \otimes_A R \simeq M_i$ para todo $i \in I$, entonces

$$(\varinjlim_{i\in I} M_i) \otimes_A R \simeq \varinjlim_{i\in I} (M_i \otimes_A R) \simeq \varinjlim_{i\in I} M_i$$

Además, la composición de estos isomorfismos es precisamente $\mu_{\varinjlim M_i}$.
□

PROPOSICIÓN 3.17. *Sea $((M_i)_{i\in I}, (\tau_{ij} : M_j \to M_i)_{i\leq j})$ un sistema directo con M_i en* DMod-R *para todo $i \in I$. Entonces $\varinjlim_{i\in I} M_i$ calculado en* Mod-A *es también el límite directo de dichos objetos en la categoría* DMod-R*.*

Demostración:
Puesto que todos los objetos de DMod-R son A-módulos por la derecha y todos los morfismos de DMod-R son también A-homomorfismos, sabemos que $\varinjlim_{i\in I} M_i$ cumple la propiedad universal del límite directo en la categoría DMod-R. Como además pertenece a la categoría, utilizando la unicidad del límite directo deducimos que este ha de ser precisamente el límite directo del sistema. □

NOTA 3.18. *Lo que hemos probado, en otras palabras, es que el funtor $\mathbf{I_D}$:* DMod-$R \to \mathsf{Mod}$-A *conserva límites directos.*

3. Módulos de Torsión y Libres de Torsión

DEFINICIÓN 3.19. Diremos que un A-módulo por la derecha M_A está anulado por R cuando $MR = 0$[2].

EJERCICIO 3.5. La clase de A-módulos por la derecha anulados por R es cerrada para submódulos, productos, coproductos y cocientes.

[2]Denotaremos por MR a las sumas finitas de productos de elementos de M por elementos de A. Decir que $MR = 0$ es equivalente a decir que para todo $m \in M$ y todo $r \in R$, $mr = 0$

Solución:
Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$ un A-módulo anulado por R y K_A un A-submódulo de M_A. Vamos a ver que tanto K_A como M/K son anulados por R.

Sea $k \in K$ y $r \in R$, como k en particular está dentro de M se cumple que $k \cdot r = 0$ en M y por lo tanto también en K, esto implica que $KR = 0$.

Por otro lado sea $m + K \in M/K$ y $r \in R$,

$$(m + K) \cdot r = m \cdot r + K = 0 + K$$

por lo tanto $(M/K)R = 0$.

Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de A-módulos por la derecha anulados por R. Si $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ y $r \in R$, entonces

$$(m_i)_{i \in I} \cdot r = (m_i \cdot r)_{i \in I} = (0)_{i \in I}$$

por lo tanto $(\prod_{i \in I} M_i)R = 0$. El coproducto $\coprod_{i \in I} M_i$ también está anulado por R por ser un A-submódulo del producto. $\square$

Lo que prueba el ejercicio anterior es, con la notación de [**42**, Section VI.1], que la clase de A-módulos a derecha anulados por R es una clase de pretorsión y prelibre de torsión. Lo que nos interesa de momento a nosotros es el hecho de que sea una clase de pretorsión.

Por [**42**, Proposition VI.1.4] sabemos que asociado a una clase de pretorsión existe un prerradical idempotente que sobre un A-módulo M_A se define como el mayor A-submódulo que pertenece a la clase. Vamos a definir un prerradical que probaremos posteriormente que es el prerradical asociado a la clase de módulos anulados por R.

Definición 3.20. Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$, definiremos

$$\mathbf{t}\left(M_A\right) = \{m \in M : mR = 0\}$$

Proposición 3.21. *Para todo A-módulo $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$, $\mathbf{t}\left(M_A\right)$ es el mayor A-submódulo de M_A que está anulado por R.*

Demostración:
Lo primero que se debe comprobar es que $\mathbf{t}\left(M_A\right)$ es efectivamente un A-submódulo de M_A.

Como $0 \in \mathbf{t}\left(M_A\right)$ entonces para todo $m \in \mathbf{t}\left(M_A\right)$, todo $a \in A$ y todo $r \in R$, se tiene que $(m \cdot a) \cdot r = m \cdot (a \cdot r) = 0 \in \mathbf{t}\left(M_A\right)$, por lo tanto $m \cdot a \in \mathbf{t}\left(M_A\right)$.

Sean $m_1, m_2 \in \mathbf{t}\left(M_A\right)$, entonces para todo $r \in R$,

$$(m_1 - m_2) \cdot r = m_1 \cdot r - m_2 \cdot r = 0 - 0 = 0$$

por lo tanto $m_1 - m_2 \in \mathbf{t}\left(M_A\right)$.

Sea K_A un A-submódulo de M_A tal que $KR = 0$, entonces para todo $k \in K$, $kR = 0$. De ahí se deduce que $K \subseteq \mathbf{t}\left(M_A\right)$. $\square$

Definiremos $\mathbf{t}$ sobre A-homomorfismos por restricción, es decir, dado un A-homomorfismo $f : M_A \to N_A$ en $\mathsf{Mod}\text{-}A$, se define

$$\mathbf{t}\left(f\right)\left(m\right) = f(m) \quad \forall m \in M.$$

Con esta definición $\mathbf{t}$ constituye un prerradical idempotente que por la proposición anterior y [**42**, Proposition VI.1.4] es el prerradical idempotente asociado a la clase de pretorsión formada por los A-módulos a derecha anulados por R.

PROPOSICIÓN 3.22. *Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathbf{t}(M_A) = 0$.
2. $\mathrm{Hom}_A(K_A, M_A) = 0$ *para todo A-módulo a derecha K_A anulado por R.*
3. $\forall m \in M_A \quad m \cdot R = 0 \Rightarrow m = 0$.

Demostración:
$(1 \Rightarrow 3)$. Si $m \cdot R = 0$ entonces $m \in \mathbf{t}(M_A)$ y por tanto $m = 0$.

$(3 \Rightarrow 2)$. Sea K_A un A-módulo por la derecha anulado por R y sea $f : K_A \to M_A$ un A-homomorfismo,

$$\forall k \in K, \forall r \in R, f(k) \cdot r = f(k \cdot r) = f(0) = 0$$

y si aplicamos (3) deducimos que para todo $k \in K$, $f(k) = 0$, o lo que es lo mismo, que $f = 0$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Como $\mathbf{t}(M_A)$ está anulado por R, aplicando (2) sabemos que $\mathrm{Hom}_A(\mathbf{t}(M_A), M_A) = 0$, en particular la inclusión canónica

$$j : \mathbf{t}(M_A) \to M_A$$

ha de ser el homomorfismo 0, pero esto es posible únicamente cuando $\mathbf{t}(M_A) = 0$. $\square$

Los A-módulos a derecha que cumplían la condición (3) anterior fueron llamados libres de torsión en la Definición 3.3.

La clase $\mathcal{F}$ de A-módulos por la derecha libres de torsión, es efectivamente una clase libre de torsión con la definición dada en [**42**, Section VI.2], concretamente esta es la clase libre de torsión generada por los A-módulos anulados por R.

DEFINICIÓN 3.23. Un A-módulo a derecha M_A se dirá que es de torsión si $\mathrm{Hom}_A(M_A, F_A) = 0$ para todo $F_A \in \mathcal{F}$. La clase de A-módulos a derecha de torsión se denotará $\mathcal{T}$.

Utilizando [**42**, Section VI.2], la clase $\mathcal{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a los A-módulos anulados por R. El par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ constituye una teoría de torsión en la categoría $\mathsf{Mod}\text{-}A$.

Asociado a la clase de torsión $\mathcal{T}$ existe un radical idempotente que denotaremos $\mathbf{T}$, y que se define para un A-módulo M_A como el mayor A-submódulo de M_A que pertenece a la clase $\mathcal{T}$. Los A-módulos de $\mathcal{T}$ se pueden caracterizar también por la propiedad de que $M_A = \mathbf{T}(M_A)$.

Utilizando que la clase de torsión $\mathcal{T}$ es cerrada para extensiones, [**42**, Proposition VI.2.1], se deduce que $\mathbf{T}(M_A)$ se puede caracterizar también por la propiedad de que $M/\mathbf{T}(M)$ es libre de torsión y que si para algún A-submódulo $K_A \subseteq M_A$ se cumple que M/K es libre de torsión, entonces $K_A \subseteq \mathbf{T}(M_A)$.

En [**42**, Section VI.1] tenemos una construcción de $\mathbf{T}$ a partir de $\mathbf{t}$ que vamos a exponer aquí porque a partir de ella podremos encontrar caracterizaciones de $\mathbf{T}(M_A)$ que utilizaremos a lo largo de esta memoria.

Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$. La construcción se realiza por inducción transfinita del siguiente modo. Denotemos $\mathbf{t}_1(M_A) = \mathbf{t}(M_A)$.

Si α no es un ordinal límite, es decir, si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β, entonces definiremos $\mathbf{t}_\alpha(M_A)$ por la propiedad de que

$$\mathbf{t}(M/\mathbf{t}_\beta(M)) = \mathbf{t}_\alpha(M)/\mathbf{t}_\beta(M)$$

en nuestro caso

$$\mathbf{t}_\alpha(M_A) = \{m \in M_A : mR \subseteq \mathbf{t}_\beta(M_A)\}$$

Si α es un ordinal límite se define

$$\mathbf{t}_\alpha(M_A) = \cup_{\beta<\alpha}\mathbf{t}_\beta(M_A)$$

Esta definición nos proporciona una cadena creciente de prerradicales $\mathbf{t}_\alpha$ que, fijado un $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$, tendrán que estabilizarse, es decir, para todo $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$ existirá un ordinal α tal que $\mathbf{t}_{\alpha+1}(M_A) = \mathbf{t}_\alpha(M_A)$, o lo que es lo mismo, que

$$\mathbf{t}(M/\mathbf{t}_\alpha(M)) = \mathbf{t}_\alpha(M)/\mathbf{t}_\alpha(M) = 0$$

Este $\mathbf{t}_\alpha(M_A)$ es precisamente $\mathbf{T}(M_A)$.

Vamos a establecer una caracterización mas operativa de $\mathbf{T}(M_A)$, es la siguiente

PROPOSICIÓN 3.24. *Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$, entonces*

$$\mathbf{T}(M_A) = \{m \in M : \forall (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } mr_1\cdots r_{n_0} = 0\}$$

Demostración:

Supongamos primero que $m \in \mathbf{T}(M_A)$. Como hemos observado antes, existe un ordinal α para el cual $\mathbf{T}(M_A) = \mathbf{t}_\alpha(M_A)$, por lo tanto $\mathbf{t}_\alpha(M_A) = \mathbf{t}_{\alpha+1}(M_A)$. Sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A. Queremos ver que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mr_1\cdots r_{n_0} = 0$. Para ello supongamos que no es cierto y vamos a construir una cadena descendente de ordinales del siguiente modo:

Como $m \in \mathbf{t}_\alpha(M_A)$, existirá un ordinal mínimo β_0 tal que $m \in \mathbf{t}_{\beta_0}(M_A)$. Para $i = 1, 2, \cdots$ definiremos β_i como el primer ordinal para el cual $mr_1\cdots r_i \in \mathbf{t}_{\beta_i}(M_A)$.

Por nuestra hipótesis de que la sucesión nunca llega a anular a m podemos asegurar que los ordinales β_i no pueden llegar nunca a ser 0. También por la construcción de los $\mathbf{t}_\beta$ cada β_i ha de ser un ordinal sucesor (si β_i fuera un ordinal límite, la contradicción aparecería en el hecho de que $mr_1 \cdots r_i \in \cup_{\gamma<\beta_i} \mathbf{t}_\gamma (M_A)$ pero no existe ningún $\gamma < \beta_i$ tal que $mr_1 \cdots r_i \in \mathbf{t}_\gamma (M_A)$).

Para comparar el ordinal β_i con el ordinal β_{i+1} supongamos que $\beta_i = \gamma + 1$. Claramente $\beta_{i+1} \leq \gamma + 1$, lo que queremos probar es que esta desigualdad es estricta.

Como $mr_1 \cdots r_i \in \mathbf{t}_{\gamma+1} (M_A)$, entonces $mr_1 \cdots r_i R \subseteq \mathbf{t}_\gamma (M_A)$, en particular $mr_1 \cdots r_i r_{i+1} \in \mathbf{t}_\gamma (M_A)$, esto implica que $\beta_{i+1} \leq \gamma < \beta_i$.

Hemos encontrado pues una sucesión estrictamente decreciente de ordinales

$$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \cdots$$

y eso es una contradicción puesto que todo conjunto no vacío de ordinales ha de tener un elemento mínimo.

En el otro sentido supongamos que $m \in \mathbf{T} (M_A) = \mathbf{t}_\alpha (M_A)$. Tenemos que encontrar una sucesión infinita $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que $mr_1 \cdots r_n \neq 0$.

Como $m \notin \mathbf{t}_\alpha (M_A)$ sabemos que $mR \not\subseteq \mathbf{t}_\alpha (M_A)$ (ya que estamos suponiendo que $\mathbf{t}_\alpha (M_A) = \mathbf{t}_{\alpha+1} (M_A)$). Podemos pues encontrar un elemento $r_1 \in R$ tal que $mr_1 \notin \mathbf{t}_\alpha (M_A)$.

Lo que hemos probado en realidad es que para todo $m \notin \mathbf{T} (M_A)$ existe un $r \in R$ tal que $m \cdot r \notin \mathbf{T} (M_A)$. Aplicando esta propiedad recursivamente podemos encontrar una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ tal que $mr_1 \cdots r_n \notin \mathbf{T} (M_A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular $mr_1 \cdots r_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

EJERCICIO 3.6. Sea R' un anillo y ${}_{R'}M_R$ un (R', R)-bimódulo. Demostrar que $\mathbf{T} (M_R)$ con la operación inducida por M, es un (R', R)-bimódulo.

Solución:
De hecho, el único problema que podría aparecer es el de que existiera un $m \in \mathbf{T} (M_R)$ y un $r' \in R'$ tal que $r'm \notin \mathbf{T} (M_R)$, pero esto es imposible ya que si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, entonces por estar $m \in \mathbf{T} (M_R)$ podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mr_1 \cdots r_{n_0} = 0$, pero esto implica que

$$(r'm)r_1 \cdots r_{n_0} = r'(mr_1 \cdots r_{n_0}) = 0$$

lo que prueba que $r'm \in \mathbf{T} (M_R)$ ya que esto lo podemos hacer para cualquier sucesión de elementos de R. □

DEFINICIÓN 3.25. Sea X un subconjunto de A. Diremos que X es un conjunto T-generador por la derecha de A si $R/XR \in \mathcal{T}$.

Es evidente que existen conjuntos T-generadores por la derecha para cualquier anillo R, ya que si tomamos $X = R$, R/R^2 es siempre de torsión al estar anulado por R. En algunos casos será posible tomar un conjunto T-generador mas manejable, en tales casos puede ser de utilidad la siguiente caracterización.

Proposición 3.26. *Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$ y X un subconjunto T-generador por la derecha de A, entonces*

$$\mathbf{T}(M_A) = \{m \in M : \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } mx_1 \cdots x_{n_0} = 0\}.$$

Demostración:
Denotemos momentáneamente

$$K = \{m \in M : \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } mx_1 \cdots x_{n_0} = 0\}.$$

Como $X \subseteq R$, por la proposición anterior sabemos que $\mathbf{T}(M_A) \subseteq K$. Para probar el otro contenido vamos a utilizar la reducción al absurdo.

Sea $m \in M_A \setminus \mathbf{T}(M_A)$. Por la proposición anterior podemos encontrar una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ tal que $kr_1 \cdots r_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $R/XR \in \mathcal{T}$ podemos encontrar un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 \cdots r_{n_1} \in XR$, es decir,

$$r_1 \cdots r_{n_1} = \sum_{i=1}^{t} x^i s^i$$

para ciertos $x^i \in X$ y $s^i \in R$. Además para todo $n \geq n_1$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{t} x_i s^i r_{n_1+1} \cdots r_n \neq 0$$

Si para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$ existiera un $z_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$mx^i s^i r_{n_1+1} \cdots r_{z_i} = 0$$

entonces tomando $n = \max\{z_i : i = 1, \cdots, t\}$ tendríamos que

$$mx^i s^i r_{n_1+1} \cdots r_n = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, t\}$$

y llegaríamos a una contradicción porque

$$\sum_{i=1}^{t} mx^i s^i r_{n_1+1} \cdots r_n \neq 0$$

y alguno de sus sumandos ha de ser no nulo.

De lo anterior deducimos que existe un $i \in \{1, \cdots, t\}$ tal que

$$mx^i s^i r_{n_1+1} \cdots r_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_1.$$

La existencia de la sucesión infinita $(s^i, r_{n_1+1}, r_{n_1+2}, \cdots)$ con la propiedad anterior nos garantiza que $mx^i \notin \mathbf{T}(M_A)$.

Lo que hemos probado en conclusión es que para todo $m \in M_A \setminus \mathbf{T}(M_A)$ existe un $x \in X$ tal que $mx \in M_A \setminus \mathbf{T}(M_A)$.

Aplicando esta propiedad de forma recursiva deducimos que para todo $m \in M \setminus \mathbf{T}(M_A)$ podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $mx_1 \cdots x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $m \notin K$. Esto prueba que $K \setminus \mathbf{T}(M_A) = \varnothing$ y que $K \subseteq \mathbf{T}(M_A)$. $\square$

4. La Categoría CMod-R como Categoría Cociente

Una de las construcciones mas interesantes que se pueden realizar a partir de teorías de torsión en categorías de módulos unitarios para anillos con identidad, es la de categoría cociente. La teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ la hemos considerado dentro de la categoría Mod-A. Vamos a realizar la construcción de la categoría cociente de Mod-A módulo la teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, que veremos que coincide con CMod-R.

Utilizando la caracterización dada en la Proposición 3.24 es trivial ver que la clase de A-módulos de torsión $\mathcal{T}$ es cerrada para submódulos, eso hace que la teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ sea una teoría de torsión hereditaria y que el radical $\mathbf{T}$ sea exacto por la izquierda (ver [**42**, Section VI.3]), esto también se puede deducir a partir de [**42**, Proposition VI.3.3] por el hecho de que la clase de módulos anulados por R es cerrada para submódulos y cocientes.

A partir de [**42**, Theorem VI.5.1] se puede calcular la topología de Gabriel $\mathcal{G}$ asociada a la teoría de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$.

$$\mathcal{G} = \{\mathfrak{a}_A \text{ ideal por la izquierda de } A : A/\mathfrak{a} \in \mathcal{T}\}$$

Vamos a utilizar esta topología de Gabriel para calcular la categoría cociente Mod-$(A, \mathcal{G})$. Esta construcción se puede ver en general en [**42**, Chapter IX].

Dada la topología de Gabriel $\mathcal{G}$, se define en [**42**, Section IX.1] un A-módulo M_A como $\mathcal{G}$-cerrado si para todo ideal $\mathfrak{a} \in \mathcal{G}$, el homomorfismo canónico $\varphi_{\mathfrak{a}}$ es un isomorfismo con la definición dada a continuación:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{\mathfrak{a}}: & M_A & \to & \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, M) \\ & m & \mapsto & \varphi_{\mathfrak{a}}(m) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{\mathfrak{a}}(m): & \mathfrak{a} & \to & M \\ & a & \mapsto & m \cdot a \end{array}$$

La categoría cociente Mod-$(A, \mathcal{G})$ se identifica en [**42**, Section IX.1] con la subcategoría plena de Mod-A formada por los módulos $\mathcal{G}$-cerrados.

Definición 3.27. Sea $M_A \in$ Mod-A. Diremos que M_A es $\mathbf{T}$-inyectivo si para toda sucesión exacta corta en Mod-A

$$0 \longrightarrow X_A \longrightarrow Y_A \longrightarrow Z_A \longrightarrow 0$$

tal que $Z_A \in \mathcal{T}$ y todo A-homomorfismo $f : X_A \to M_A$, existe un A-homomorfismo $g : Y_A \to M_A$ que extiende a f, es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X_A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y_A \arrow[d, "g"] \\ M_A \arrow[r, equal] & M_A \end{tikzcd}$$

Definición 3.28. Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$. Diremos que M_A es $\mathbf{t}$-inyectivo si para toda sucesión exacta corta en $\mathsf{Mod}\text{-}A$

$$0 \longrightarrow X_A \longrightarrow Y_A \longrightarrow Z_A \longrightarrow 0$$

tal que Z_A está anulado por R y todo A-homomorfismo $f : X_A \to M_A$, existe un A-homomorfismo $g : Y_A \to M_A$ que extiende a f, es decir, tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X_A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y_A \arrow[d, "g"] \\ M_A \arrow[r, equal] & M_A \end{tikzcd}$$

Lo mas interesante de estos dos conceptos es que en realidad coinciden.

Proposición 3.29. *Un A-módulo a derecha M_A es $\mathbf{T}$-inyectivo si y solo si es $\mathbf{t}$-inyectivo.*

Demostración:
Como todo A-módulo anulado por R está en $\mathcal{T}$, está claro que todo A-módulo $\mathbf{T}$-inyectivo es $\mathbf{t}$-inyectivo. La dificultad está en la otra dirección.

Supongamos que M_A es $\mathbf{t}$-inyectivo y que tenemos un A-homomorfismo $f : X_A \to M_A$ y una sucesión exacta corta del tipo

$$0 \longrightarrow X_A \xrightarrow{\mu} Y_A \xrightarrow{\eta} Z_A \longrightarrow 0$$

Si α es un ordinal denotaremos

$$X_\alpha = \{y \in Y : \eta(y) \in \mathbf{t}_\alpha (Z_A)\}$$

denotando $\mathbf{t}_0 (Z_A) = 0$. En este caso tenemos que $X_0 \simeq X$. Denotaremos $f_0 : X_0 \to M$ el homomorfismo inducido por el isomorfismo anterior y el homomorfismo $f : X \to M$.

Si $\beta < \alpha$ se tiene que $\mathbf{t}_\beta (Z_A) \subseteq \mathbf{t}_\alpha (Z_A)$ por lo tanto $X_\beta \subseteq X_\alpha$.

Para cada ordinal α vamos a encontrar un A-homomorfismo $f_\alpha : X_\alpha \to M$ cumpliendo la propiedad de que para todo ordinal $\beta < \alpha$, f_α extienda a f_β, es decir, el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_\beta \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "f_\beta"'] & X_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

siendo el homomorfismo entre X_β y X_α la inclusión canónica.

Todos estos homomorfismos los vamos a ir construyendo por inducción transfinita. Empecemos definiendo f_1.

$$X_1 = \{y \in Y : \eta(y) \in \mathbf{t}\,(Z)\}$$

por lo tanto para todo $y \in X_1$ y todo $r \in R$, $\eta(y)r = 0$, es decir $yr \in X_0$. Esto prueba que X_1/X_0 está anulado por A y aplicando la hipótesis de que M_A es $\mathbf{t}$-inyectivo podemos construir $f_1 : X_1 \to M$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{\text{can}} & X_1 \\ {\scriptstyle f_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_1} \\ M & = & M \end{array}$$

sea conmutativo.

Supongamos que hemos encontrado la familia de homomorfismos f_β con las condiciones anteriores para todo ordinal $\beta < \alpha$. Vamos a definir f_α. Se pueden dar dos casos:

Si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β, es decir, si α no es un ordinal límite, tenemos

$$X_\alpha = X_{\beta+1} = \{y \in Y : \eta(y) \in \mathbf{t}_{\beta+1}(Z)\}$$

definiéndose $\mathbf{t}_{\beta+1}(Z)$ a partir de la relación

$$\mathbf{t}(Z/\mathbf{t}_\beta(Z)) = \mathbf{t}_{\beta+1}(Z)/\mathbf{t}_\beta(Z)$$

por lo tanto para todo $y \in X_{\beta+1}$ y todo $r \in R$ se tiene que $\eta(yr) + \mathbf{t}_\beta(Z) = 0$, es decir, $yr \in X_\beta$. Podemos otra vez extender f_β utilizando la propiedad de que M_A es $\mathbf{t}$-inyectivo ya que X_α/X_β está anulado por R. Así encontramos $f_\alpha : X_\alpha \to M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_\beta & \xrightarrow{\text{can}} & X_\alpha \\ {\scriptstyle f_\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ M & = & M \end{array}$$

Si α es un ordinal límite, se tiene que

$$X_\alpha = \{y \in Y : \eta(y) \in \cup_{\beta<\alpha}\mathbf{t}_\beta(Z)\} = \cup_{\beta<\alpha}X_\beta$$

Para definir f_α utilizamos las definiciones de los f_β anteriores definiendo $f_\alpha = \varinjlim_{\beta<\alpha} f_\beta$, es decir, dado un $y \in X_\alpha$ podemos encontrar un $\beta < \alpha$ con $y \in X_\beta$, se define $f_\alpha(y) = f_\beta(y)$.

Por propiedades generales del límite directo se puede ver que esta definición es correcta.

Para concluir, si $Z \in \mathcal{T}$, existe un ordinal α tal que $Z = \mathbf{t}_\alpha(Z)$, entonces definiremos $g = f_\alpha$ ya que $X_\alpha = Y$. $\square$

Proposición 3.30. *Sea $M_A \in$ Mod-A. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M_A \in$ CMod-R.
2. $M_A \in$ Mod-$(A, \mathcal{G})$.
3. M_A *es libre de torsión y* $\mathbf{T}$*-inyectivo.*

Demostración:
$(1 \Rightarrow 3)$.

M_A es libre de torsión porque $\mathbf{t}\left(M_A\right) = \mathrm{Ker}(\lambda_M) = 0$ ya que λ_M es un isomorfismo.

Para ver que M_A es $\mathbf{T}$-inyectivo vamos a ver la condición equivalente de ser $\mathbf{t}$-inyectivo.

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta en Mod-A con $ZR = 0$,

$$0 \longrightarrow X_A \xrightarrow{\alpha} Y_A \xrightarrow{\beta} Z_A \longrightarrow 0$$

y sea $f : X_A \to M_A$ un A-homomorfismo. Vamos a extender la definición de f a todo Y en dos pasos, vamos a empezar definiendo

$$\gamma : Y_A \to \mathrm{Hom}_A(R_A, M_A)$$

del siguiente modo. Sea $y \in Y$ y sea $r \in R$. Como $\beta(y) \in Z$, $\beta(y)r = 0$ por lo que $yr \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$ por lo tanto existe un $x_r \in X$ tal que $\alpha(x_r) = yr$. Por ser α un monomorfismo podemos asegurar que este x_r es único. Así podemos definir de forma unívoca

$$\gamma(y)(r) = f(x_r) \in M_A$$

Sobre esta definición hay que hacer muchas comprobaciones, empezaremos viendo que $\gamma(y) =\in \mathrm{Hom}_A(R_A, M_A)$ para todo $y \in Y$.

Sean $r, s \in R$, $a \in A$,

$$\alpha(x_{r-s}) = y(r - s) = yr - ys = \alpha(x_r - x_s) \Rightarrow x_{r-s} = x_r - x_s$$
$$\gamma(y)(r - s) = f(x_{r-s}) = f(x_r - x_s) = \gamma(y)(r) - \gamma(y)(s)$$

$$\alpha(x_{ra}) = y(ra) = (yr)a = \alpha(x_r)a = \alpha(x_r a) \Rightarrow x_{ra} = x_r a$$
$$\gamma(y)(ra) = f(x_{ra}) = f(x_r a) = f(x_r)a = \gamma(y)(r)a$$

Vamos a probar ahora que $\gamma : Y_A \to \mathrm{Hom}_A(R_A, M_A)$ es un A-homomorfismo. Empecemos viendo que $\gamma(ya) = \gamma(y)a$, es decir, que para todo $r \in R$ se tiene que $\gamma(ya)(r) = (\gamma(y)a)(r)$. Por la definición de la estructura de A-módulo de $\mathrm{Hom}_A(R_A, M_A)$ se tiene que $(\gamma(y)a)(r) = \gamma(y)(ar)$. Por lo tanto lo que tenemos que probar es que $\gamma(ya)(r) = \gamma(y)(ar)$

$$\gamma(ya)(r) = f(v) \text{ con } v \in X, \alpha(v) = (ya)r$$
$$\gamma(y)(ar) = f(w) \text{ con } w \in X, \alpha(w) = y(ar)$$

Como $\alpha(v) = \alpha(w)$, entonces $v = w$ y se tiene la igualdad que buscábamos.

Sean $y_1, y_2 \in Y$. Vamos a ver que

$$\gamma(y_1 - y_2) = \gamma(y_1) - \gamma(y_2)$$

para ello tomemos $r \in R$,

$$\gamma(y_1 - y_2)(r) = f(v) \text{ con } \alpha(v) = (y_1 - y_2)r$$
$$\gamma(y_1)(r) - \gamma(y_2)(r) = f(w_1) - f(w_2) \text{ con } \alpha(w_1) = y_1 r, \alpha(w_2) = y_2 r$$

por tanto $\alpha(v) = \alpha(w_1 - w_2)$ y $v = w_1 - w_2$.

$$\gamma(y_1 - y_2)(r) = f(v) = f(w_1 - w_2) = f(w_1) - f(w_2) =$$
$$\gamma(y_1)(r) - \gamma(y_2)(r) = (\gamma(y_1) - \gamma(y_2))(r)$$

Vamos a comprobar ahora que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_A & \xrightarrow{\alpha} & Y_A \\ f\big\downarrow & & \big\downarrow\gamma \\ M_A & \xrightarrow[\lambda_M]{} & \mathrm{Hom}_A(R_A, M_A) \end{array}$$

Es decir, que para todo $x \in X$, $\gamma(\alpha(x)) = \lambda_M(f(x))$. Como ambos son homomorfismos entre R_A y M_A tenemos que ver que coinciden sobre todos los elementos de R_A.

Sea $r \in R$,

$$\gamma(\alpha(x))(r) = f(z) \text{ con } z \in X, \alpha(z) = \alpha(x)r$$

es decir, $\gamma(\alpha(x))(r) = f(xr) = f(x)r = \lambda_M(x)(r)$.

Utilizando ahora el hecho de que λ_M es un isomorfismo, podemos tomar como $g = \lambda_M^{-1} \circ \gamma$.

$(3 \Rightarrow 2)$.

Sea $\mathfrak{a} \in \mathcal{G}$, tenemos que probar que

$$\varphi_{\mathfrak{a}} : M_A \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, M)$$

es un isomorfismo. Empecemos viendo que es un monomorfismo,

$$\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathfrak{a}}) = \{m \in M_A : m\mathfrak{a} = 0\}$$

Si probáramos que $\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathfrak{a}}) \subseteq \mathbf{T}(M_A)$, podríamos deducir que $\varphi_{\mathfrak{a}}$ es un monomorfismo del hecho de que M_A, es libre de torsión.

Sea $m \in \mathrm{Ker}(\varphi_{\mathfrak{a}})$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $A/\mathfrak{a} \in \mathcal{T}$ y $1_A \in A$, podremos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1_A r_1 r_2 \cdots r_{n_0} \in \mathfrak{a}$$

entonces

$$m r_1 \cdots r_{n_0} = m 1_A r_1 \cdots r_{n_0} \in m\mathfrak{a} = 0$$

lo cual prueba que $m \in \mathbf{T}(M_A)$.

Para probar que $\varphi_{\mathfrak{a}}$ es un epimorfismo, tomemos $f : \mathfrak{a} \to M$ un A-homomorfismo, y consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

Por ser M_A $\mathbf{T}$-inyectivo y $A/\mathfrak{a}$ de torsión, existe un $g : A \to M_A$ que extiende a f. Denotemos $m = g(1_A)$,

$$\forall a \in \mathfrak{a}, f(a) = g(a) = g(1_A a) = g1_A a = ma = \varphi_{\mathfrak{a}}(m)(a)$$

Esto prueba que $f = \varphi_{\mathfrak{a}}(m)$ y que $\varphi_{\mathfrak{a}}$ es suprayectiva.

$(2 \Rightarrow 1)$.

Es trivial porque $R \in \mathcal{G}$ y $\varphi_A : R_A \to \mathrm{Hom}_A(R_A, M_A)$ es precisamente λ_M. $\square$

5. Módulos Unitarios y Módulos Evanescentes

En la Sección 3 estudiamos las consecuencias de que la clase de módulos anulados por R fuera una clase de pretorsión. Tal y como se vió en el Ejercicio 3.5 se probaba también el hecho de que esta clase de módulos es también una clase pre-libre de torsión. En esta sección nos vamos a ocupar de diferentes tipos de módulos que aparecen debido a este hecho.

Por [**42**, Proposition 1.4] sabemos que asociado a una clase pre-libre de torsión, existe un radical que sobre un A-módulo M_A se define como el mayor A-submódulo de M tal que el cociente de M módulo dicho submódulo pertenece a la clase. Vamos a definir el radical que probaremos posteriormente que es el radical asociado a la clase de módulos anulados por R.

Definición 3.31. Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$, definiremos $\mathbf{u}(M_A) = MR = \{$ sumas finitas de productos de elementos de M por elementos de $R\}$.

Ejercicio 3.7. Sea M_A un A-módulo por la derecha, entonces $M/\mathbf{u}(M)$ está anulado por R. Además, si para un cierto A-submódulo N_A de M_A, el módulo cociente M/N está anulado por R, entonces $\mathbf{u}(M) \subseteq N$.

Solución:
Sea $m \in M$ y $r \in R$, $(m + \mathbf{u}(M))r = mr + \mathbf{u}(M) = 0$ ya que $mr \in MR = \mathbf{u}(M)$. Supongamos que M/N está anulado por R, entonces para todo $m \in M$ y todo $r \in R$, $mr + N = 0$, es decir, $mr \in N$ por lo tanto $MR \subseteq N$. $\square$

Proposición 3.32. *Sea $M_A \in \mathsf{Mod}\text{-}A$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathbf{u}(M_A) = M_A$
2. $\mathrm{Hom}_A(M_A, K_A) = 0$ *para todo A-módulo por la derecha K anulado por R.*

Demostración:
$(1 \Rightarrow 2)$. Sea $f : M_A \to K_A$ un A-homomorfismo con $KR = 0$ y $MR = M$, entonces para todo $m \in M$ podemos encontrar elementos $m_i \in M$ y $r_i \in R$ tales que $m = \sum_i m_i r_i$, por lo tanto $f(m) = \sum_i f(m_i)r_i \in KR = 0$ lo que prueba que $f = 0$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Consideremos el módulo M/MR que está anulado por A, si aplicamos (2), la proyección canónica $p : M \to M/MR$ es el morfismo 0, pero esto sucede solo si $M/MR = 0$, es decir, si $M = MR$.

$\square$

Los A-módulos que cumplían la condición anterior fueron llamados unitarios en la Definición 3.12 y la clase de estos módulos se denotó $\mathcal{U}$.

Como $\mathcal{U}$ es la clase de torsión generada por la clase pre-libre de torsión formada por los A-módulos anulados por R, utilizando los resultados de [**42**, Section VI.2] sabemos que es cerrada para cocientes, coproductos y extensiones.

Asociada a esta clase de torsión, existe un radical idempotente que denotaremos $\mathbf{U}$ que dado un A-módulo M_A se define como el mayor A-submódulo unitario de M_A. La definición de $\mathbf{U}$ para morfismos es la restricción, como en todos los casos de prerradicales.

La clase de módulos libres de torsión para este radical idempotente $\mathbf{U}$ se denotará $\mathcal{V}$ y sus módulos los llamaremos evanescentes. En términos de $\mathbf{U}$, diremos que un módulo M_A es evanescente si $\mathbf{U}(M_A) = 0$.

En [**42**, Section VI.1] se da una construcción general de $\mathbf{U}$ a partir de $\mathbf{u}$. Vamos a hacerla aquí para nuestro caso particular.

Sea M_A un A-módulo por la derecha. Definiremos $\mathbf{u}^1(M_A) = MR$. Sea α un ordinal. Si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal definiremos $\mathbf{u}^\alpha(M_A) = \mathbf{u}^\beta(M_A) R$ y si α es un ordinal límite, entonces definiremos $\mathbf{u}^\alpha(M_A) = \cap_{\beta<\alpha}\mathbf{u}^\beta(M_A)$. Para todo módulo M, este proceso debe terminar para algún ordinal, es decir, podemos encontrar un ordinal γ tal que $\mathbf{u}^\gamma(M_A) = \mathbf{u}^{\gamma+1}(M_A)$, por lo tanto $\mathbf{u}^\gamma(M_A)$ es unitario. Se definirá $\mathbf{U}(M_A) = \mathbf{u}^\gamma(M_A)$ (este ordinal γ puede ser diferente para cada módulo M_A).

Vamos a terminar esta parte dando una proposición que en cierto modo dualiza la propiedad de $\mathbf{t}$-inyectividad que cumplen los módulos de CMod-R. En algunos aspectos la categoría DMod-R tiene propiedades duales a las de CMod-R, aunque no de forma general, veremos mas adelante algunas cosas que no se dualizan.

Proposición 3.33. *Sean K_A y L_A dos A-módulos con $K \subseteq L$ y sea $h : D \to L/K$ un homomorfismo con D unitario. Entonces existe un único $g : D\otimes_A \to L$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & L/K \\ {\scriptstyle g}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h} \\ D\otimes_A R & \xrightarrow[\mu_D]{} & D. \end{array}$$

Además, si D está en DMod-R, utilizando que μ_D es un isomorfismo, podemos levantar h a un $f : D \to L$.

Demostración:
Sea $d \in D$ y $r \in R$, $h(d) = l + K$ para un cierto $l \in L$, vamos a definir $\overline{g}(d, r) = lr$. Tenemos que empezar probando que no depende de la elección de l, para ello supongamos que existe un $l' \in L$ tal que $l' + K = l + K$, entonces $l - l' \in K$ y por lo tanto $(l - l')r = 0$ por

lo tanto $lr = lr'$. Supongamos que $d, d' \in D$, para $h(d) = l + K$, $h(d') = l' + K$ entonces $h(d - d') = (l - l') + K$ y por lo tanto para todo $r \in R$, $\overline{g}(d-d', r) = (l-l')r = \overline{g}(d, r) - \overline{g}(d', r)$. Esto prueba que $\overline{g}$ es lineal en la primera variable. La demostración de que es lineal en la segunda variable es una sencilla comprobación. Para probar que es A-equilibrada, consideremos un $d \in D$, $r \in R$ y $a \in A$, como h es un A-homomorfismo, tenemos que si $h(d) = l + K$, entonces $h(da) = la + K$ por lo tanto $\overline{g}(da, r) = (la)r = l(ar) = \overline{g}(d, ar)$.

Lo que deducimos de lo anterior es que podemos definir

$$\begin{array}{rccl} g: & D \otimes_A R & \to & L \\ & d \otimes r & \mapsto & \overline{g}(d, r) \end{array}$$

Con este homomorfismo que hemos definido está claro que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] & L/K \\ D \otimes_A R \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\mu_D"'] & D \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Para concluir vamos a probar la unicidad. Supongamos que existen $g_1, g_2 : D \otimes_A R \to L$ tales que $g_1(d \otimes r) + K = h(dr) = g_2(d \otimes r) + K$, entonces $g_1 - g_2$ es un homomorfismo entre $D \otimes_A R$ y K, que es necesariamente 0 porque $D \otimes_A R$ es unitario y $KR = 0$. $\square$

6. La Independencia del Anillo Ambiente

A lo largo de este tema hemos construido una serie de categorías dentro de la categoría Mod-A donde A es un anillo con identidad del cual R es un ideal bilátero. Al principio del tema afirmábamos que las construcciones iban a ser independientes de esta elección, esto es cierto en parte, es decir, las clases de módulos $\mathcal{T}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ no son independientes de esta elección, las que si son independientes de esta elección son las categorías CMod-R, DMod-R, R-CMod y R-DMod. Este es el resultado que vamos a probar aquí. Veremos también que existe otra categoría independiente de esta elección que definimos a continuación.

Definición 3.34. Llamaremos Mod-R a la subcategoría plena de Mod-A formada por los módulos M unitarios y libres de torsión, es decir, aquellos que cumplen que $MR = M$ y que para todo $m \in M$, si $mR = 0$ entonces m ha de ser 0.

Proposición 3.35. *Sea ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ la extensión de Dorroh de R y A otro anillo con identidad del cual R es un ideal bilátero, y supongamos que las categorías CMod-R DMod-R, Mod-R, R-CMod, R-DMod y R-Mod han sido construidas considerando que todos los módulos son ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-módulos unitarios. Entonces*

1. CMod-R *es la subcategoría plena de* Mod-A *formada por todos los módulos* M *tales que* $\mathrm{Hom}_A(R, M)$ *es canónicamente isomorfo a* M.
2. DMod-R *es la subcategoría plena de* Mod-A *formada por todos los módulos* M *tales que* $M \otimes_A R$ *es canónicamente isomorfo a* M.
3. Mod-R *es la subcategoría plena de* Mod-A *formada por todos los módulos* M *tales que* $MR = M$ *y para todo* $m \in M$, $mR = 0$ *implica que* $m = 0$.

Y lo mismo para las categorías por la izquierda[3].

Demostración:
(1.1). Sea $M \in \mathsf{CMod}$-R, tenemos que dotar a M de estructura de A-módulo, para ello tomemos $a \in A$ y $m \in M$, tenemos que definir ma, para ello consideremos el R-homomorfismo $\lambda_M(m) : R \to M$ que a cada $r \in R$ lo lleva a mr, claramente A es un R-módulo y $A/R \in \mathcal{T}$ como R-módulo, por lo tanto $\lambda_M(m)$ se extiende a todo A de forma única, y podemos definir $ma = \lambda_M(m)(a)$.

Es sencillo ver que con esta operación M adquiere estructura de A-módulo y que esta estructura extiende a la de R-módulo. Tenemos que comprobar que M es un A-módulo unitario, es decir, que $m1_A = m$ para ello consideremos el elemento $m1_A - m \in M$, si multiplicamos este elemento por cualquier $r \in R$, $(m1_A - m)r = (m1_A)r - mr = m(1_A r) - mr = 0$ por lo tanto $m1 - m \in \mathbf{t}(M) = 0$ y entonces $m1_A = m$.

Esta estructura es además única, para ello supongamos que podemos definir dos estructuras de A-módulo que extienden a la estructura de A-módulo, vamos a utilizar para las dos multiplicaciones $\circ$ y $*$, $(m \circ a - m * a)r = m(ar) - m(ar) = 0$ por lo tanto $m \circ a - m * a \in \mathbf{t}(M) = 0$ y entonces $m \circ a = m * a$.

(1.2). Vamos a ver que si $M \in \mathsf{CMod}$-R, con esta estructura de A-módulo que le hemos dado, cumple que $\mathrm{Hom}_A(R, M) \simeq M$, para ello consideremos el homomorfismo canónico $\lambda_M^A : M \to \mathrm{Hom}_A(R, M)$ que a cada m lo lleva a $\lambda_M^A(m) : R \to M$ definido por $\lambda_M^A(m)(r) = mr$. Si $m \in \mathrm{Ker}(\lambda_M^A)$, entonces $mR = 0$ y por lo tanto $m = 0$ por estar $M \in \mathsf{CMod}$-R. Por el otro lado supongamos que tenemos un A-homomorfismo $f : R \to M$. Este A-homomorfismo es claramente un ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-homomorfismo puesto que saca los elementos de R y de $\mathbb{Z}$ fuera, y por lo tanto existe un $m \in M$ tal que para todo $r \in R$, $f(r) = mr$.

Supongamos ahora en la otra dirección que tenemos un A-módulo unitario tal que $\mathrm{Hom}_A(R, M) \simeq M$ con el homomorfismo canónico, vamos a ver que $\mathrm{Hom}_R(R, M) \simeq M$. Para ello consideremos los dos homomorfismos canónicos $\lambda_M^A : M \to \mathrm{Hom}_A(R, M)$ y $\lambda_M : M \to$

[3]Esta independencia en el caso de las categorías DMod-R, R-DMod, CMod-R y R-CMod es citado en [**37**]

$\mathrm{Hom}_R(R, M)$. Sabemos que λ_M^A es un isomorfismo y queremos probar que λ_M también lo es. Para ello supongamos que $m \in \mathrm{Ker}(\lambda_M)$ entonces para todo $r \in R$, $mr = 0$ y por lo tanto $m \in \mathrm{Ker}(\lambda_M^A) = 0$. Por otro lado supongamos que tenemos un $f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$, vamos a probar que f es también un A-homomorfismo, para ello consideremos $r \in R$ y $a \in A$, $f(ra) - f(r)a$ tenemos que probar que es cero, para ello sea $\bar{r} \in R$, $f(ra)\bar{r} - f(r)a\bar{r} = f((ra)\bar{r}) - f(r(a\bar{r})) = 0$ esto prueba que $f(ra) - f(r)a \in \mathrm{Ker}(\lambda_M^A) = 0$. Como f es un A-homomorfismo sea $m = (\lambda_M^A)^{-1}(f)$, $f(r) = mr$ para todo $r \in R$ y por lo tanto $\lambda_M(m) = f$ tal y como queríamos probar.

(1.3). Tenemos que probar por último que si $M, N \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, $\mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Una de las direcciones es evidente, puesto que $R \subseteq A$ todo A-homomorfismo es un R-homomorfismo. En la otra dirección sea $f : M \to N$ un R-homomorfismo y sean $m \in M$, $a \in A$, $f(ma) - f(m)a$ es necesariamente 0 puesto que multiplicado por cualquier elemento de r da 0 y N es libre de torsión.

(2.1). Sea ahora $M \in \mathsf{DMod}\text{-}R$, tenemos que dotar a M de estructura de A-módulo, para ello sea $m \in M$ y $a \in A$, $m = \sum_i m_i r_i$, por lo tanto podemos definir $ma = (\sum_i m_i r_i)a = \sum_i m_i(r_i a)$, operación que está definida puesto que $r_i a \in R$. El problema de esta definición es que puede depender de la elección que hemos hecho para poner $m = \sum_i m_i r_i$. Para comprobar la independencia de esta elección supongamos que $0 = \sum_\delta m_\delta y_\delta$ donde $\{y_\delta : \delta \in \Delta\}$ es un conjunto generador de R por la izquierda sobre el anillo ${}^{\mathbb{Z}\times}R$, entonces $\sum_\delta m_\delta y_\delta = 0$ implica que $\sum_\delta m_\delta \otimes y_\delta = 0$ en $M \otimes_{{}^{\mathbb{Z}\times}R} R$ y entonces podemos aplicar la Proposición 1.58 y encontrar elementos $d_\delta^k \in {}^{\mathbb{Z}\times}R$ con $k = 1, \cdots, n$ casi todos nulos, y $m_1, \cdots, m_n \in M$ tales que

$$\sum_\delta d_\delta^k y_\delta = 0 \quad \forall k$$

$$m_\delta = \sum_k m_k d_\delta^k \quad \forall \delta$$

Esto hace que podamos escribir

$$\sum_\delta m_\delta(y_\delta a) = \sum_{k,\delta} m_k d_\delta^k (y_\delta a) =$$

$$\sum_{k,\delta} m_k(d_\delta^k y_\delta a) = \sum_k m_k((\sum_\delta d_\delta^k y_\delta)a) = 0$$

El hecho de tomar y_δ como un conjunto generador no es restrictivo puesto que cualquier subconjunto de R lo podemos extender a un conjunto generador añadiendo los elementos $m_\delta = 0$ que sean necesarios.

De este mismo modo se demuestra que la definición que hemos dado es la única posible que extiende a la multiplicación por elementos de R.

(2.2). Sea M a la vez un A-módulo y un ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-módulo unitario tal que para todo $r \in R$ y todo $m \in M$ la multiplicación mr sea la misma multiplicando como A-módulo o como R-módulo. Sean $\mu_M^A : M \otimes_A R \to M$ y $\mu_M : M \otimes_R R \to M$ los dos homomorfismos canónicos, lo que tenemos que probar es que μ_M^A es un isomorfismo si y solo si μ_M es un isomorfismo. Puesto que $\mathrm{Im}(\mu_M^A) = MR = \mathrm{Im}(\mu_M)$ tenemos que μ_M^A es epimorfismo si y solo si μ_M es epimorfismo. Vamos a verlo también para los monomorfismos. Supongamos μ_M monomorfismo. Sea $\{y_\delta : \delta \in \Delta\}$ un conjunto generador por la izquierda de R sobre el anillo ${}^{\mathbb{Z}\times}R$ y $\sum_\delta m_\delta \otimes y_\delta \in \mathrm{Ker}(\mu_M)$, entonces $\sum_\delta m_\delta y_\delta = 0$ y por lo tanto $\sum_\delta m_\delta \otimes y_\delta \in \mathrm{Ker}(\bar{\mu}_M) = 0$ aplicando la Proposición 1.58 podemos encontrar elementos $d_\delta^k \in {}^{\mathbb{Z}\times}R$ casi todos nulos con $k = 1, \cdots, n$ y elementos $\bar{m}_1, \cdots, \bar{m}_n \in M$ tales que

$$\sum_\delta d_\delta^k y_\delta = 0 \quad \forall k$$

$$m_\delta = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k d_\delta^k \quad \forall \delta$$

Entonces

$$\sum_\delta m_\delta \otimes y_\delta = \sum_\delta \sum_{k=1}^n \bar{m}_k d_\delta^k \otimes y_\delta$$

Puesto que $\bar{m}_k \in M = MR$ podemos encontrar $\tilde{m}_{kt}$ y $\tilde{r}_{kt} \in M$ tales que $\bar{m}_k = \sum_t \tilde{m}_{kt}\tilde{r}_{kt}$, por lo tanto

$$\sum_\delta \sum_{k=1}^n \bar{m}_k d_\delta^k \otimes y_\delta = \sum_\delta \sum_{k=1}^n \sum_t \tilde{m}_{kt}\tilde{r}_{kt} d_\delta^k \otimes y_\delta$$

Ahora los $r_{kt} d_\delta^k \in R^{\mathbb{Z}\times}R = R \subseteq A$ y podemos pasarlos a través del producto tensorial $M \otimes_A R$ y deducir

$$\sum_\delta \sum_{k=1}^n \sum_t \tilde{m}_{kt}\tilde{r}_{kt} d_\delta^k \otimes y_\delta =$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_t \tilde{m}_{kt} \otimes \sum_\delta \tilde{r}_{kt} d_\delta^k y_\delta = 0$$

En la otra dirección la demostración es entéramente análoga, lo único es que en este otro caso los elementos d_δ^k estarían en A, pero igualmente $r_{kt} d_\delta^k \in RA = R$ y podemos pasarlos a través del producto tensorial $M \otimes_R R$, obteniendo la misma conclusión.

(2.3). Sean $M, N \in \mathsf{DMod}\text{-}R$, tenemos que comprobar que $\mathrm{Hom}_R(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Por estar $R \subseteq A$, todo A-homomorfismo es un R-homomorfismo, veamos la otra dirección, supongamos que $f : M \to N$ es un R-homomorfismo y sea $m \in M, a \in A$, si ponemos $m = \sum m_i r_i$

$$f(ma) = \sum_i f(m_i r_i a) = \sum_i f(m_i) r_i a = \sum_i f(m_i r_i) a = f(m) a$$

(3.1) En el último caso supongamos que $M \in \mathsf{Mod}\text{-}R$, tenemos que definir la multiplicación de $m \in M$ por $a \in A$, para ello utilicemos que $M = MR$ y pongamos $m = \sum_i m_i r_i$ y definamos $ma = \sum_i m_i(r_i a)$, de nuevo tenemos que comprobar la independencia de esta elección, y para ello supongamos que $0 = \sum_i m_i r_i$ y queremos ver si $\sum_i m_i(r_i a) = 0$. Sea $r \in R$ cualquiera,

$$(\sum_i m_i(r_i a))r = \sum_i m_i((r_i a)r) =$$
$$\sum_i m_i(r_i(ar)) = (\sum_i m_i r_i)(ar) = 0$$

y por lo tanto $\sum_i m_i(r_i a) \in \mathbf{t}\,(M) = 0$ que era lo que queríamos probar. Esta definición además ha de ser la única que extienda a la multiplicación por elementos de R.

(3.2). Puesto que las condiciones de ser unitario y libre de torsión están definidas en términos exclusivos de R, dado un módulo M con estructura de R-módulo y A-módulo siendo esta última estructura compatible con la de R-módulo, $M \in \mathsf{Mod}\text{-}R$ si y solo si $MR = M$ y para todo $m \in M$, $mR = 0$ implica $m = 0$.

(3.3). Sean $M, N \in \mathsf{Mod}\text{-}R$, vamos a ver que $\mathrm{Hom}_R(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Como antes todo A-homomorfismo es un R-homomorfismo. En la otra dirección la demostración es idéntica al caso de $\mathsf{DMod}\text{-}R$.

Puesto que la condición de que R sea un ideal bilátero de A es simétrica a izquierda y derecha, la demostración de que los módulos de R-DMod, R-CMod y R-Mod tienen estructura canónica de A-módulos, se hace por simetría. $\square$

7. Una Visión Mas General

Vamos en esta sección a generalizar el hecho de que las categorías puedan ser construidas dentro de una cierta categoría de módulos unitarios para un anillo con identidad. Estos resultados van a generalizar a los de la sección anterior.

Vamos a fijar en esta sección, un anillo R, un anillo con identidad B, un homomorfismo de anillos $\beta : R \to B$ tal que $\mathrm{Ker}(\beta)$ y $\mathrm{Coker}(\beta)$, con su estructura de R-módulos por la derecha, sean de torsión. Las categorías $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y R-DMod, que son las que vamos a considerar, supondremos que están construidas dentro de $\mathsf{Mod}\text{-}^{\mathbb{Z}\times}R$ y $^{\mathbb{Z}\times}R$-Mod respectivamente. En estas condiciones todos los B-módulos tienen estructura de R-módulos a través de β.

Cuando hablemos de B-módulos, nos referiremos a B-módulos unitarios.

PROPOSICIÓN 3.36. *Sea ${}_RM_E$ un (R,E)-bimódulo para cierto anillo E tal que ${}_RM$ está en R-*DMod*. Sea N_E un E-módulo por la derecha, entonces $\mathrm{Hom}_E(M_E,N_E)$ está en la categoría* CMod*-R con la estructura de R-módulo inducida por la de M.*

Demostración:
Para simplificar un poco la escritura vamos a denotar $H=\mathrm{Hom}_E(M_E,N_E)$. La estructura de R-módulo de H viene dada de la siguiente forma

$$(hr)(m)=h(rm)\quad \forall h\in H, r\in R, m\in M.$$

Vamos a empezar viendo que el homomorfismo canónico $\mu_M : R\otimes_R M\to M$ es un E-isomorfismo. Para ello solo tenemos que ver que es un E-homomorfismo puesto que ya es biyectivo por ser un R-isomorfismo.

La estructura de E-módulo de $R\otimes_R M$ viene dada por la fórmula

$$(r\otimes m)e := r\otimes (me)$$

por lo tanto, para todo $m\in M$ y todo $r\in R$,

$$\mu_M(r\otimes m)e=(rm)e=r(me)=\mu_M(r\otimes me)=\mu_M((r\otimes m)e).$$

Consideremos ahora el homomorfismo canónico

$$\lambda_H : H\to \mathrm{Hom}_R(R,H)$$

que tenemos que probar que es un isomorfismo. Si $h\in\mathrm{Ker}(\lambda_H)$ entonces para todo $r\in R$ y todo $m\in M$ se tiene que $h(rm)=0$ por lo tanto $h(M)=h(RM)=0$. Ésto prueba que λ_H es un monomorfismo. Para ver que es un epimorfismo, consideremos un R-homomorfismo $f:R\to H$, sea

$$\begin{array}{rccc}\tilde f: & R\otimes_R M & \to & N\\ & r\otimes m & \mapsto & f(r)(m).\end{array}$$

Con esta definición $\tilde f$ es claramente un R-homomorfismo y un E-homomorfismo. Si componemos con μ_M^{-1} obtenemos

$$\tilde f\circ\mu_M^{-1} : M\to N$$

Vamos a calcular $\lambda_H(\tilde f\circ\mu_M^{-1})$. Sea $r\in R$, $m\in M$,

$$\lambda_H(\tilde f\circ\mu_M^{-1})(r)(m)=(\tilde f\circ\mu_M^{-1})(rm)=\tilde f(r\otimes m)=f(r)(m)$$

por lo tanto $\lambda_H(\tilde f\circ\mu_M^{-1})=f$ lo cual prueba la suprayectividad de λ_H.
□

LEMA 3.37. *Sea Z un grupo abeliano, $N_R\subseteq M_R$ dos R-módulos por la derecha, ${}_RW$ un R-módulo por la izquierda unitario y $h:M\times W\to Z$ una aplicación bilineal y R-equilibrada tal que para todo $n\in N$ y todo $w\in W$, $h(n,w)=0$. Entonces para todo $m+N\in\mathbf{T}(M/N)$ y todo $w\in W$, se tiene que $h(m,w)=0$.*

Demostración:
Supongamos por reducción al absurdo que existe un $m \in M$ tal que $m + N \in \mathbf{T}(M/N)$ y un $w \in W$ tal que $h(m, w) \neq 0$.

Como $w \in W = RW$ podemos encontrar $w_i \in W$ y $r_i \in R$ tales que $w = \sum r_i w_i$. Como $h(m, w) \neq 0$, podremos encontrar un i tal que $h(m, r_i w_i) \neq 0$. Lo que hemos probado pues, es que para todo w con $h(m, w) \neq 0$ podemos encontrar un $r' \in R$ y un $w' \in W$ tal que $h(mr', w') \neq 0$.

Realizando este proceso de forma recursiva, podemos encontrar sucesiones $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $h(mr_1 \cdots r_n, w_n) \neq 0$. Pero ésto sería una contradicción porque como $m + N \in \mathbf{T}(M/N)$ podremos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mr_1 \cdots r_{n_0} \in N$ y por lo tanto $h(mr_1 \cdots r_{n_0}, w_{n_0}) = 0$ contradiciendo lo anterior. □

Proposición 3.38. *Sea M_R un módulo de* CMod-R*, entonces M_R tiene una única estructura de B-módulo por la derecha que extiende a la de R-módulo.*

Demostración:
Sea $m \in M$, este elemento nos determina un homomorfismo

$$\lambda_M(m) : R \to M$$

Utilizando que $\beta : R \to B$ considerado como R-homomorfismo de módulos por la derecha tiene núcleo y conúcleo de torsión, podremos extender de forma única el homomorfismo $\lambda_M(m)$ a un homomorfismo

$$\overline{\lambda}_M(m) : B \to M$$

La unicidad de este levantamiento hace que $\overline{\lambda}_M$ sea lineal, por lo tanto $\overline{\lambda}_M$ nos permite dotar a M de estructura de B-módulo. Además este módulo es B-unitario, ya que para todo $m \in M$ y todo $r \in R$,

$$(\overline{\lambda}_M(m)(1_B))r = \overline{\lambda}_M(m)(r^\beta) = mr$$

y de ahí deducimos que $\overline{\lambda}_M(m)(1_B) - m \in \mathbf{t}(M_R) = 0$.

Si M tuviera otra estructura de B-módulo que extendiera a la estructura de R-módulo, entonces tendríamos para cada $m \in M$ un homomorfismo $f_m : B \to M$ dado por $f_m(b) = mb$, pero como esta estructura extiende a la de R-módulo, entonces $f_m(r) = mr = \lambda_M(m)(r)$ y por lo tanto $f_m = \overline{\lambda}_M$ por ser único el levantamiento. □

Proposición 3.39. *Sean M_R, N_R dos R-módulos por la derecha que tienen además una estructura de B-módulos por la derecha que extiende a la de R-módulos. Supongamos que N_R es R-libre de torsión. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_R(M_R, N_R) = \mathrm{Hom}_B(M_B, N_B).$$

En particular, ésto es cierto para todo par de módulos de CMod-R.

Demostración:
Todo B-homomorfismo es un R-homomorfismo porque $R^\beta \subseteq B$ y la estructura de B-módulo extiende a la de R-módulo. Recíprocamente supongamos que $f : M_R \to N_R$ es un R-homomorfismo, $m \in M$, $b \in B$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$,

$$f(mb)r_1 \cdots r_n = f((mb)r_1 \cdots r_n) = f(m(br_1 \cdots r_n))$$

Como B/R^α es de torsión como R-módulo por la derecha, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n_0$, $ar_1 \cdots r_k \in R^\beta$ y por lo tanto

$$f(mb)r_1 \cdots r_k = f(m(br_1 \cdots r_k)) = f(m)(br_1 \cdots r_k) = (f(m)b)r_1 \cdots r_k$$

de donde deducimos que $f(mb) - f(m)b \in \mathbf{T}(N_R) = 0$ para todo $m \in M$ y todo $b \in B$, por lo tanto f es un B-homomorfismo. □

PROPOSICIÓN 3.40. *Sea ${}_RM \in R$-DMod. Entonces ${}_RM$ tiene una única estructura de B-módulo unitario que extiende la de R-módulo.*

Demostración:
Utilizando la Proposición 3.36 sabemos que $\mathrm{BiEnd}({}_RM)$ está en CMod-R. Consideremos el homomorfismo

$$\alpha : R \to \mathrm{BiEnd}({}_RM)$$

dado por la multiplicación por elementos de R. Éste es un homomorfismo de anillos pero también de R-módulos por la derecha.

Como $\mathrm{Ker}(\beta)$ es de torsión y $\mathrm{BiEnd}({}_RM)$ es libre de torsión, tenemos que $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(\beta), \mathrm{BiEnd}({}_RM)) = 0$ y por lo tanto podemos factorizar α por este núcleo y considerar la estructura de R-módulo como

$$\overline{\alpha} : R/\mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{BiEnd}({}_RM).$$

Éste es un homomorfismo de R-módulos por la derecha, pero como $\mathrm{Ker}(\beta)$ es un ideal de R, $R/\mathrm{Ker}(\beta)$ es un anillo, y $\overline{\alpha}$ es un homomorfismo de anillos porque

$$\overline{\alpha}((r + \mathrm{Ker}(\beta))(s + \mathrm{Ker}(\beta))) = \overline{\alpha}(rs + \mathrm{Ker}(\beta)) =$$

$$\alpha(rs) = (rs)^\alpha = r^\alpha s^\alpha = \overline{\alpha}(r + \mathrm{Ker}(\beta))\overline{\alpha}(s + \mathrm{Ker}(\beta)).$$

Utilizando por último que $\mathrm{BiEnd}({}_RM) \in \mathsf{CMod}$-$R$ y que $\mathrm{Coker}(\beta)$ es de torsión, podemos extender el homomorfismo anterior a un R-homomorfismo

$$\hat{\alpha} : B \to \mathrm{BiEnd}({}_RM)$$

Por la Proposición 3.39 este R-homomorfismo es también un B-homomorfismo con la estructura canónica de B-homomorfismo que tiene $\mathrm{BiEnd}({}_RM)$ por estar en CMod-R. Además $\hat{\alpha}$ es un homomorfismo de anillos, ya que si $b, c \in B$, y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, entonces

$$(\hat{\alpha}(b)\hat{\alpha}(c) - \hat{\alpha}(bc))r_1 \cdots r_n = \hat{\alpha}(b)\hat{\alpha}(cr_1 \cdots r_n) - \hat{\alpha}(bcr_1 \cdots r_n).$$

Como B/R^β es de torsión como R-módulo por la derecha, podremos encontrar un n_0 tal que $cr_1\cdots r_{n_0}\in R^\beta=R/\mathrm{Ker}(\alpha)$ y por lo tanto

$$\hat\alpha(b)\hat\alpha(cr_1\cdots r_{n_0})-\hat\alpha(bcr_1\cdots r_{n_0})=\hat\alpha(b)(cr_1\cdots r_{n_0})-\hat\alpha(bcr_1\cdots r_{n_0})=0.$$

Ésto prueba que

$$\hat\alpha(b)\hat\alpha(c)-\hat\alpha(bc)\in\mathbf{T}\left(\mathrm{BiEnd}({}_RM)\right)=0$$

y por lo tanto que $\hat\alpha$ es un homomorfismo de anillos y que ${}_RM$ tiene una estructura de B-módulo que extiende a su estructura de R-módulo.

Vamos a ver también que es unitario, para ello no tenemos mas que darnos cuenta de que $\hat\alpha(1_B)=1_{\mathrm{BiEnd}(M)}$, pero esto es trivial ya que la diferencia entre los dos multiplicada por cualquier elemento de R es 0, y por lo tanto está en $\mathbf{t}\left(\mathrm{BiEnd}({}_RM)\right)=0$.

Para comprobar que esta estructura es única supongamos que existe otro homomorfismo de anillos $\tilde\alpha:B\to\mathrm{BiEnd}({}_RM)$ tal que $\hat\alpha\circ\beta=\alpha=\tilde\alpha\circ\beta$. Estos homomorfismos de anillos serían en particular homomorfismos de R-módulos por la derecha, pero por la igualdad anterior $\hat\alpha-\tilde\alpha$ factorizaría a través del conúcleo de β que es de torsión como R-módulo por la derecha. Entonces como $\mathrm{BiEnd}({}_RM)$ es libre de torsión, concluimos que $\hat\alpha=\tilde\alpha$. □

Proposición 3.41. *Sean ${}_RM$ y ${}_RN$ dos R-módulos por la izquierda que tienen además una estructura de B-módulos unitarios que extiende a la estructura de R-módulo. Supongamos además que $RM=M$. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_R({}_RM,{}_RN)=\mathrm{Hom}_B({}_BM,{}_BN).$$

En particular ésto es cierto para todos los módulos de R-DMod.

Demostración:
Como la estructura de B-módulos es compatible con la de R-módulos, está claro que todo B-homomorfismo entre ellos va a ser también un R-homomorfismo. El problema está en la otra dirección. Supongamos que $f\in\mathrm{Hom}_R({}_RM,{}_RN)$. Consideremos el siguiente homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{array}{rccc} h: & B\otimes_R M & \to & N \\ & b\otimes m & \mapsto & (bm)f-b(m)f \end{array}$$

Para todos los elementos de R^β tenemos que $h(r^\beta\otimes m)=(rm)f-r(m)f=0$ por lo tanto, utilizando el Lema 3.37 deducimos que $h(b\otimes m)=0$ para todo $b\in B$ y todo $m\in M$, es decir, que f es un B-homomorfismo. □

Hasta ahora lo que hemos probado es las categorías CMod-R y R-DMod son subcategorías plenas de Mod-B y B-Mod respectivamente. Vamos a ver que dentro de estas categorías se pueden caracterizar también por propiedades similares a las que nos sirvieron para definirlas dentro de Mod-A y A-Mod.

PROPOSICIÓN 3.42. *Utilizando la única estructura de B-módulos que extiende su estructura de R-módulos, la categoría* CMod-R *se puede identificar con la subcategoría plena de* Mod-B *formada por los B-módulos M tales que el homomorfismo*[4]

$$\begin{array}{rccc} \lambda_M^B: & M & \to & \mathrm{Hom}_B(RB_B, M_B) \\ & m & \mapsto & \lambda_M^B(m) \end{array}$$

con $\lambda_M^B(m)(rb) = mrb$, es un isomorfismo.

Demostración:
Lo que tenemos que probar es que $\lambda_M : M \to \mathrm{Hom}_R(R_R, M_R)$ es un isomorfismo si y solo si λ_M^B es un isomorfismo.

Por un lado tenemos que

$$\mathrm{Ker}(\lambda_M^B) = \{m \in M : mrb = 0 \forall r \in R, b \in B\}$$

pero como $1_B \in B$, tenemos que

$$\mathrm{Ker}(\lambda_M^B) = \{m \in M : mr = 0 \forall r \in R\} = \mathrm{Ker}(\lambda_M)$$

por lo tanto tenemos que λ_M es un monomorfismo si y solo si λ_M^B es un monomorfismo.

Supongamos pues que ambos son monomorfismos. Vamos a probar que uno de ellos es suprayectivo si y solo si lo es el otro.

Supongamos que λ_M es suprayectivo y consideremos $f : RB_B \to M_B$. Definamos $\overline{f} : R \to M$ dado por $\overline{f}(r) = f(r1_B)$. Como 1_B conmuta con los elementos de R, tenemos que $\overline{f}$ es un R-homomorfismo, por lo que podemos encontrar un $m \in M$ tal que $f(r1_B) = mr$ para todo $r \in R$. Sea $b \in B$, $r \in R$, y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de R,

$$(f(rb) - mrb)r_1 \cdots r_n = f(rbr_1 \cdots r_n) - mrbr_1 \cdots r_n.$$

Para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tendremos que $br_1 \cdots r_{n_0} \in R^\beta$ y por lo tanto

$$f(rbr_1 \cdots r_{n_0}) - mrbr_1 \cdots r_{n_0} = 0$$

de donde deducimos que $f(rb) - mrb \in \mathbf{T}(M_R) = 0$ y por lo tanto $f(rb) = mrb$ para todo $r \in R$ y todo $b \in B$.

Supongamos por otro lado que λ_M^B es suprayectivo y consideremos $f : R_R \to M_R$ un R-homomorfismo. Vamos a definir $\overline{f} : RB_B \to M_B$ dado por $\overline{f}(rb) = f(r)b$ para todo $r \in R$ y todo $b \in B$. Tenemos que ver que es una buena definición, para ello supongamos que $\sum_{i=1}^k r_i b_i = 0$ con $r_i \in R$ y $b_i \in B$. Entonces $\sum_{i=1}^k f(r_i)b_i = 0$ ya que está en

[4] Este es un homomorfismo de R-módulos, pero no de B-módulos puesto que si $b, c \in B$, $r \in R$ no se tiene porque dar que $brc \in RB$. Esta propiedad generaliza el caso en el que A es un anillo con identidad en el que R es un ideal bilátero considerando el homomorfismo de anillos dado por la inclusión canónica. En tal caso $RA = R$ y el homomorfismo λ_M es de A-módulos. La posible dificultad que viene del hecho de que $\mathrm{Hom}_B(RB_B, M_B)$ no tenga estructura de B-módulo se soluciona en el caso en que λ_M^B sea un isomorfismo, porque entonces la estructura de B-módulo de M se lleva a $\mathrm{Hom}_B(RB_B, M_B)$.

$\mathbf{T}(M_R) = 0$. La prueba de que está en $\mathbf{T}(M_R)$ se hace tomando una sucesión arbitraria $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en R y viendo que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos los b_i se tenga que $b_i s_1 \cdots s_{n_0} \in R^\beta$, entonces se tendrá que

$$\sum_{i=1}^{k} f(r_i) b_i s_1 \cdots s_{n_0} = f(\sum_{i=1}^{k} r_i b_i s_1 \cdots s_{n_0}) = 0.$$

Para este homomorfismo $\overline{f}$ podremos encontrar un $m \in M$ tal que para todo $r \in R$, y todo $b \in B$, $\overline{f}(rb) = mrb$, en particular para todo $r \in R$ tendremos que

$$f(r) = f(r)1_B = \overline{f}(r1_B) = mr1_B = mr$$

con lo que λ_M es suprayectiva. □

Si consideramos la clase de R-módulos de torsión $\mathcal{T}$, la clase de módulos que están en Mod-B y en $\mathcal{T}$ es una clase de torsión en la categoría Mod-B ya que Mod-B es cerrada para todo tipo de límites. Vamos a ver lo que pasa con la clase de módulos libres de torsión.

Lema 3.43. *Sea M_B un B-módulo. Entonces M considerado con su estructura de R-módulo es libre de torsión si y solo si para todo B-módulo $T \in \mathcal{T}$, $\mathrm{Hom}_B(T, M) = 0$.*

Demostración:
En una dirección es trivial, ya que si T_B es un B-módulo, en particular es un R-módulo con la estructura inducida y si $T \in \mathcal{T}$, entonces $\mathrm{Hom}_R(T, M) = 0$ y por lo tanto $\mathrm{Hom}_B(T, M) = 0$ ya que todo B-homomorfismo es un R-homomorfismo.

En el otro sentido no tenemos mas que tomar $T = \mathbf{T}(M_R)$ que además de ser un R-submódulo de M, es un B-submódulo, ya que para todo $m \in \mathbf{T}(M_R)$, $b \in B$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $br_1 \cdots r_{n_0} \in R^\beta$ y como $m \in \mathbf{T}(M_R)$ existirá un $n_1 \geq n_0$ tal que $mbr_1 \cdots r_{n_1} = 0$, por lo tanto $\mathbf{T}(M_R) B \subseteq \mathbf{T}(M_R)$ y como B tiene identidad el otro contenido es trivial. □

Una vez que hemos visto que podemos considerar las subclases de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ formadas por los R-módulos de dichas clases que tienen estructura de B-módulo compatible con la de R-módulo, parece natural preguntarse cual es la categoría cociente de Mod-B módulo dicha teoría de torsión. El resultado es el que podríamos esperar.

Proposición 3.44. *Sea $M_B \in \mathsf{Mod}$-B. Entonces $M_R \in \mathsf{CMod}$-R si y solo si $M_B \in \mathsf{Mod}$-$(B, \mathcal{G})$ siendo $\mathcal{G}$ la siguiente familia de ideales*

$$\mathcal{G} = \{\mathfrak{a}_B \leq B_B : B/\mathfrak{a} \in \mathcal{T}\}$$

Demostración:
En un sentido es trivial, ya que si $M_B \in \mathsf{Mod}$-$(B, \mathcal{G})$, en particular $\mathrm{Hom}_B(RB_B, M_B) \simeq M_B$ con el homomorfismo canónico ya que $RB \in \mathcal{G}$.

En el otro sentido supongamos que $M_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ y sea $\mathfrak{a} \in \mathcal{G}$. Tenemos que probar que el homomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{\mathfrak{a}}: & M & \to & \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}, M) \\ & m & \mapsto & \varphi_{\mathfrak{a}}(m) \end{array}$$

con $\varphi_{\mathfrak{a}}(m)(a) = ma$ es un isomorfismo. Como M_R es libre de torsión, entonces $\mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}, M) = \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{a}, M)$.

$$\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathfrak{a}}) = \{m \in M_B : m\mathfrak{a} = 0\}$$

Si probáramos que $\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathfrak{a}}) \subseteq \mathbf{T}\,(M_R)$, podríamos deducir que $\varphi_{\mathfrak{a}}$ es un monomorfismo del hecho de que M_R, es libre de torsión.

Sea $m \in \mathrm{Ker}(\varphi_{\mathfrak{a}})$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $B/\mathfrak{a} \in \mathcal{T}$ y $1_B \in B$, podremos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1_B r_1 r_2 \cdots r_{n_0} \in \mathfrak{a}$$

entonces

$$mr_1 \cdots r_{n_0} = m1_B r_1 \cdots r_{n_0} \in m\mathfrak{a} = 0$$

lo cual prueba que $m \in \mathbf{T}\,(M_R)$.

Para probar que $\varphi_{\mathfrak{a}}$ es un epimorfismo, tomemos $f : \mathfrak{a} \to M$ un R-homomorfismo, y consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow B \longrightarrow B/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

Por ser M_R $\mathbf{T}$-inyectivo y $B/\mathfrak{a}$ de torsión, existe un $g : B \to M_B$ que extiende a f. Denotemos $m = g(1_B)$,

$$\forall a \in \mathfrak{a}, f(a) = g(a) = g(1_B a) = g(1_B)a = ma = \varphi_{\mathfrak{a}}(m)(a)$$

Esto prueba que $f = \varphi_{\mathfrak{a}}(m)$ y que $\varphi_{\mathfrak{a}}$ es suprayectiva. $\square$

TEMA 4

Módulos Asociados a Soportes

En este tema empezaremos fijando un anillo R, un anillo con identidad A tal que R sea un ideal bilátero en él, y un conjunto X junto con una aplicación $\pi : X \to R$. Esta aplicación se puede extender a otra que denotaremos igual

$$\pi : \Sigma(X) \to A$$

definida como sigue

$$\pi(\varnothing) = 1_A$$
$$\pi(\overline{x}) = \pi(x_1) \cdots \pi(x_{\lambda(\overline{x})})$$

De esta forma π se convierte en un homomorfismo de monoides multiplicativos.

Cuando hablemos de A-módulos, nos referiremos a A-módulos unitarios.

1. Módulos Asociados a Soportes Unitarios

Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Vamos a construir un R-módulo asociado a σ del siguiente modo:

Si $\sigma = \varnothing$, definiremos $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle = 0$.

Si $\sigma \neq \varnothing$ consideremos $L = A^{(\sigma)}$ el coproducto de copias A con el conjunto de índices σ. Vamos a denotar $(\underline{x})l$ al elemento que tiene 1_A en la componente $\overline{x}$-ésima y 0 en todas las demás componentes. También denotaremos

$$(\underline{x})k = (\underline{x})l - \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)(y\underline{x})l.$$

Ésta es una suma finita ya que por ser σ unitario, el conjunto $X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma$ es finito (y no vacío).

Llamaremos K al A-submódulo por la izquierda de L generado por los elementos $\{(\underline{x})k : \overline{x} \in \sigma\}$.

Con estas notaciones definiremos

$$\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle = L/K$$
$$\langle \underline{x} \rangle_\sigma = (\underline{x})l + K \quad \forall \overline{x} \in \sigma$$

Proposición 4.1. *Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

$$\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle = \sum_{\{\overline{x} \in \sigma, \lambda(\overline{x}) \geq n\}} A\langle \underline{x} \rangle_\sigma$$

Mas en general, para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y todo $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$,

$$\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle = \sum_{\overline{x} \in \sigma \setminus \xi} A\langle \underline{x} \rangle_\sigma .$$

Demostración:
Vamos a hacer la demostración por inducción en n. Para $n = 0$ el resultado es evidente ya que el conjunto $\{\langle \underline{x} \rangle_\sigma : \overline{x} \in \sigma\}$ es un conjunto generador de $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$.

Supongamos que lo hemos probado para n y que queremos probarlo para $n+1$, entonces utilizamos el hecho de que para todo $\overline{x} \in X^n$,

$$\langle \underline{x} \rangle_\sigma = \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}} \sigma} \pi(y) \langle y\underline{x} \rangle_\sigma \in \sum_{\{\overline{z} \in \sigma, \lambda(\overline{z}) \geq n+1\}} A\langle \underline{z} \rangle_\sigma$$

por lo tanto

$$\sum_{\{\overline{z} \in \sigma, \lambda(\overline{z}) \geq n\}} A\langle \underline{z} \rangle_\sigma = \sum_{\{\overline{z} \in \sigma, \lambda(\overline{z}) \geq n+1\}} A\langle \underline{z} \rangle_\sigma = \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle.$$

Para ver la segunda parte no tenemos mas que darnos cuenta de que como $\sigma \cap \xi$ es finito, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\overline{x} \in \sigma$ con $\lambda(\overline{x}) \geq n$ se tiene que $\overline{x} \notin \xi$ por lo que

$$\sum_{\overline{x} \in \sigma \setminus \xi} A\langle \underline{x} \rangle_\sigma = \sum_{\{\overline{x} \in \sigma, \lambda(\overline{x}) \geq n\}} A\langle \underline{x} \rangle_\sigma = \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle.$$

□

COROLARIO 4.2. *Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\sigma \neq \varnothing$, y sea ${}_AM$ un A-módulo por la izquierda. Entonces para definir un homomorfismo $f : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to M$ basta encontrar un soporte de torsión $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y definir f para los elementos*

$$\{\langle \underline{x} \rangle_\sigma : \overline{x} \in \sigma \setminus \xi\}$$

y comprobar que con esta definición se cumplen las relaciones

$$\sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}} \sigma} \pi(y)(\langle y\underline{x} \rangle_\sigma) f = (\langle \underline{x} \rangle_\sigma) f \quad \forall \overline{x} \in \sigma \setminus \xi$$

Demostración:
Es una consecuencia inmediata del hecho de que

$$\{\langle \underline{x} \rangle_\sigma : \overline{x} \in \sigma \setminus \xi\}$$

sea un conjunto de generadores para el módulo $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle = L/K$ y que las relaciones antes mencionadas son las que aparecen entre los generadores por definición del submódulo K. □

PROPOSICIÓN 4.3. *Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ es un R-módulo unitario, es decir, $R\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$.*

Demostración:
Todos los elementos de $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ son sumas finitas de elementos de la forma $a\langle \underline{x} \rangle_\sigma$ con $a \in A$ y $\overline{x} \in \sigma$, pero

$$a\langle \underline{x} \rangle_\sigma = \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} a\pi(y)\langle y\underline{x} \rangle_\sigma \in R\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$$

ya que $a \cdot r \in R$ para todo $a \in A$, $r \in R$. □

EJERCICIO 4.1. Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\overline{x} \in \sigma$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces

$$\langle \underline{x} \rangle_\sigma = \sum_{\overline{y} \in X^n \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(\overline{y})\langle \underline{yx} \rangle_\sigma .$$

Solución:
Haremos la demostración por inducción en n. Para $n = 0$ tenemos un único elemento en $X^0 \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma$ que es precisamente el elemento $\varnothing$. Pero $\pi(\varnothing) = 1_A$ por definición.

Para el caso $n = 1$ lo tenemos por definición del módulo. Supongamos que lo tenemos demostrado para n y lo queremos demostrar para $n + 1$.

$$\langle \underline{x} \rangle_\sigma = \sum_{z \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(z)\langle z\underline{x} \rangle_\sigma =$$

aplicando la hipótesis de inducción a $\langle z\underline{x} \rangle_\sigma$,

$$\sum_{z \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(z)\langle z\underline{x} \rangle_\sigma = \sum_{z \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(z) \sum_{\overline{y} \in X^n \cap \Delta_{z\underline{x}}\sigma} \pi(\overline{y})\langle yz\underline{x} \rangle_\sigma =$$

$$\sum_{\{z \in X : \overline{x}z \in \sigma\}} \sum_{\{\overline{y} \in X^n : \overline{x}z\overline{y} \in \sigma\}} \pi(z\overline{y})\langle yz\underline{x} \rangle_\sigma =$$

$$\sum_{\{\overline{w} \in X^{n+1} : \overline{x}\overline{w} \in \sigma\}} \pi(\overline{w})\langle \underline{wx} \rangle_\sigma = \sum_{\overline{w} \in X^{n+1} \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(\overline{w})\langle \underline{wx} \rangle_\sigma$$

□

LEMA 4.4. *Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\sigma \neq \varnothing$. Entonces para todo elemento $\alpha \in \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existen elementos $\{r(\overline{x}) \in R : \overline{x} \in \sigma \cap X^n\}$ tales que*

$$\alpha = \sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} r(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma .$$

Demostración:
Vamos a utilizar las notaciones dadas en la definición de $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$.

Como $\alpha \in L/K$ podemos encontrar elementos $a(\overline{x}) \in A$ con $\overline{x} \in \sigma$, casi todos nulos tales que

$$\alpha = \sum_{\overline{x} \in \sigma} a(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma .$$

Puesto que solo hay un número finito de elementos $a(\overline{x})$ no nulos, podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\overline{x} \in \sigma$ con $\lambda(\overline{x}) \geq n_0$ se tenga que $a(\overline{x}) = 0$.

Sea $n \geq n_0$. Sea $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$, entonces definiremos

$$r(\overline{x}) = \sum_{\overline{y} < \overline{x}} a(\overline{y})\pi(\overline{y}^{-1}\overline{x}).$$

Como $\overline{y} < \overline{x}$, tenemos que $a(\overline{y})\pi(\overline{y}^{-1}\overline{x}) \in R$, por lo tanto $r(\overline{x}) \in R$ para todo $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$. Además

$$\alpha = \sum_{\overline{x} \in \sigma} a(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma = \sum_{\{\overline{x} \in \sigma : \lambda(\overline{x}) < n\}} a(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma =$$

$$\sum_{\{\overline{x} \in \sigma : \lambda(\overline{x}) < n\}} a(\overline{x}) \sum_{\overline{y} \in X^{n-\lambda(\overline{x})} \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(\overline{y})\langle \underline{yx} \rangle_\sigma =$$

$$\sum_{\{\overline{x} \in \sigma : \lambda(\overline{x}) < n\}} \sum_{\{\overline{y} : \lambda(\overline{y}) = n - \lambda(\overline{x}), \overline{xy} \in \sigma\}} a(\overline{x})\pi(\overline{y})\langle \underline{yx} \rangle_\sigma =$$

$$\sum_{\overline{z} \in X^n \cap \sigma} \sum_{\overline{x} < \overline{z}} a(\overline{x})\pi(\overline{x}^{-1}\overline{z})\langle \underline{z} \rangle_\sigma = \sum_{\overline{z} \in X^n \cap \sigma} r(\overline{z})\langle \underline{z} \rangle_\sigma$$

$\square$

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea σ un soporte unitario no vacío y sea*

$$\sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} a(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma$$

un elemento de $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ con $a(\overline{x}) \in A$. Entonces son equivalentes

1. $\sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} a(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma = 0$.
2. $a(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma = 0$ *para todo $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$.*
3. *Existe un $m \geq n$ tal que para todo $\overline{z} \in X^m \cap \sigma$ se tiene que*

$$a(z_1 \cdots z_n)\pi(z_{n+1} \cdots z_m) = 0.$$

Demostración:
La implicación ($2 \Rightarrow 1$) es trivial y la ($3 \Rightarrow 2$) es consecuencia inmediata del Ejercicio 4.1. El único problema está en la implicación ($1 \Rightarrow 3$). Si se cumple la condición (1) es porque el elemento $\sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} a(\overline{x})(\underline{x})l$ está en K.

Podremos encontrar pues elementos $b(\overline{x}) \in A$ casi todos nulos tales que

$$\sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} a(\overline{x})(\underline{x})l = \sum_{\overline{y} \in \sigma} b(\overline{y})(\underline{y})k.$$

Como casi todos los $b(\overline{y})$ son nulos, podremos encontrar un $m \in \mathbb{N}$ que sin pérdida de generalidad podemos suponer mayor o igual que n tal que para todo $\overline{y} \in \sigma$ con $\lambda(\overline{y}) \geq m$ se tenga $b(\overline{y}) = 0$. Entonces tenemos que

$$\sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} a(\overline{x})(\underline{x})l =$$

$$\sum_{\overline{y}\in\sigma} b(\overline{y})(\underline{y})k = \sum_{\{\overline{y}\in\sigma:\lambda(\overline{y})<m\}} b(\overline{y})(\underline{y})k =$$

$$\sum_{\{\overline{y}\in\sigma:\lambda(\overline{y})<m\}} b(\overline{y}) \left((\underline{y})l - \sum_{z\in X\cap\Delta_{\underline{y}}\sigma} \pi(z)(z\underline{y})l \right) =$$

$$\sum_{\{\overline{y}\in\sigma:\lambda(\overline{y})<m\}} b(\overline{y})(\underline{y})l - \sum_{\{(\overline{y},z)\in\sigma\times X:\lambda(\overline{y})<m,\overline{y}z\in\sigma\}} b(\overline{y})\pi(z)(z\underline{y})l =$$

$$\sum_{\{\overline{y}\in\sigma:\lambda(\overline{y})<m\}} b(\overline{y})(\underline{y})l - \sum_{\{\overline{y}z\in\sigma:\lambda(\overline{y}z)\leq m\}} b(\overline{y})\pi(z)(z\underline{y})l =$$

$$\sum_{\{\overline{y}\in\sigma:\lambda(\overline{y})<m\}} b(\overline{y})(\underline{y})l - \sum_{\{\overline{w}\in\sigma:1\leq\lambda(\overline{w})\leq m\}} b(w_1\cdots w_{\lambda(\overline{w})-1})\pi(w_{\lambda(\overline{w})})(\underline{w})l =$$

$$\sum_{\{\overline{y}\in\sigma:\lambda(\overline{y})<m\}} b(\overline{y})(\underline{y})l - \sum_{\{\overline{y}\in\sigma:1\leq\lambda(\overline{y})\leq m\}} b(y_1\cdots y_{\lambda(\overline{y})-1})\pi(y_{\lambda(\overline{y})})(\underline{y})l =$$

$$b(\varnothing)(\varnothing)l + \sum_{\{\overline{y}\in\sigma:1\leq\lambda(\overline{y})\leq m-1\}} \big(b(\overline{y}) - b(y_1\cdots y_{\lambda(\overline{y})-1})\pi(y_{\lambda(\overline{y})})\big)(\underline{y})l$$

$$- \sum_{\overline{y}\in\sigma\cap X^m} b(y_1\cdots y_{m-1})\pi(y_m)l(\underline{y})$$

Poniendo juntos el principio y el final, tenemos que

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} a(\overline{x})(\underline{x})l = b(\varnothing)(\varnothing)l+$$

$$\sum_{\{\overline{y}\in\sigma:1\leq\lambda(\overline{y})\leq m-1\}} \big(b(\overline{y}) - b(y_1\cdots y_{\lambda(\overline{y})-1})\pi(y_{\lambda(\overline{y})})\big)(\underline{y})l$$

$$- \sum_{\overline{y}\in\sigma\cap X^m} b(y_1\cdots y_{m-1})\pi(y_m)l(\underline{y})$$

Esta es una igualdad en L que es un A-módulo libre sobre el conjunto $\{l(\overline{x}) : \overline{x}\in\sigma\}$. Podemos pues igualar coeficientes de los dos miembros, de forma que obtenemos las siguientes relaciones

$$b(\varnothing) = 0$$

$$0 = b(\overline{y}) - b(\varnothing)\pi(y) = b(\overline{y}) \quad \forall y\in X\cap\sigma$$

$$\vdots$$

$$0 = b(\overline{y}) - b(y_1\cdots y_{\lambda(\overline{y})-1})\pi(y_{\lambda(\overline{y})} = b(\overline{y}) \quad \forall\overline{y}\in\sigma, \lambda(\overline{y}) < n$$

$$\vdots$$

$$a(\overline{y}) = b(\overline{y}) - b(y_1\cdots y_{n-1})\pi(y_n) = b(\overline{y}) \quad \forall\overline{y}\in\sigma\cap X^n$$

$$0 = b(\overline{y}) - b(y_1\cdots y_n)\pi(y_{n+1}) = b(\overline{y}) - a(y_1\cdots y_n)\pi(y_{n+1}) \quad \forall\overline{y}\in X^{n+1}\cap\sigma$$

$$\vdots$$

$$0 = b(\overline{wz}) - a(\overline{w})\pi(\overline{z}) \quad \forall\overline{wz}\in\sigma, \lambda(\overline{w}) = n, \lambda(\overline{wz}) < m$$

$$0 = b(y_1\cdots y_{m-1})\pi(y_m) = a(y_1\cdots y_n)\pi(y_{n+1}\cdots y_m) \quad \forall\overline{y}\in X^m\cap\sigma$$

$\square$

Existe otra forma de ver los módulos del tipo $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$. Para ello vamos a considerar un soporte unitario $\sigma \neq \varnothing$. Vamos a definir

$$F_n = A^{X^n \cap \sigma}$$

como para todo $n \in \mathbb{N}$, $X^n \cap \sigma$ es finito, podemos considerar F_n como un producto o como un coproducto. Si para un $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$ definimos $(\underline{x})f$ como el elemento de F_n que tiene 1_A en la componente $\overline{x}$-ésima y 0 en todas las demás componentes, entonces tendremos que todos los elementos de F_n se pueden poner como sumas de los $(\underline{x})f$ con coeficientes en A.

Vamos a definir los siguientes homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{n,n+1}: & F_n & \rightarrow & F_{n+1} \\ & (\underline{x})f & \mapsto & \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(x)(y\underline{x})f \end{array}$$

Componiendo estos morfismos definiremos para todo $i \leq j$, $\varphi_{i,j} = \varphi_{i,i+1} * \cdots * \varphi_{j+1,j}$.

Proposición 4.6. *Con las notaciones anteriores,*

$$\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Demostración:
Vamos a definir

$$\begin{array}{rccc} h: & L & \rightarrow & \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F_n \\ & (\underline{x})l & \mapsto & ((\underline{x})f)q_{\lambda(\overline{x})} \end{array}$$

donde con q_n denotamos la aplicación canónica entre F_n y $\varinjlim_{k \in \mathbb{N}} F_k$.

Como L es libre este homomorfismo está bien definido. Además es claramente suprayectivo. El único problema está en ver que $\mathrm{Ker}(h) = K$.

Los generadores de K son los elementos

$$(\underline{x})k = (\underline{x})l - \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)(y\underline{x})l.$$

Si les aplicamos h a estos elementos obtenemos

$$((\underline{x})k)h = ((\underline{x})f)q_{\lambda(\overline{x})} - \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)((y\underline{x})f)q_{\lambda(\overline{x})+1} =$$

$$(((\underline{x})f)\varphi_{n,n+1} - \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)(y\underline{x})f)q_{\lambda(\overline{x})+1} = (0)q_{\lambda(\overline{x})+1} = 0$$

Lo que hemos probado pues es que h se puede factorizar a través del K y definir un epimorfismo

$$\overline{h} : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \rightarrow \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Para completar la prueba tenemos que ver que es un monomorfismo. Supongamos que tenemos un elemento

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} a(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_\sigma \in \mathrm{Ker}(\overline{h}).$$

Escrito en términos de morfismos esto significa que existe un $m \geq n$ tal que

$$(\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} a(\overline{x})(\underline{x})f)\varphi_{n,m} = 0$$

y por lo tanto, para todo $\overline{x} \in X^m \cap \sigma$, $a(x_1 \cdots x_n)\pi(x_{n+1} \cdots x_m) = 0$ que es precisamente la condición que hemos visto equivalente a que

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} a(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_\sigma = 0$$

□

Proposición 4.7. *Para todo soporte unitario σ, el módulo $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ está en la categoría R-*DMod.

Demostración:
Si $\sigma = \varnothing$ entonces $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle = 0$ y este módulo pertenece trivialmente a la categoría R-DMod. Podemos pues suponer que $\sigma \neq \varnothing$.

Hemos visto anteriormente que el módulo $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ cumple que $R\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$, es decir, que el homomorfismo canónico

$$\mu_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle} : R \otimes_A \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$$

es un epimorfismo. Tenemos que comprobar que también es un monomorfismo, para ello consideremos un elemento genérico del núcleo de $\mu_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}$. Este elemento será de la forma $\sum_{k=1}^t s_k \otimes \alpha_k$ con $s_k \in R$, $\alpha_k \in \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ y cumpliendo que $\sum_{k=1}^t s_k\alpha_k = 0$.

Para cada α_k, podremos encontrar un elemento $n_k \in \mathbb{N}$ con las condiciones del Lema 4.4. Tomando $n = \max(n_1, \cdots, n_t)$ y utilizando el citado lema, podemos escribir cada uno de los α_k como

$$\alpha_k = \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} r^k(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_\sigma$$

con $r^k(\overline{x}) \in R$. Como

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} \left(\sum_{k=1}^t s_k r^k(\overline{x})\right)\langle\underline{x}\rangle_\sigma = 0$$

podemos utilizar la Proposición 4.5 y deducir que existe un $m \geq n$ tal que para todo $\overline{y} \in X^m \cap \sigma$,

$$\sum_{k=1}^t s_k r^k(y_1 \cdots y_n)\pi(y_{n+1} \cdots y_m) = 0$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{t} s_k \otimes \alpha_k = \sum_{k=1}^{t} s_k \otimes \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} r^k(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_\sigma =$$

$$\sum_{k=1}^{t} s_k \otimes \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} r^k(\overline{x}) \sum_{\overline{y}\in X^{m-n}\cap\Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(\overline{y})\langle\underline{yx}\rangle_\sigma =$$

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} \sum_{\overline{y}\in X^{m-n}\cap\Delta_{\underline{x}}\sigma} \sum_{k=1}^{t} s_k r^k(\overline{x})\pi(\overline{y}) \otimes \langle\underline{yx}\rangle_\sigma =$$

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} \sum_{\overline{y}\in X^{m-n}\cap\Delta_{\underline{x}}\sigma} 0 \otimes \langle\underline{yx}\rangle_\sigma = 0.$$

$\square$

LEMA 4.8. *Sea ${}_{A'}P_A$ un (A', A)-bimódulo para un anillos con identidad A'. Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\sigma \neq \varnothing$. Entonces para todo $\alpha \in P \otimes_A \langle\langle\sigma\rangle\rangle$ existe un $n \in \mathbb{N}$ y unos elementos $p(\overline{x}) \in P$ con $\overline{x} \in \sigma \cap X^n$ tales que*

$$\alpha = \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} p(\overline{x}) \otimes \langle\underline{x}\rangle_\sigma.$$

Demostración:
Claramente podemos poner α como $\sum_{i=1}^{k} p_i \otimes \beta_i$ con $\beta_i \in \langle\langle\sigma\rangle\rangle$. Utilizando el Lema 4.4 con cada uno de los β_i, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ y elementos $r^i(\overline{x}) \in R$ con $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$ tales que

$$\beta_i = \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} r^i(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_\sigma$$

por lo tanto

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} p_i \otimes \beta_i = \sum_{i=1}^{k} p_i \otimes \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} r^i(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_\sigma =$$

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} \left(\sum_{i=1}^{k} p_i r^i(\overline{x})\right) \otimes \langle\underline{x}\rangle_\sigma.$$

$\square$

PROPOSICIÓN 4.9. *Sea ${}_{A'}P_A$ un (A', A)-bimódulo, σ un soporte unitario no vacío y*

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} p(\overline{x}) \otimes \langle\underline{x}\rangle_\sigma$$

un elemento de $P \otimes_A \langle\langle\sigma\rangle\rangle$ con $p(\overline{x}) \in P$. Entonces son equivalentes

1. $\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} p(\overline{x}) \otimes \langle\underline{x}\rangle_\sigma = 0.$
2. $p(\overline{x}) \otimes \langle\underline{x}\rangle_\sigma = 0$ *para todo* $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$.
3. *Existe un $m \geq n$ tal que para todo $\overline{z} \in X^m \cap \sigma$ se tiene que*

$$p(z_1 \cdots z_n)\pi(z_{n+1} \cdots z_m) = 0.$$

Demostración:
Las demostraciones ($3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$) son inmediatas. El problema está en la demostración de ($1 \Rightarrow 3$).

Para ponernos en las condiciones del Lema 1.58 tenemos que hacer que los elementos de $\langle\langle\sigma\rangle\rangle$ que tomamos formen un conjunto generador de $\langle\langle\sigma\rangle\rangle$ como A-módulo. Vamos a definir $p(\overline{x}) = 0$ para todo $\overline{x} \in \sigma$, $\overline{x} \notin X^n \cap \sigma$.

Por lo tanto $\sum_{\overline{x}\in\sigma} p(\overline{x}) \otimes \langle \underline{x} \rangle_\sigma = 0$ y aplicando el Lema 1.58 podemos asegurar que existen elementos $a_f(\overline{x}) \in A$ con f recorriendo un conjunto finito F y $\overline{x} \in \sigma$ junto con elementos $q_f \in P$ tales que

1. $a_f(\overline{x}) = 0$ para casi todo $(f, \overline{x}) \in F \times \sigma$.
2. $\sum_{\overline{x}\in\sigma} a_f(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma = 0$ para todo $f \in F$.
3. $p(\overline{x}) = \sum_{f\in F} q_f a_f(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in \sigma$.

De la primera condición podemos deducir que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ que podemos considerar mayor o igual que n tal que para todo $\overline{x} \in \sigma$ con $\lambda(\overline{x}) \geq n_1$, se tenga $a_f(\overline{x}) = 0$ para todo $f \in F$. De ahí deducimos que para todo $f \in F$,

$$\sum_{\overline{x}\in\sigma\cap X^{n_1}} \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_f(x_1 \cdots x_i)\pi(x_{i+1} \cdots x_{n_1}) \right) \langle x_{n_1} \cdots x_1 \rangle_\sigma = 0$$

y utilizando la Proposición 4.9 deducimos que podemos encontrar $n_0 \geq n_1$ tal que para todo $f \in F$,

$$\sum_{i=0}^{n_0} a_f(x_1 \cdots x_i)\pi(x_{i+1} \cdots x_{n_0}) = 0$$

Por la definición que hemos hecho añadiendo ceros en los $p(\overline{x})$ con $\overline{x} \in \sigma \setminus X^n$, tenemos la identidad

$$p(x_1 \cdots x_n)\pi(x_{n+1} \cdots x_{n_0}) = \sum_{i=0}^{n_0} p(x_1 \cdots x_i)\pi(x_{i+1} \cdots x_{n_0}) =$$

$$\sum_{f\in F} \sum_{i=0}^{n_0} q_f a_f(x_1 \cdots x_i)\pi(x_{i+1} \cdots x_{n_0}) =$$

$$\sum_{f\in F} q_f \underbrace{\sum_{i=0}^{n_0} a_f(x_1 \cdots x_i)\pi(x_{i+1} \cdots x_{n_0})}_{=0} = 0.$$

□

PROPOSICIÓN 4.10. *Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, el módulo $\langle\langle\sigma\rangle\rangle$ es un módulo plano en A-*Mod.

Demostración:
Sean $M_A \subseteq N_A$ dos A-módulos de Mod-A, denotemos con $j : M \to N$ a la inclusión canónica. Tenemos que probar que

$$j \otimes \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle : M \otimes_A \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to N \otimes_A \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$$

es un monomorfismo de grupos abelianos. Para ello tomemos un elemento de $\mathrm{Ker}(j \otimes \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$, como en particular éste elemento estará en $M \otimes_A \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ podremos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ y elementos $m(\overline{x}) \in M$ con $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$ tales que dicho elemento se escribe como

$$\sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} m(\overline{x}) \otimes \langle \underline{x} \rangle_\sigma.$$

Si le aplicamos $j \otimes \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ obtenemos

$$0 = \sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} j(m(\overline{x})) \otimes \langle \underline{x} \rangle_\sigma \in N \otimes_A \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$$

por lo tanto podremos encontrar un $n_0 \geq n$ tal que para todo $(x_1 \cdots x_{n_0}) \in X^{n_0} \cap \sigma$, $j(m(x_1 \cdots x_n)\pi(x_{n+1} \cdots x_{n_0})) = 0$ de donde deducimos que $m(x_1 \cdots x_n)\pi(x_{n+1} \cdots x_{n_0}) = 0$ y que

$$\sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} m(\overline{x}) \otimes \langle \underline{x} \rangle_\sigma = 0 \in M \otimes_A \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle.$$

□

2. Descomposiciones en Sumas Directas

Definición 4.11. Sean σ, τ dos soportes unitarios con $\sigma \subseteq \tau$. Entonces definiremos

$$\Phi_{\tau\sigma} : \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$$

el homomorfismo que viene definido sobre los generadores como

$$(\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} = \begin{cases} \langle \underline{x} \rangle_\sigma & \text{si } \underline{x} \in \sigma \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 4.2. Realizar las siguientes comprobaciones con respecto a la Definición 4.11

1. que es una buena definición.
2. que $\Phi_{\tau\sigma}$ es un epimorfismo en A-Mod.
3. que $((\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)}, (\Phi_{\tau\sigma})_{\sigma \subseteq \tau})$ constituye un sistema inverso en la categoría A-Mod.

Solución:

1. La única comprobación que es necesaria en este caso es que para todo $\overline{x} \in \tau$,

$$(\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} = \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\tau} \pi(y)(\langle y\underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma}.$$

Si $\overline{x} \notin \sigma$, entonces para todo $y \in X$, $\overline{x}y \notin \sigma$ por lo que en este caso ambos miembros serían 0. Si $\overline{x} \in \sigma$, entonces

$$X \cap \Delta_{\underline{x}}\tau = \{y \in X : \overline{x}y \in \tau\} = \{y \in X : \overline{x}y \in \sigma\} \cup \{y \in X : \overline{x}y \in \sigma \backslash \sigma\}$$

Entonces tenemos

$$(\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} = \langle \underline{x} \rangle_\sigma = \sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)\langle y\underline{x} \rangle_\sigma =$$

$$\sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)(\langle y\underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} =$$

$$\sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)(\langle y\underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} + \underbrace{\sum_{y \in X \cap (\Delta_{\underline{x}}\tau \backslash \Delta_{\underline{x}}\sigma)} \pi(y)(\langle y\underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma}}_{=0} =$$

$$\sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\tau} \pi(y)(\langle y\underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma}$$

que era lo que teníamos que probar.

2. Para cualquier elemento $\overline{x} \in \sigma$, como $\overline{x} \in \tau$, tenemos que $(\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} = \langle \underline{x} \rangle_\sigma$, por lo tanto $\mathrm{Im}(\Phi_{\tau\sigma})$ tiene todos los generadores de $\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ por lo que ha de ser todo el módulo.
3. Supongamos que $\rho \subseteq \sigma \subseteq \tau$ son soportes unitarios. Una aplicación directa de la definición nos muestra que $\Phi_{\tau\sigma} * \Phi_{\sigma\rho} = \Phi_{\tau\rho}$.

   Esto junto al hecho de que $\Xi_{\mathbf{U}}(X)$ sea un conjunto dirigido inferiormente con la relación contraria a $\leq$ (dados dos soportes unitarios, su unión conjuntista es un soporte unitario), hace que $((\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)}, (\Phi_{\tau\sigma})_{\sigma \subseteq \tau})$ constituya un sistema inverso.

□

DEFINICIÓN 4.12. Sea σ un soporte unitario, $\overline{x} \in \Sigma(X)$. Definiremos

$$\begin{array}{rccc} \pi^\Delta(\underline{x})_\sigma : & \langle\!\langle \Delta_{\underline{x}}\sigma \rangle\!\rangle & \rightarrow & \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \\ & \langle \underline{y} \rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} & \mapsto & \langle \underline{yx} \rangle_\sigma \\ \pi^\nabla(\overline{x})_\sigma : & \langle\!\langle \nabla_{\overline{x}}\sigma \rangle\!\rangle & \rightarrow & \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \\ & \langle \underline{yx} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} & \mapsto & \langle \underline{y} \rangle_\sigma \end{array}$$

Si $\Delta_{\underline{x}}\sigma = \varnothing$ definiremos $\pi^\Delta(\underline{x})_\sigma = 0$ y si $\nabla_{\overline{x}}\sigma = \varnothing$ definiremos $\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma = 0$.

EJERCICIO 4.3. Comprobar que con la asignación de valores dada en la Definición 4.12, tanto $\pi^\Delta(\underline{x})_\sigma$ como $\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma$ están bien definidos.

Solución:
Empecemos viendo el caso $\pi^\Delta(\underline{x})_\sigma$. Si $\overline{y} \in \Delta_{\underline{x}}\sigma$, entonces $\overline{xy} \in \sigma$ por definición de $\Delta_{\underline{x}}\sigma$.

Tenemos que comprobar también que se conservan las relaciones entre los generadores, para ello tomemos $\overline{y} \in \Delta_{\underline{x}}\sigma$,

$$\sum_{z \in X \cap \Delta_{\underline{y}} \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(z)(\langle z\underline{y}\rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\sigma} =$$

$$\sum_{z \in X \cap \Delta_{\underline{yx}}\sigma} \pi(z)\langle z\underline{yx}\rangle_{\sigma} = (\langle \underline{y}\rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\sigma}.$$

Para el caso $\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma}$, denotemos $n = \lambda(\overline{x})$.

$$\{\overline{z} \in \nabla_{\overline{x}}\sigma : \lambda(\overline{z}) \geq n\} =$$

$$\{\overline{z} \in \{\overline{xy} \in \Sigma(X) : \overline{y} \in \sigma\} : \lambda(\overline{z}) \geq n\} \cup \{\overline{z} \in (\!(\overline{x})\!) : \lambda(\overline{z}) \geq n\} =$$

$$\{\overline{xy} : \overline{y} \in \sigma\} \cup \{\overline{x}\} = \{\overline{xy} : \overline{y} \in \sigma\}$$

Realmente la definición se ha dado para el conjunto $\{\overline{xy} : \overline{y} \in \sigma\}$ pero por la Proposición 4.1 sabemos que ese es un conjunto generador de $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$. Vamos a comprobar que se cumplen las relaciones entre los generadores, para ello tomemos $\overline{xy}$ tal que $\overline{y} \in \sigma$

$$\sum_{z \in X \cap \nabla_{\overline{yx}} \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(z)(\langle z\underline{yx}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma} =$$

$$\sum_{z \in X \cap \nabla_{\overline{y}} \nabla_{\overline{x}} \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(z)\langle z\underline{y}\rangle_{\sigma} = \sum_{z \in X \cap \nabla_{\overline{y}}\sigma} \pi(z)\langle z\underline{y}\rangle_{\sigma} =$$

$$\langle \underline{y}\rangle_{\sigma} = (\langle \underline{yx}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma}.$$

□

PROPOSICIÓN 4.13. *Sean* $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$, $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, *entonces*
1. $\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{xy})_{\sigma}$.
2. $\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} = \pi^{\Delta}(\underline{xy})_{\sigma}$.

Demostración:

1. Empecemos viendo que coinciden los conjuntos origen e imagen de ambos miembros

$$\langle\!\langle \nabla_{\overline{x}}\nabla_{\overline{y}}\sigma\rangle\!\rangle \xrightarrow{\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma}} \langle\!\langle \nabla_{\overline{y}}\sigma\rangle\!\rangle \xrightarrow{\pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma}} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$$

$$\langle\!\langle \nabla_{\overline{xy}}\sigma\rangle\!\rangle \xrightarrow{\pi^{\nabla}(\overline{xy})_{\sigma}} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$$

Si $\sigma = \varnothing$ entonces todos los morfismos son el morfismo 0 y la igualdad se da trivialmente. Si $\sigma \neq \varnothing$ entonces para todo $\overline{z} \in \Sigma(X)$ se tiene que $\nabla_{\overline{z}}\sigma \neq \varnothing$ ya que $\Delta_{\underline{z}}\nabla_{\overline{z}}\sigma = \sigma$. Supongamos que $\sigma \neq \varnothing$.

Vamos a ver que ambos morfismos coinciden sobre el conjunto de generadores

$$\{\langle \underline{zyx}\rangle_{\nabla_{\overline{xy}}\sigma} : \overline{z} \in \sigma\}$$

$$\left((\langle \underline{zyx}\rangle_{\nabla_{\overline{xy}}\sigma})\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma}\right)\pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} =$$
$$(\langle \underline{zy}\rangle_{\nabla_{\overline{y}}\sigma})\pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} = \langle \underline{z}\rangle_{\sigma} = (\langle \underline{zyx}\rangle_{\nabla_{\overline{xy}}\sigma})\pi^{\nabla}(\overline{xy})_{\sigma}.$$

2. Empecemos de nuevo comprobando los conjuntos origen e imagen
$$\langle\!\langle \Delta_{\underline{x}}\Delta_{\underline{y}}\sigma\rangle\!\rangle \xrightarrow{\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma}} \langle\!\langle \Delta_{\underline{y}}\sigma\rangle\!\rangle \xrightarrow{\pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma}} \langle\!\langle \sigma\rangle\!\rangle$$
$$\langle\!\langle \Delta_{\underline{xy}}\sigma\rangle\!\rangle \xrightarrow{\pi^{\Delta}(\underline{xy})_{\sigma}} \langle\!\langle \sigma\rangle\!\rangle$$
Si $\Delta_{\underline{xy}}\sigma = \varnothing$ entonces $\pi^{\Delta}(\underline{xy})_{\sigma} = 0$ y $\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} = 0$ por lo que tenemos la igualdad de forma trivial. Podemos suponer pues que $\Delta_{\underline{xy}}\sigma \neq \varnothing$.
Tomemos $\overline{z} \in \Delta_{\underline{xy}}\sigma$, entonces $\overline{xz} \in \Delta_{\underline{y}}\sigma$ y $\overline{yxz} \in \sigma$,
$$\left((\langle \underline{z}\rangle_{\Delta_{\underline{xy}}\sigma})\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma}\right)\pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} = (\langle \underline{zx}\rangle_{\Delta_{\underline{y}}\sigma})\pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} =$$
$$\langle \underline{zxy}\rangle_{\sigma} = (\langle \underline{z}\rangle_{\Delta_{\underline{xy}}\sigma})\pi^{\Delta}(\underline{xy})_{\sigma}.$$

□

Proposición 4.14. *Sea* $\overline{x} \in \Sigma(X)$ *y* $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. *Entonces*
$$\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma} = \mathrm{id}_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}$$
$$\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} = \mathrm{id}_{\langle\!\langle\nabla_{\overline{x}}\sigma\rangle\!\rangle}$$

Demostración:
Empecemos comprobando los conjuntos origen e imagen
$$\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} : \langle\!\langle \Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\sigma\rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \nabla_{\overline{x}}\sigma\rangle\!\rangle$$
$$\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma} : \langle\!\langle \nabla_{\overline{x}}\sigma\rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \sigma\rangle\!\rangle$$
pero utilizando el Ejercicio 2.4 sabemos que $\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\sigma = \sigma$, por lo tanto las composiciones son correctas.

Si $\sigma = \varnothing$ entonces $\nabla_{\overline{x}}\sigma = \varnothing$ y todos los objetos y morfismos del enunciado son 0, por lo que se cumple la proposición de forma trivial. Supongamos que $\sigma \neq \varnothing$, entonces $\nabla_{\overline{x}}\sigma \neq \varnothing$ ya que $\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\sigma = \sigma$.

Para comprobar las igualdades del enunciado vamos a ver que los morfismos en cuestión coinciden sobre conjuntos generadores.

Sea $\overline{y} \in \sigma = \Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\sigma$,
$$\left((\langle \underline{y}\rangle_{\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}\right)\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma} =$$
$$(\langle \underline{yx}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma} = \langle \underline{y}\rangle_{\sigma} = (\langle \underline{y}\rangle_{\sigma})\mathrm{id}_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}.$$

Sea $\overline{z} \in \nabla_{\overline{x}}\sigma$ con $\lambda(\overline{z}) \geq \lambda(\overline{x})$, es decir $\overline{z} = \overline{xy}$ para un cierto $\overline{y} \in \sigma$, entonces
$$\left((\langle \underline{yx}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma}\right)\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} =$$
$$(\langle \underline{y}\rangle_{\sigma})\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} = \langle \underline{yx}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} = \langle \underline{z}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}.$$

□

PROPOSICIÓN 4.15. *Sea* $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$*,* $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$*, entonces*

$$\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} = \begin{cases} \pi^{\nabla}(\overline{z})_{\sigma} & si\ \overline{xz} = \overline{y} \\ \pi^{\Delta}(\underline{z})_{\sigma} & si\ \overline{yz} = \overline{x} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demostración:
Vamos a hacer uso de la Proposición 2.13. Si no se cumple ni que $\overline{x} \leq \overline{y}$ ni que $\overline{y} \leq \overline{x}$ entonces $\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\sigma = \varnothing$ por lo tanto $\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} = 0$.

Supongamos que $\overline{x} \leq \overline{y}$ y sea $\overline{z} = \overline{x}^{-1}\overline{y}$. Entonces

$$\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} = \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{xz}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{xz})_{\sigma} =$$
$$\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\nabla_{\overline{z}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\nabla_{\overline{z}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{z})_{\sigma} = \mathrm{id}_{\langle\langle\nabla_{\overline{z}}\sigma\rangle\rangle} * \pi^{\nabla}(\overline{z})_{\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{z})_{\sigma}.$$

Supongamos ahora que $\overline{y} \leq \overline{x}$ y sea $\overline{z} = \overline{y}^{-1}\overline{x}$. Entonces $\overline{yz} = \overline{x}$, o en notación inversa, $\underline{x} = \underline{zy}$. Por lo tanto

$$\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} = \pi^{\Delta}(\underline{zy})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} =$$
$$\pi^{\Delta}(\underline{z})_{\Delta_{\underline{y}}\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{y})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} = \pi^{\Delta}(\underline{z})_{\sigma} * \mathrm{id}_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle} = \pi^{\Delta}(\underline{z})_{\sigma}.$$

□

DEFINICIÓN 4.16. Sea σ un soporte unitario, $\overline{x} \in \Sigma(X)$. Vamos a definir

$$\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} : \langle\langle(\underline{x})\sigma\rangle\rangle \to \langle\langle\sigma\rangle\rangle$$

como $\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\sigma}$.

Esta definición se generalizará en la Definición 4.20.

EJERCICIO 4.4. Sea $\overline{x} \in \Sigma(X)$, $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Entonces para todo $\overline{y} \in (\underline{x})\sigma$ con $\lambda(\overline{y}) \geq \lambda(\overline{x})$ se tiene que

$$(\langle\underline{y}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = \langle\underline{y}\rangle_{\sigma}$$

Solución:
Por la Proposición 2.15 sabemos que si $\overline{y} \in (\underline{x})\sigma$ entonces $\overline{y} \in \{\overline{w} \in \sigma : \overline{x}) \leq \overline{w}\} \cup ((\overline{x}))$ pero si $\lambda(\overline{y}) \geq \lambda(\overline{x})$ entonces necesariamente $\overline{y} \in \sigma$ y $\overline{x} \leq \overline{y}$. Supongamos que $\overline{y} = \overline{xz}$.

$$(\langle\underline{y}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = (\langle\underline{zx}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} =$$
$$(\langle\underline{zx}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\sigma} =$$
$$(\langle\underline{z}\rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\sigma} = \langle\underline{zx}\rangle_{\sigma} = \langle\underline{y}\rangle_{\sigma}.$$

□

PROPOSICIÓN 4.17. *Sea* $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$*,* $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$*, entonces*

$$\Gamma_{(\underline{x})(\underline{y})\sigma,(\underline{y})\sigma} * \Gamma_{(\underline{y})\sigma,\sigma} = \begin{cases} \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} & si\ \overline{y} \leq \overline{x} \\ \Gamma_{(\underline{y})\sigma,\sigma} & si\ \overline{x} \leq \overline{y} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demostración:
Comprobemos que los rangos de los morfismos

$$\langle\!\langle(\underline{x})(\underline{y})\sigma\rangle\!\rangle \xrightarrow{\Gamma_{(\underline{x})(\underline{y})\sigma,(\underline{y})\sigma}} \langle\!\langle(\underline{y})\sigma\rangle\!\rangle \xrightarrow{\Gamma_{(\underline{y})\sigma,\sigma}} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$$

Utilizando la Proposición 2.17 sabemos que $(\underline{x})(\underline{y})\sigma$ es igual a $(\underline{y})\sigma$ si $\overline{x} \leq \overline{y}$, a $(\underline{x})\sigma$ si $\overline{y} \leq \overline{x}$ y al soporte vacío si no se cumple ninguna de las condiciones anteriores. Esto prueba que el módulo $\langle\!\langle(\underline{x})(\underline{y})\sigma\rangle\!\rangle$ es precisamente el que tiene que estar en cada caso. Al mismo tiempo prueba que si no se cumple ni $\overline{y} \leq \overline{x}$ ni $\overline{x} \leq \overline{y}$ entonces la composición es el morfismo 0 ya que es el único que puede partir del módulo 0 que es el asociado al soporte vacío.

Supongamos primero que $\overline{x} = \overline{yz}$, entonces

$$\Gamma_{(\underline{x})(\underline{y})\sigma,(\underline{y})\sigma} * \Gamma_{(\underline{y})\sigma,\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} =$$

$$\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{z}}\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{z})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{zy})_{\sigma} =$$

$$\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\sigma} = \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}.$$

Supongamos ahora que $\overline{y} = \overline{xz}$, entonces

$$\Gamma_{(\underline{x})(\underline{y})\sigma,(\underline{y})\sigma} * \Gamma_{(\underline{y})\sigma,\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} =$$

$$\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{z}}\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{z})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} = \Gamma_{(\underline{y})\sigma,\sigma}.$$

□

Proposición 4.18. *Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$. Entonces*

$$\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} = \begin{cases} \Gamma_{(\underline{x})(\underline{y})\sigma,(\underline{y})\sigma} & \text{si } \overline{y} \leq \overline{x} \\ \Phi_{(\underline{x})\sigma,(\underline{y})\sigma} & \text{si } \overline{x} \leq \overline{y} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración:
Empecemos suponiendo que $\overline{x}$ y $\overline{y}$ no cumplen ninguna de las dos relaciones, ni $\overline{x} \leq \overline{y}$ ni $\overline{y} \leq \overline{x}$ y que existe un $\overline{z} \in (\underline{x})\sigma$ con $\lambda(\overline{z}) \geq \max(\lambda(\overline{x}), \lambda(\overline{y}))$ tal que $(\langle\underline{z}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} \neq 0$. Como $\overline{z} \in (\underline{x})\sigma$ y $\lambda(\overline{z}) \geq \lambda(\overline{x})$ entonces $\overline{x} \leq \overline{z}$, por lo tanto $(\langle\underline{z}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = \langle\underline{z}\rangle_{\sigma}$, pero como $(\langle\underline{z}\rangle_{\sigma})\Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} \neq 0$, necesariamente se ha de cumplir que $\overline{z} \in (\underline{y})\sigma$, pero como hemos tomado $\overline{z}$ cumpliendo que $\lambda(\overline{z}) \geq \lambda(\overline{y})$ entonces esto implicaría que $\overline{y} \leq \overline{z}$ lo cual es una contradicción porque supondría que $\overline{x}, \overline{y} \in (\!(\overline{z})\!)$ que es un conjunto totalmente ordenado.

Lo que hemos probado pues es que para todo $\overline{z} \in (\underline{x})\sigma$ con $\lambda(\overline{z}) \geq \max(\lambda(\overline{x}), \lambda(\overline{y}))$ se cumple que $(\langle\underline{z}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} = 0$, pero esto implica que $\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} = 0$ por el hecho de que el conjunto

$$\{\langle\underline{z}\rangle_{(\underline{x})\sigma} : \overline{z} \in (\underline{x})\sigma, \lambda(\overline{z}) \geq \max(\lambda(\overline{x}), \lambda(\overline{y}))\}$$

sea un conjunto generador del módulo $\langle\!\langle(\underline{x})\sigma\rangle\!\rangle$.

Supongamos ahora que $\overline{x} \leq \overline{y}$ y sea $\overline{z} \in (\underline{x})\sigma$ con $\lambda(\overline{z}) \geq \lambda(\overline{y}) \geq \lambda(\overline{x})$. Entonces

$$(\langle \underline{z} \rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = \langle \underline{z} \rangle_{\sigma}$$

$$(\langle \underline{z} \rangle_{\sigma})\Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} = \left\{ \begin{matrix} \langle \underline{z} \rangle_{(\underline{y})\sigma} & \text{si } \overline{z} \in (\underline{y})\sigma \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix} \right\} = (\langle \underline{z} \rangle_{(\underline{x})\sigma})\Phi_{(\underline{x})\sigma,(\underline{y})\sigma}.$$

Supongamos por último que $\overline{y} \leq \overline{x}$ y sea $\overline{z} \in (\underline{x})\sigma$ tal que $\lambda(\overline{z}) \geq \lambda(\overline{x}) \geq \lambda(\overline{y})$. Esto hace que $\overline{y} \leq \overline{z}$ y como $\overline{z} \in \sigma$ entonces $\overline{z} \in (\underline{y})\sigma$, podemos pues deducir que

$$(\langle \underline{z} \rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} = (\langle \underline{z} \rangle_{\sigma})\Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} =$$

$$\left\{ \begin{matrix} \langle \underline{z} \rangle_{(\underline{y})\sigma} & \text{si } \overline{z} \in (\underline{y})\sigma \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix} \right\} = \langle \underline{z} \rangle_{(\underline{y})\sigma} = (\langle \underline{z} \rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})(\underline{y})\sigma,(\underline{y})\sigma}.$$

□

PROPOSICIÓN 4.19. *Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y $\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$. Entonces*

1. $\forall \overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma$, $\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} = \mathrm{id}_{\langle\langle(\underline{x})\sigma\rangle\rangle}$.
2. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \partial\xi \cap \sigma$, $\overline{x} \neq \overline{y}$, $\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} = 0$.
3. $\forall \alpha \in \langle\langle\sigma\rangle\rangle$, $\alpha = \sum_{\overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma} (\alpha)\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}$.

De todo lo anterior se deduce que

$$\langle\langle\sigma\rangle\rangle \simeq \coprod_{\overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma} \langle\langle(\underline{x})\sigma\rangle\rangle.$$

Demostración:
Utilizando la Proposición 4.18 deducimos inmediatamente el apartado (1). El apartado (2) también se deduce de dicha proposición teniendo en cuenta que si $\overline{x}, \overline{y} \in \partial\xi$, si $\overline{x} < \overline{y}$ entonces $\overline{x} \in \xi \cap \partial\xi = \varnothing$ lo cual es imposible, del mismo modo se prueba que $\overline{y} \not< \overline{x}$, por lo tanto, si $\overline{x} \neq \overline{y}$ entonces tampoco se pueden dar ninguna de las desigualdades $\overline{x} \leq \overline{y}$ ni $\overline{y} \leq \overline{x}$ con lo que deducimos (2) usando la Proposición 4.18.

Para obtener el apartado (3) vamos a escribir α como

$$\alpha = \sum_{\overline{z} \in X^m \cap \sigma} a(\overline{z}) \langle \underline{z} \rangle_{\sigma}$$

tal y como nos asegura que lo podemos hacer el Lema 4.4. El número m se tomará de modo que para todo $\overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma$ y para todo

$$\overline{w} \in (\underline{x})\sigma \cap \left(\cup_{\substack{\overline{y} \in \partial\xi \cap \sigma \\ \overline{y} \neq \overline{x}}} (\underline{y})\sigma \right)$$

se tenga que $\lambda(\overline{x}) \leq m$. Esto se puede hacer porque estos conjuntos son finitos. Realmente si miramos con precisión la demostración del Ejemplo 2.43, para conseguir que m cumpla esta condición es suficiente con tomar $m \geq \max\{\lambda(\overline{x}) : \overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma\}$.

Sea $\overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma$, denotaremos $F_{\overline{x}} = X^m \cap (\underline{x})\sigma$. Utilizando la Proposición 2.41 sabemos que

$$\cup_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} F_{\overline{x}} = X^m \cap \sigma$$

y por la elección de m sabemos que para todo $\overline{x} \in \partial\xi\cap\sigma$, $F_{\overline{x}} \cap \cup_{\substack{\overline{y}\in\partial\xi\cap\sigma \\ \overline{x}\neq\overline{y}}} = \varnothing$.

$$(\alpha)\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = \sum_{\overline{y}\in X^m\cap\sigma} a_{\overline{y}}(\langle \underline{y}\rangle_{\sigma})\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} =$$

$$\sum_{\overline{y}\in F_{\overline{x}}} a_{\overline{y}}(\langle \underline{y}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}$$

y como $m \geq \lambda(\overline{x})$ entonces

$$\sum_{\overline{y}\in F_{\overline{x}}} a_{\overline{y}}(\langle \underline{y}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = \sum_{\overline{y}\in F_{\overline{x}}} a_{\overline{y}}\langle \underline{y}\rangle_{\sigma}.$$

Uniendo todas estas igualdades deducimos que

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} (\alpha)\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = \sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}\sum_{\overline{y}\in F_{\overline{x}}} a_{\overline{y}}\langle \underline{y}\rangle_{\sigma} =$$

$$= \sum_{\overline{y}\in\cup_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}F_{\overline{x}}} a_{\overline{y}}\langle \underline{y}\rangle_{\sigma} = \sum_{\overline{y}\in X^m\cap\sigma} a_{\overline{y}}\langle \underline{y}\rangle_{\sigma} = \alpha.$$

□

Definición 4.20. Sean σ y τ dos soportes unitarios tales que $\sigma \subseteq_{\oplus} \tau$, entonces vamos a definir

$$\Gamma_{\sigma,\tau} : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle$$

del modo siguiente: utilizando la Proposición 2.46 sabemos que existe un soporte de torsión ξ y un subconjunto finito $F \subseteq \partial\xi \cap \tau$ tal que $\sigma = \cup_{\overline{x}\in F}(\underline{x})\tau$, entonces definiremos

$$\Gamma_{\sigma,\tau} = \sum_{\overline{x}\in F} \Phi_{\sigma,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau}.$$

Ejercicio 4.5. Demostrar que el valor de $\Gamma_{\sigma,\tau}$ dado en la Definición 4.20 no depende de la elección del soporte ξ ni del conjunto finito F.

Solución:
Utilizando el Ejercicio 2.15 sabemos que $F = \partial\xi \cap \sigma$, por lo tanto F no supone ninguna elección. Lo que si supone una elección es el soporte de torsión ξ. Supongamos que tenemos dos soportes de torsión ξ, ξ' tales que

$$\cup_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(\underline{x})\tau = \sigma = \cup_{\overline{x}\in\partial\xi'\cap\sigma}(\underline{x})tau.$$

Sea $\zeta = \xi \cup \xi'$. Este soporte es un soporte de torsión por ser una unión de dos soportes de torsión. Además, por el Ejercicio 2.15 sabemos que para todo $\overline{x} \in \partial\zeta \cap \sigma$, $(\underline{x})\tau = (\underline{x})\sigma$, por lo tanto

$$\sigma = \cup_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\sigma}(\underline{x})\sigma = \cup_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\sigma}(\underline{x})\tau.$$

Si demostramos que la definición de $\Gamma_{\sigma,\tau}$ hecha con ξ es la misma que si la hacemos con ζ, de forma simétrica tendríamos que la definición hecha con ξ' es la misma que la hecha con ζ, por lo tanto tendríamos el resultado que deseamos.

La definición de $\Gamma_{\sigma,\tau}$ hecha con ξ es

$$\Gamma_{\sigma,\tau} = \sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} \Phi_{\sigma,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} =$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}\sum_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap(\underline{x})\tau} \Phi_{\sigma,(\underline{x})\tau} * \Phi_{(\underline{x})\tau,(\underline{y})(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})(\underline{x})\tau,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau}$$

Como $\overline{y} \in \partial\zeta$ y $\xi \subseteq \zeta$, entonces $\overline{x} \leq \overline{y}$ para todo $\overline{x} \in \partial\xi \cap \sigma$ y todo $\overline{y} \in \partial\zeta \cap (\underline{x})\tau$, por lo tanto $(\underline{y})(\underline{x})\tau = (\underline{y})\tau = (\underline{y})\sigma$ y $(\underline{x})\tau = (\underline{x})\sigma$, de ahí deducimos que

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}\sum_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap(\underline{x})\tau} \Phi_{\sigma,(\underline{x})\tau} * \Phi_{(\underline{x})\tau,(\underline{y})(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})(\underline{x})\tau,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} =$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}\sum_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap(\underline{x})\sigma} \Phi_{\sigma,(\underline{y})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})\tau,\tau} =$$

$$\sum_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap(\cup_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(\underline{x})\sigma)} \Phi_{\sigma,(\underline{y})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})\tau,\tau} = \sum_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap\sigma} \Phi_{\sigma,(\underline{y})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})\tau,\tau}$$

que es precisamente la igualdad que buscábamos. □

Proposición 4.21. *Sean ρ, σ, τ soportes unitarios tales que $\rho \subseteq_\oplus \sigma \subseteq_\oplus \tau$, entonces*

$$\Gamma_{\rho,\sigma} * \Gamma_{\sigma,\tau} = \Gamma_{\rho,\tau}.$$

Demostración:
Tomemos ξ y ξ' dos soportes de torsión tales que $\sigma = \cup_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(\underline{x})\tau$ y $\rho = \cup_{\overline{y}\in\partial\xi'\cap\rho}(\underline{y})\sigma$. Tomemos $\zeta = \xi \cup \xi'$, entonces tenemos que $\sigma = \cup_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\sigma}(\underline{x})\tau$ y $\rho = \cup_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap\rho}(\underline{x})\sigma = \cup_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap\rho}(\underline{x})\tau$. Aplicando la definición tenemos que

$$\Gamma_{\rho,\sigma} * \Gamma_{\sigma,\tau} =$$

$$\left(\sum_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\rho} \Phi_{\rho,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}\right) * \left(\sum_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap\sigma} \Phi_{\sigma,(\underline{y})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})\tau,\tau}\right)$$

Si $\overline{x}, \overline{y} \in \partial\zeta$, entonces $\overline{x}$ e $\overline{y}$ no son comparables a no ser que sean iguales, y tenemos que $\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\tau} = \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma}$ es igual a $\mathrm{id}_{\langle\langle(\underline{x})\sigma\rangle\rangle}$ si $\overline{x} = \overline{y}$ y 0 en otro caso, esto reduce nuestra suma del siguiente modo

$$\left(\sum_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\rho} \Phi_{\rho,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}\right) * \left(\sum_{\overline{y}\in\partial\zeta\cap\sigma} \Phi_{\sigma,(\underline{y})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})\tau,\tau}\right) =$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\rho} \Phi_{\rho,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} = \Gamma_{\rho,\tau}.$$

□

PROPOSICIÓN 4.22. *Sean* $\sigma_1, \cdots, \sigma_n, \tau$ *soportes unitarios tales que* $\uplus_{i=1}^{n} \sigma_i = \tau$, *entonces*

1. $\Gamma_{\sigma_i,\tau} * \Phi_{\tau,\sigma_i} = \mathrm{id}_{\langle\langle \sigma_i \rangle\rangle}$ *para todo* i.
2. $\Gamma_{\sigma_j,\tau} * \Phi_{\tau,\sigma_i} = 0$ *para todo* $i \neq j$.
3. $\sum_{i=1}^{n} \Phi_{\tau,\sigma_i} * \Gamma_{\sigma_i,\tau} = \mathrm{id}_{\langle\langle \tau \rangle\rangle}$.

Todo lo anterior prueba que

$$\langle\langle \tau \rangle\rangle \simeq \coprod_{i=1}^{n} \langle\langle \sigma_i \rangle\rangle.$$

Demostración:
Como todos los $\sigma_i \subseteq_{\oplus} \tau$, podemos encontrar $\xi_i \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ tal que $\sigma_i = \cup_{\overline{x} \in \partial \xi_i \cap \sigma_i} (\underline{x})\tau$. Tomando $\zeta = \cup_{i=1}^{n} \xi_i$, deducimos que $\sigma_i = \cup_{\overline{x} \in \partial \zeta \cap \sigma_i} (\underline{x})\tau$.

El morfismo identidad en $\langle\langle \sigma_j \rangle\rangle$ se puede poner como

$$\mathrm{id}_{\langle\langle \sigma_j \rangle\rangle} = \sum_{\overline{y} \in \partial \zeta \cap \sigma_j} \Phi_{\sigma_j,(\underline{x})\sigma_j} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma_j,\sigma_j}.$$

Por lo tanto

$$\Gamma_{\sigma_i,\tau} * \Phi_{\tau,\sigma_j} =$$

$$\left(\sum_{\overline{x} \in \partial \zeta \cap \sigma_i} \Phi_{\sigma_i,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} \right) * \Phi_{\tau} \sigma_j * \left(\sum_{\overline{y} \in \partial \zeta \cap \sigma_j} \Phi_{\sigma_j,(\underline{y})\sigma_j} * \Gamma_{(\underline{y})\sigma_j,\sigma_j} \right) =$$

$$\sum_{\substack{\overline{x} \in \partial \zeta \cap \sigma_i \\ \overline{y} \in \partial \zeta \cap \sigma_j}} \Phi_{\sigma_i,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} * \Phi_{\tau,(\underline{y})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})\sigma_j,\sigma_j}$$

Si $\overline{x} \neq \overline{y}$ entonces $\Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} * \Phi_{\tau,(\underline{y})\tau} = 0$ por lo tanto si $i \neq j$ la suma de estos morfismos es 0. Si $i = j$ tenemos que

$$\sum_{\substack{\overline{x} \in \partial \zeta \cap \sigma_i \\ \overline{y} \in \partial \zeta \cap \sigma_j}} \Phi_{\sigma_i,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} * \Phi_{\tau,(\underline{y})\tau} * \Gamma_{(\underline{y})\sigma_j,\sigma_j} =$$

$$\sum_{\overline{x} \in \partial \zeta \cap \sigma_i} \Phi_{\sigma_i,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} * \Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma_i,\sigma_i} =$$

$$\sum_{\overline{x} \in \partial \zeta \cap \sigma_i} \Phi_{\sigma_i,(\underline{x})\tau} * \mathrm{id}_{\langle\langle (\underline{x})\tau \rangle\rangle} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma_i,\sigma_i} =$$

$$\sum_{\overline{x} \in \partial \zeta \cap \sigma_i} \Phi_{\sigma_i,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma_i,\sigma_i} = \mathrm{id}_{\langle\langle \sigma_i \rangle\rangle}$$

Para ver la última parte pongamos

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_{\tau,\sigma_i} * \Gamma_{\sigma_i,\tau} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\overline{x} \in \partial \zeta \cap \sigma_i} \Phi_{\tau,\sigma_i} * \Phi_{\sigma_i,(\underline{x})\sigma_i} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma_i,\sigma_i} * \Gamma_{\sigma_i,\tau} =$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\cup_{i=1}^n\sigma_i} \Phi_{\tau,\sigma_i} * \Phi_{\sigma_i,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\sigma_i} * \Gamma_{\sigma_i,\tau} =$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\zeta\cap\tau} \Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} = \mathrm{id}_{\langle\langle\tau\rangle\rangle}.$$

□

PROPOSICIÓN 4.23. *Sean $\sigma \subseteq \tau$ dos soportes unitarios. Entonces*

1. *Para todo $\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau$ se tiene que $\Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} * \Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} = \mathrm{id}_{\langle\langle(\underline{x})\tau\rangle\rangle}$.*
2. *Para todo $\overline{x}, \overline{y} \in \partial\sigma\cap\tau$, con $\overline{x} \neq \overline{y}$ se tiene que $\Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} * \Phi_{\tau,(\underline{y})\tau} = 0$.*
3. *Para todo $\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau$, $\Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} * \Phi_{\tau,\sigma} = 0$.*
4. *Para todo $\alpha \in \mathrm{Ker}(\Phi_{\tau,\sigma})$, el conjunto*
$$\{\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau : (\alpha)\Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} \neq 0\}$$
es finito.
5. *Para todo $\alpha \in \mathrm{Ker}(\Phi_{\tau,\sigma})$, se tiene que*
$$\alpha = \sum_{\overline{x}\in\partial\sigma\cap\tau} (\alpha)\Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau}.$$

De todo lo anterior se deduce que

$$\mathrm{Ker}(\Phi_{\tau,\sigma}) \simeq \coprod_{\overline{x}\in\partial\sigma\cap\tau} \langle\langle(\underline{x})\tau\rangle\rangle.$$

Demostración:
Los apartados (1) y (2) se deducen directamente de la Proposición 4.18.

(3). Sea $\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau$ y $\overline{y} \in (\underline{x})\tau$ con $\lambda(\overline{y}) \geq \lambda(\overline{x})$, entonces

$$(\langle \underline{y} \rangle_{(\underline{x})\tau})\Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} * \Phi_{\tau,\sigma} = (\langle \underline{y} \rangle_{\tau})\Phi_{\tau,\sigma}$$

pero este último elemento es 0 porque $\overline{y} \in \partial\sigma$ por lo tanto $\overline{y} \notin \sigma$.

(4). Sea $\alpha \in \mathrm{Ker}(\Phi_{\tau,\sigma})$. Como α en particular está en $\langle\langle\tau\rangle\rangle$, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ y unos elementos $r(\overline{x}) \in R$ con $\overline{x}$ recorriendo $X^n \cap \tau$ tales que

$$\alpha = \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\tau} r(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_{\tau}.$$

Si aplicamos $\Phi_{\tau,\sigma}$ a este elemento obtenemos

$$0 = (\alpha)\Phi_{\tau,\sigma} = \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} r(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_{\tau}$$

de donde deducimos que podemos encontrar un $m \geq n$ tal que para todo $\overline{z} \in X^m \cap \sigma$, $r(z_1 \cdots z_n)\pi(z_{n+1} \cdots z_m) = 0$, por lo tanto

$$\alpha = \sum_{\overline{x}\in X^m\cap(\tau\setminus\sigma)} r(x_1 \cdots x_n)\pi(x_{n+1} \cdots x_m)\langle \underline{x} \rangle_{\tau}$$

Vamos a probar que el conjunto

$$\{\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau : (\alpha)\Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} \neq 0\}$$

es finito viendo que está contenido en $\{\overline{x} \in \tau : \lambda(\overline{x}) \leq m\}$.

Sea $\overline{x} \in \tau \cap \partial\sigma$ con $\lambda(\overline{x}) > m$. Como $\overline{x} \in \partial\sigma$, entonces $x_1 \cdots x_m \in \sigma$, por lo tanto

$$(\alpha)\Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} = r(x_1 \cdots x_n)\pi(x_{n+1} \cdots x_{\lambda(\overline{x})})\langle \underline{x} \rangle_{(\underline{x})\tau} = 0$$

ya que $r(x_1 \cdots x_n)\pi(x_{n+1} \cdots x_m) = 0$ para todo $x_1 \cdots x_m \in \sigma$.

(5). Sea $\alpha \in \mathrm{Ker}(\Phi_{\tau,\sigma})$. Vamos a seguir con las notaciones del apartado anterior.

Consideremos el soporte de torsión $\xi = \sigma \cap (\cup_{k=0}^{m-1} X^k)$ (es de torsión por ser un subsoporte de uno de torsión). Empecemos demostrando que

$$\partial\xi \cap \tau = \{\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau : \lambda(\overline{x}) < m\} \cup \{\overline{x} \in \sigma : \lambda(\overline{x}) = m\}$$

Sea $x_1 \cdots x_k \in \partial\xi \cap \tau$. Por estar $x_1 \cdots x_k \in \partial\xi$ sabemos que $x_1 \cdots x_{k-1} \in \xi$. Por estar este elemento en ξ sabemos que $k \leq m$. Si $k < m$ entonces $x_1 \cdots x_k \in \cup_{t=0}^{m-1} X^t$ y necesariamente tendríamos que tener que $x_1 \cdots x_k \notin \sigma$ por lo que deduciríamos que $x_1 \cdots x_k \in \partial\sigma$. Si por el contrario $x_1 \cdots x_k \notin \partial\sigma$ entonces como $x_1 \cdots x_{k-1} \in \sigma$, tendría que ser porque $x_1 \cdots x_k \in \sigma$, pero como $(x_1 \cdots x_k) \notin \xi$ tenemos que tener $x_1 \cdots x_k \notin \cup_{t=0}^{m-1} X^t$, es decir $k \geq m$. Como antes hemos deducido que $k \leq m$ concluimos que se tiene que cumplir $k = m$.

Hemos probado que $\partial\xi \cap \tau \subseteq \{\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau : \lambda(\overline{x}) < m\} \cup \{\overline{x} \in \sigma : \lambda(\overline{x}) = m\}$, para ver el otro contenido no hay mas que aplicar en cada caso la definición de frontera.

Entonces tenemos que

$$\alpha = \sum_{\overline{x} \in \partial\xi \cap \tau} (\alpha)\Phi_{\tau(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} =$$

$$\sum_{\substack{\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau \\ \lambda(\overline{x}) < m}} (\alpha)\Phi_{\tau(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} + \sum_{\overline{x} \in X^m \cap \sigma} \underbrace{(\alpha)\Phi_{\tau(\underline{x})\tau}}_{=0} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} =$$

$$\sum_{\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau} (\alpha)\Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} - \sum_{\substack{\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau \\ \lambda(\overline{x}) > m}} \underbrace{(\alpha)\Phi_{\tau,(\underline{x})\tau}}_{=0} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau} =$$

$$\sum_{\overline{x} \in \partial\sigma \cap \tau} (\alpha)\Phi_{\tau,(\underline{x})\tau} * \Gamma_{(\underline{x})\tau,\tau}.$$

□

3. Homomorfismos con Módulos del Tipo $\langle\langle\sigma\rangle\rangle$

DEFINICIÓN 4.24. Sea ${}_AM$ un A-módulo por la izquierda y $f : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ un homomorfismo para algún soporte unitario σ. Denotaremos

$$\chi(f) = \{\overline{x} \in \sigma : \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * f \neq 0\}.$$

PROPOSICIÓN 4.25. *Sea $f : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ un A-homomorfismo, entonces $\chi(f)$ es un soporte unitario.*

Demostración:
Como $\chi(f) \subseteq \sigma$, para todo $\overline{x} \in \chi(f)$, $X \cap \Delta_{\underline{x}}\chi(f) \subseteq X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma$ que es finito, por lo tanto $X \cap \Delta_{\underline{x}}\chi(f)$ es finito, tenemos que probar que también es no vacío, para ello tomemos $\overline{x} \in \chi(f)$, $n = \lambda(\overline{x})$,

$$0 \neq \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * f = \sum_{\overline{y} \in X^{n+1} \cap (\underline{x})\sigma} \Phi_{(\underline{x})\sigma,(\underline{y})(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{y})(\underline{x})\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * f$$

Si $\overline{y} \in X^{n+1} \cap (\underline{x})\sigma$ entonces $\overline{y} = \overline{x}z$ para algún $z \in X$, además $z \in \Delta_{\underline{x}}(\underline{x})\sigma = \Delta_{\underline{x}}\sigma$. Recíprocamente, si $z \in \Delta_{\underline{x}}\sigma \cap X$ entonces $\overline{x}z \in X^{n+1} \cap (\underline{x})$, podemos pues poner la igualdad anterior como

$$\sum_{\overline{y} \in X^{n+1} \cap (\underline{x})\sigma} \Phi_{(\underline{x})\sigma,(\underline{y})(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{y})(\underline{x})\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * f =$$
$$\sum_{z \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \Phi_{(\underline{x})\sigma,(z\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(z\underline{x})\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * f =$$
$$\sum_{z \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \Phi_{(\underline{x})\sigma,(z\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(z\underline{x})\sigma,\sigma} * f.$$

Por lo tanto, como la suma de estos morfismos no es nula, alguno de ellos ha de ser no nulo y de ahí deducimos que para todo $\overline{x} \in \chi(f)$, existe un $z \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma$ tal que $\overline{x}z \in \chi(f)$ o lo que es lo mismo, que $X \cap \Delta_{\underline{x}}\chi(f)$ es no vacío. $\square$

PROPOSICIÓN 4.26. *Sea $f : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ un A-homomorfismo. Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{cccc} \overline{f}: & \langle\langle\chi(f)\rangle\rangle & \to & M \\ & \langle\underline{x}\rangle_{\chi(f)} & \mapsto & (\langle\underline{x}\rangle_\sigma)f \end{array}$$

es un homomorfismo de A-módulos. Además se cumple que $\Phi_{\sigma,\chi(f)} * \overline{f} = f$.

Demostración:
La comprobación de que $\Phi_{\sigma,\chi(f)} * \overline{f} = f$ es trivial a partir de la definición. El único problema está en comprobar que se cumplen las relaciones entre los generadores.

Sea $\overline{x} \in \sigma \setminus \chi(f)$, entonces $\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * f = 0$ y por lo tanto

$$0 = (\langle\underline{x}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * f = (\langle\underline{x}\rangle_\sigma)f$$

Sea ahora $\overline{x} \in \chi(f)$,

$$(\langle\underline{x}\rangle_{\chi(f)})\overline{f} = (\langle\underline{x}\rangle_\sigma)f =$$
$$\sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)(\langle y\underline{x}\rangle_\sigma)f =$$
$$\sum_{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\chi(f)} \pi(y)(\langle y\underline{x}\rangle_\sigma)f + \underbrace{\sum_{\substack{y \in X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma \\ \overline{x}y \notin \chi(f)}} \pi(y)(\langle y\underline{x}\rangle_\sigma)f}_{=0} =$$

$$\sum_{y\in X\cap\Delta_{\underline{x}}\chi(f)} \pi(y)(\langle y\underline{x}\rangle_\sigma)f = \sum_{y\in X\cap\Delta_{\underline{x}}\chi(f)} \pi(y)(\langle y\underline{x}\rangle_{\chi(f)})\overline{f}.$$

$\square$

PROPOSICIÓN 4.27. *Sean $\tau\subseteq\sigma$ dos soportes unitarios y $f:\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle\to M$, $g:\langle\!\langle\tau\rangle\!\rangle\to M$, A-homomorfismos tales que $\Phi_{\sigma,\tau}*g=f$, entonces*

1. *$\chi(f)\subseteq\tau$.*
2. *$\Phi_{\tau,\chi(f)}*\overline{f}=g$ siendo $\overline{f}$ el homomorfismo definido en la proposición anterior.*
3. *$\chi(f)=\chi(g)$.*
4. *$\overline{f}=\overline{g}$.*

Demostración:
Sea $\overline{x}\in\chi(f)$, entonces por definición de $\chi(f)$ tenemos que $\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}*f\neq 0$ por lo tanto $\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}*\Phi_{\sigma,\tau}*g\neq 0$ y tendrá que existir un $\overline{y}\in(\underline{x})\sigma$ tal que

$$(\langle\underline{y}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}*\Phi_{\sigma,\tau}*g\neq 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda(\overline{y})\geq\lambda(\overline{x})$, pero entonces

$$0\neq(\langle\underline{y}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma}*\Phi_{\sigma,\tau}*g=$$
$$(\langle\underline{y}\rangle_{\sigma})*\Phi_{\sigma,\tau}*g$$

por lo tanto $\overline{y}\in\tau$ y como τ es un soporte y $\overline{x}\leq\overline{y}$ entonces $\overline{x}\in\tau$. Esto prueba que $\chi(f)\subseteq\tau$.

La prueba de (2) consiste únicamente en calcular la imagen de cada uno de los generadores. Aplicando dos veces (1) deducimos (3) y (4) es una consecuencia directa de (3) y de la definición de $\overline{f}$ y $\overline{g}$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.28. *Sea ${}_AM$ un A-módulo por la izquierda y consideremos $f:\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle\to M$ y $g:\langle\!\langle\tau\rangle\!\rangle\to M$ dos A-homomorfismos tales que representan al mismo elemento de*

$$\varinjlim_{\rho\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)}\mathrm{Hom}_A(\langle\!\langle\rho\rangle\!\rangle,M).$$

Entonces $\chi(f)=\chi(g)$, el morfismo $\overline{f}:\langle\!\langle\chi(f)\rangle\!\rangle\to M$ representa al mismo elemento y $\overline{f}=\overline{g}$.

Demostración:
Que estos dos morfismos representen al mismo elemento significa en términos de morfismos, que existe un soporte unitario $\rho\geq\sigma\cup\tau$ tal que $\Phi_{\rho,\sigma}*f=\Phi_{\rho,\tau}*g$. Entonces utilizando la proposición anterior deducimos que

$$\chi(f)=\chi(\Phi_{\rho,\sigma}*f)=\chi(\Phi_{\rho,\tau}*g)=\chi(g).$$

Además, como $\Phi_{\sigma,\chi(f)}*\overline{f}=f$ deducimos que f y $\overline{f}$ representan el mismo elemento en $\varinjlim_{\rho\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)}\mathrm{Hom}_A(\langle\!\langle\rho\rangle\!\rangle,M)$. $\square$

Definición 4.29. Sea ${}_AM$ un A-módulo por la derecha y sea

$$\alpha \in \varinjlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \operatorname{Hom}_A(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle, M).$$

Denotaremos con $\chi(\alpha)$ a $\chi(f)$ donde $f : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to M$ es cualquier morfismo que represente a α y con $\overline{\alpha} : \langle\!\langle \chi(\alpha) \rangle\!\rangle \to M$ al morfismo correspondiente a $\overline{f}$.

Notemos que la Proposición anterior nos garantiza que la definición no depende de la elección de $f : \sigma \to M$ siempre que f represente a α.

4. Un Generador Para R-DMod

Para construir un generador en la categoría R-DMod necesitamos exigir una condición adicional al conjunto X y a la aplicación $\pi : X \to R$. Esta condición va a ser la de que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R con la Definición 3.25. De momento empecemos viendo algunos resultados previos.

Lema 4.30. *Sea ${}_AM$ un A-módulo por la izquierda, X un conjunto T-generador por la derecha de R. Entonces $RM = M$ si y solo si $XM = M$.*

Demostración:
Si $XM = M$, como $X \subseteq R$, tenemos que $M = XM \subseteq RM$ y por lo tanto $M = RM$ ya que el contenido $RM \subseteq M$ siempre se da.

Antes de ver el recíproco, vamos a ver que si $M = RM$, se cumple que para todo $a \in A$ y todo $m \in M$, si $am \notin XM$, entonces existe $r' \in R$ y $m' \in M$ tal que $ar'm' \notin XM$. Si $rm \notin XM$, como $m \in M = RM$ podemos encontrar una suma finita del tipo $m = \sum_{i=1}^{t} r_i m_i$ con $r_i \in R$ y $m_i \in M$. Como $am \notin XM$, entonces $\sum_{i=1}^{t} ar_i m_i \notin XM$ por lo que podremos encontrar un $i \in \{1, \cdots, t\}$ tal que $ar_i m_i \notin XM$ puesto que si todos están en XM su suma también está. Para este i tomaremos como $r' = r_i$ y $m' = m_i$.

Vamos por fin a probar el resultado, si $RM = M$ supongamos que existe un $m \in M \setminus XM$, entonces tal y como acabamos de probar, existirá un $r_1 \in R$ y un $m_1 \in M$ tal que $r_1 m_1 \notin XM$. Aplicando de nuevo el resultado, encontramos un $r_2 \in R$ y un $m_2 \in M$ tal que $r_1 r_2 m_2 \notin XM$. Así sucesivamente encontramos una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de R y otra $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de M tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $r_1 \cdots r_n m_n \notin XM$. Ahora bien, como X es un conjunto T-generador por la derecha de R, podremos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_1 \cdots r_{n_0} \in XR$, pero entonces $r_1 \cdots r_{n_0} m_{n_0} \in XRM \subseteq XM$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M = XM$. □

Proposición 4.31. *Sea X un conjunto, $\pi : X \to R$ una aplicación. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *$\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R.*

2. *Para todo A-módulo por la izquierda ${}_AM$ tal que $RM = M$ se cumple que $\pi(X)M = M$.*
3. *Para todo A-módulo por la izquierda ${}_AM$ en la categoría R-*DMod *se cumple que $\pi(X)M = M$.*

Demostración:
La implicación $(1 \Rightarrow 2)$ la hemos visto en el lema anterior. La $(2 \Rightarrow 3)$ es trivial ya que todos los módulos de la categoría R-DMod cumplen que $RM = M$. Vamos a ver que $(3 \Rightarrow 1)$. Para ello supongamos por reducción al absurdo que existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $r_1 \cdots r_n \notin \pi(X)R$. Consideremos el conjunto $X' = \mathbb{N}$ y la aplicación $\pi' : \mathbb{N} \to R$ dada por $\pi'(n) = r_n$. Consideremos también el soporte unitario sobre X', $\sigma' = (\!(n : n \in \mathbb{N})\!)$ y el módulo $\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle$.

Por la Proposición 4.7 sabemos que $\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle$ está en la categoía R-DMod, por lo que se tendrá que cumplir que $\pi(X)\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle$, en particular, $\langle \varnothing \rangle_{\sigma'} \in \pi(X)\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle$. Podemos pues encontrar elementos $x_k \in X$ y $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle \varnothing \rangle_{\sigma'} = \sum_{k=1}^{t} \pi(x_k)\langle n_k \cdots 1 \rangle_{\sigma'}$$

Tomemos $n = \max(n_1, \cdots, n_t)$, entonces

$$r_1 \cdots r_n \langle n \cdots 1 \rangle_{\sigma'} = \langle \varnothing \rangle_{\sigma'} = \sum_{k=1}^{t} \pi(x_k)\langle n_k \cdots 1 \rangle_{\sigma'} =$$

$$\sum_{k=1}^{t} \pi(x_k) r_{n_k+1} \cdots r_n \langle n \cdots 1 \rangle_{\sigma'}$$

por lo tanto

$$\left(r_1 \cdots r_n - \sum_{k=1}^{t} \pi(x_k) r_{n_k+1} \cdots r_n \right) \langle n \cdots 1 \rangle_{\sigma'} = 0$$

y podemos aplicar la Proposición 4.5 y deducir que existe un $n_0 \geq n$ tal que

$$\left(r_1 \cdots r_n - \sum_{k=1}^{t} \pi(x_k) r_{n_k+1} \cdots r_n \right) r_{n+1} \cdots r_{n_0} = 0$$

por lo que

$$r_1 \cdots r_{n_0} = \sum_{k=1}^{t} \pi(x_k) r_{n_k+1} \cdots r_{n_0} \in \pi(X)R$$

lo cual es una contradicción. □

Proposición 4.32. *Sea X un conjunto no vacío, $\pi(X) \to R$ una aplicación y ${}_AM$ un A-módulo por la izquierda. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *$\pi(X)M = M$.*

2. *Para todo $m \in M$ existe un soporte unitario σ y un A-homomorfismo $f : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ tal que $(\langle\varnothing\rangle_\sigma)f = m$.*

Demostración:
$(2 \Rightarrow 1)$. Si $m = (\langle\varnothing\rangle_\sigma)f$ entonces

$$m = (\sum_{x\in X\cap\sigma} (\pi(x)\langle x\rangle_\sigma)f = \sum_{x\in X\cap\sigma} \pi(x)(\langle x\rangle_\sigma)f \in \pi(X)M$$

por lo tanto para todo $m \in M$ tenemos que $m \in \pi(X)M$.

$(1 \Rightarrow 2)$. Si $m = 0$ claramente para cualquier soporte unitario σ, el homomorfismo 0 nos cumple que $(\langle\varnothing\rangle_\sigma)0 = 0$. Podemos pues suponer que $m \neq 0$. Vamos a ir construyendo el soporte y el homomorfismo al mismo tiempo de forma recursiva.

Sea $V_0 = \{\varnothing\}$ y $h_0 : V_0 \to M$ la aplicación que lleva $\varnothing$ a m. Como $m \in M = \pi(X)M$, podremos encontrar unos ciertos elementos $x_1 \cdots x_k \in X$ que sin pérdida de generalidad podemos suponer todos distintos, y unos $m_1 \cdots m_k \in M$ todos no nulos, tales que $m = \sum_i \pi(x_i)m_i$. Definiremos $V_1 = \{x_1, \cdots, x_k\}$ y $h_1 : V_1 \to M$, la aplicación que lleva x_i a m_i.

Supongamos que ya hemos definido el conjunto finito $V_n \subseteq X^n$ y la aplicación $h_n : V_n \to M$, vamos a definir V_{n+1} y h_{n+1} del siguiente modo. Sea $\overline{x} \in V_n$ como $h(\overline{x}) \in M = \pi(X)M$ podemos encontrar un subconjunto finito $W_{\overline{x}} \subseteq X$ y una aplicación $g_{\overline{x}} : W_{\overline{x}} \to M \setminus \{0\}$ tal que $h_n(\overline{x}) = \sum_{y\in W_{\overline{x}}} \pi(y)g_{\overline{x}}(y)$. Definiremos

$$V_{n+1} = \{x_1 \cdots x_{n+1} \in X^{n+1} : x_1 \cdots x_n \in V_n, x_{n+1} \in W_{x_1\cdots x_n}\}$$

$$\begin{array}{rccc} h_{n+1} : & V_{n+1} & \to & M \\ & x_1 \cdots x_{n+1} & \mapsto & g_{x_1\cdots x_n}(x_{n+1}). \end{array}$$

Una vez definidos todos los V_n definiremos $\sigma = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Por construcción, para cada $x_1 \cdots x_{n+1} \in V_{n+1}$ tenemos que $x_1 \cdots x_n \in V_n$ ya que partimos de los elementos de V_n para encontrar los de V_{n+1}. También por la construcción, para todo $\overline{x} \in \sigma$, el conjunto $X \cap \Delta_{\underline{x}}\sigma = W_{\overline{x}}$ que es finito y no vacío (no puede ser vacío porque si no tendíamos que $h_{\lambda(\overline{x})}(\overline{x}) = 0$ y eso es imposible. Esto prueba que σ así definido es un soporte unitario sobre X. Definiremos $h : \sigma \to M$ como $h(\overline{x}) = h_{\lambda(\overline{x})}(\overline{x})$.

Si ponemos $\langle\langle\sigma\rangle\rangle$ como L/K podemos definir $\bar{f} : L \to M$ como $((\underline{x})l)\bar{f} = h(\overline{x})$, además, para todo $\overline{x} \in \sigma$ se tiene que

$$\sum_{y\in X\cap\Delta_{\underline{x}}\sigma} \pi(y)((y\underline{x})l)\bar{f} = \sum_{y\in W_{\overline{x}}} \pi(y)h(\overline{x}) = h(\overline{x}y) = ((y\underline{x})l)\bar{f}$$

por lo tanto $((\underline{x})k)\bar{f} = 0$ para todo $\overline{x} \in \sigma$ y podemos pues definir $f : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ como $((\underline{x})l + K)f = ((\underline{x})l)\bar{f}$. De este modo obtenemos el homomorfismo $f : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to M$ tal que $(\langle\varnothing\rangle_\sigma)f = h_0(\varnothing) = m$. □

PROPOSICIÓN 4.33. *Sea X un conjunto, $\pi : X \to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R. Entonces* *el módulo*

$$\coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$$

es un generador de la categoría R-DMod.

Además, este generador es un módulo plano como objeto de A-Mod.

Demostración:
Sean $f, g : M \to N$ dos morfismos en R-DMod tales que $f \neq g$. Entonces existirá un elemento $m \in M$ tal que $(m)g \neq (m)f$. Como el conjunto $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R, $\pi(X)M = M$ y aplicando el resultado anterior podemos encontrar un soporte unitario σ y un homomorfismo $h : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to M$ tal que $(\langle\varnothing\rangle_\sigma)h = m$. Consideremos también la aplicación canónica $p_\sigma : \coprod_{\tau\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\tau\rangle\!\rangle \to \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$, entonces $p_\sigma * h * f \neq p_\sigma * h * g$ ya que difieren al menos en el valor que toman para el elemento de $\coprod_{\tau\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\tau\rangle\!\rangle$ que tiene $\langle\varnothing\rangle_\sigma$ en la componente σ-ésima y 0 en todas las demás.

La razón por la que este módulo es plano en A-Mod es por ser coproducto de módulos planos, siendo estos módulos planos como consecuencia de la Proposición 4.10. □

5. La Independencia del Anillo Ambiente II

Hasta ahora hemos construido unos ciertos módulos en R-DMod. Sabemos que R-DMod es una subcategoría plena de A-Mod para cualquier anillo A en el que R sea un ideal bilátero. Mas aun, sabemos que si $\beta : R \to B$ es un homomorfismo de anillos con B un anillo con identidad, tal que $\mathrm{Ker}(\beta)$ y $\mathrm{Coker}(\beta)$ es de torsión como R-módulos por la derecha, entonces R-DMod es una subcategoría plena de B-Mod.

El caso del anillo B y el homomorfismo $\beta : R \to B$ con núcleo y conúcleo de torsión incluye en particular al caso del anillo A en el cual R es un ideal bilátero, por lo tanto vamos a ver la independencia de esta elección en este caso general.

Si $\pi : X \to R$ es la aplicación que estamos considerando, podemos componerla con β y obtener $\beta\circ\pi : X \to B$. Dado un $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, podemos construir el módulo $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ utilizando la extensión de Dorroh de R, ${}^{\mathbb{Z}\times}R$, por un lado y por otro podemos construir el módulo que momentáneamente denotaremos $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle^\beta$ con la aplicación $\beta\circ\pi$ y el anillo B (B en particular es un ideal bilátero en B). Vamos a ver que ambos módulos son isomorfos de la forma canónica.

PROPOSICIÓN 4.34. *Con las notaciones anteriores, el homomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} h: & \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle & \to & \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle^\beta \\ & \langle\underline{x}\rangle_\sigma & \mapsto & \langle\underline{x}\rangle_\sigma \end{array}$$

es un isomorfismo.

Demostración:
Si $\sigma = \varnothing$ entonces $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ y $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle^\beta$ son iguales a 0 y en particular isomorfos. Podemos pues suponer que $\sigma \neq \varnothing$.

Como $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle^\beta$ es un B-módulo, en particular es un ${}^{\mathbb{Z}\times}R$-módulo, y h está bien definido como consecuencia del Corolario 4.2.

Supongamos que tenemos un elemento de la forma

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} r(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_\sigma \in \operatorname{Ker}(h)$$

entonces $\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma}(r(\overline{x}))^\beta\langle\underline{x}\rangle_\sigma = 0$ en $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle^\beta$. Podemos pues encontrar un $k \geq n$ tal que $(r(\overline{x})\pi(\overline{y}))^\beta = 0$ para todo $\overline{xy} \in \sigma\cap X^k$ con $\overline{x}\in X^n$, por lo tanto $r(\overline{x})\pi(\overline{y}) \in \operatorname{Ker}(\beta)$ para todo $bxy \in \sigma \cap X^k$ con $\overline{x}\in X^n$. Usando que $\operatorname{Ker}(\beta)$ es de torsión, podremos encontrar un $t \geq k$ tal que para todo $\overline{xz} \in X^t\cap\sigma$ con $\overline{x}\in X^n$, se tenga que $r(\overline{x})\pi(\overline{z}) = 0$, pero de ahí deducimos que

$$\sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} r(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_\sigma = 0 \in \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle.$$

Para probar la suprayectividad, tenemos que ver que todos los elementos de la forma $b\langle\underline{x}\rangle_\sigma$ están en $\operatorname{Im}(h)$ para todo $b\in B$ y todo $\overline{x}\in\sigma$. Como $\operatorname{Coker}(\beta)$ es de torsión, podremos encontrar un $n \geq 0$ tal que para todo $\overline{y}\in\Delta_{\underline{x}}\sigma\cap X^n$, $b\pi(\overline{y})\in R^\beta$, pero entonces

$$b\langle\underline{x}\rangle_\sigma = \sum_{\overline{y}\in X^n\cap\Delta_{\underline{x}}\sigma} b\pi(\overline{y})\langle\underline{yx}\rangle_\sigma \in \operatorname{Im}(h).$$

$\square$

NOTA 4.35. *Como* Mod-B *es una subcategoría plena de* Mod-${}^{\mathbb{Z}\times}R$*, los módulos* $\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ *también son planos en* Mod-B*.*

TEMA 5

Los Funtores C y D

En este tema vamos a fijar un anillo R, un anillo con identidad B y un homomorfismo de anillos $\beta : R \to B$ tal que $\mathrm{Ker}(\beta)$ y $\mathrm{Coker}(\beta)$, considerados como R-módulos por la derecha, sean de torsión.

Cuando hablemos de B-módulos, siempre nos referiremos a módulos unitarios como B-módulos, así se evitarán confusiones al decir que un módulo M_B es unitario, ya que M tiene dos estructuras, la de R-módulo y la de B-módulo. Si a lo largo del tema decimos que un módulo M_B es unitario, nos referiremos a que es unitario como R-módulo, es decir, $MR = M$, ya que como B-módulo siempre será unitario sin mencionarlo expresamente. Lo mismo pasará cuando digamos que M_B es libre de torsión, evanescente o de torsión, nos referiremos a que lo es como R-módulo.

Esta misma terminología se utilizará cuando tratemos módulos por la izquierda.

1. El Funtor $\mathbf{C} : \mathsf{Mod}\text{-}B \to \mathsf{CMod}\text{-}R$

Asociado a cualquier categoría cociente existe lo que se conoce como el funtor de localización [**42**, Page 199]. Ya vimos en resultados anteriores que la categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$ es una categoría cociente de la categoría $\mathsf{Mod}\text{-}B$ con respecto a la clase de módulos de torsión. Esto hace que tengamos un funtor

$$\mathbf{C} : \mathsf{Mod}\text{-}B \to \mathsf{Mod}\text{-}(B, \mathcal{G})$$

donde $\mathcal{G} = \{\mathfrak{a}_B \leq B_B : B/\mathfrak{a} \in \mathcal{T}\}$. Puesto que estamos identificando $\mathsf{Mod}\text{-}(B, \mathcal{G})$ con $\mathsf{CMod}\text{-}R$, podemos considerar que nuestro funtor va entre

$$\mathbf{C} : \mathsf{Mod}\text{-}B \to \mathsf{CMod}\text{-}R$$

De acuerdo con [**42**, Proposition IX.1.11], el funtor $\mathbf{C}$ es adjunto por la izquierda del funtor de inclusión entre las categorías

$$\mathbf{I_C} : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{Mod}\text{-}R.$$

Si M_B es libre de torsión se puede definir

$$\mathbf{C}(M_B) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \mathcal{G}} \mathrm{Hom}_B(\mathfrak{a}_B, M_B)$$

tal y como se ve en [**42**, Lemma IX.1.6] y existe un homomorfismo canónico que denotaremos

$$\iota_M : M_B \to \mathbf{C}\,(M_B)\,.$$

Este homomorfismo tiene la propiedad de que $\mathrm{Coker}(\iota_M) \in \mathcal{T}$ y que $\mathrm{Ker}(\iota_M) = \mathbf{T}\,(M_B) = 0$ en este caso.

Siendo algo mas precisos, ι_M es un homomorfismo entre M_B e $\mathbf{I_C}(\mathbf{C}\,(M_B))$ ya que M_B y $\mathbf{C}\,(M_B)$ son objetos de categorías diferentes y hay que considerarlos dentro de la misma categoría. A veces abusaremos un poco de la notación e identificaremos $\mathbf{C}\,(M_B)$ con $\mathbf{I_C} \circ \mathbf{C}\,(M_B)$.

Utilizando [**42**, Lemma IX.1.6] definiremos en el caso general

$$\mathbf{C}\,(M_B) = \mathbf{C}\,(M/\mathbf{T}\,(M))$$

y el homomorfismo

$$\iota_M : M_B \to \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C}\,(M_B)$$

como la composición de la proyección canónica $p_M : M_B \to M/\mathbf{T}\,(M)$ con $\iota_{M/\mathbf{T}(M)} : M/\mathbf{T}\,(M) \to \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C}\,(M/\mathbf{T}\,(M))$.

De nuevo se cumple que $\mathrm{Coker}(\iota_M) = \mathrm{Coker}(\iota_{M/\mathbf{T}(M)})$ es de torsión y $\mathrm{Ker}(\iota_M) = \mathrm{Ker}(p_M) = \mathbf{T}\,(M_B)$.

Esto convierte a ι en una transformación natural de funtores

$$\iota : \mathrm{Id}_{\mathsf{Mod}\text{-}B} \to \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C}$$

que cumple que para todo $M_B \in \mathsf{Mod}\text{-}B$, $\mathrm{Ker}(\iota_M) = \mathbf{T}\,(M_R)$ y $\mathrm{Coker}(\iota_M) \in \mathcal{T}$.

Proposición 5.1. *Sea $f : M_B \to N_B$ un B-homomorfismo. Entonces son equivalentes*

1. $\mathbf{C}\,(f)$ *es un isomorfismo.*
2. $\mathrm{Ker}(f)$ *y* $\mathrm{Coker}(f)$ *son de torsión.*

Demostración:
La naturalidad de la transformación ι nos hace que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\iota_M} & \mathbf{C}\,(M) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{C}(f)} \\ N & \xrightarrow[\iota_N]{} & \mathbf{C}\,(N) \end{array}$$

$(1 \Rightarrow 2)$. Sea $m \in \mathrm{Ker}(f)$, entonces $\mathbf{C}\,(f)\,(\iota_M(m)) = \iota_N(f(m)) = 0$ y por lo tanto $\iota_M(m) = 0$ por lo que $m \in \mathbf{T}\,(M)$.

Sea $n \in N$ y sea $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$. Como $\mathbf{C}\,(f)$ es iso, existe un $\overline{m} \in \mathbf{C}\,(M)$ tal que $\iota_N(n) = \mathbf{C}\,(f)\,(\overline{m})$.

Como $\mathrm{Coker}(\iota_N)$ es de torsión, existirá un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{m}r_1 \cdots r_{k_0} = \iota_M(m)$ para algún $m \in M$. Entonces

$$\iota_N(f(m)) = fCf(\iota_M(m)) = \iota_N(nr_1 \cdots r_{k_0})$$

y por lo tanto $f(m) - nr_1 \cdots r_{k_0} \in \mathrm{Ker}(\iota_N)$ por lo que existirá un $k_1 \geq k_0$ tal que

$$f(mr_{k_0+1} \cdots r_{k_1}) = nr_1 \cdots r_{k_1} \in \mathrm{Im}(f).$$

Como ésto lo hemos hecho para toda sucesión $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, deducimos que $\mathrm{Coker}(f)$ es de torsión.

$(2 \Rightarrow 1)$. Sea $\overline{m} \in \mathbf{C}(M)$ tal que $\mathbf{C}(f)(\overline{m}) = 0$. Sea $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$. Para $\overline{m}$ podremos encontrar un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{m}r_1 \cdots r_{k_0} = \iota_M(m)$ para un cierto $m \in M$, por lo tanto $\iota_N(f(m)) = 0$.

Como $\mathrm{Ker}(\iota_N)$ es de torsión, existirá un $k_1 \geq k_0$ tal que $f(m)r_{k_0+1} \cdots r_{k_1} = 0$ y como $\mathrm{Ker}(f)$ también lo es, existirá un $k_2 \geq k_1$ tal que $mr_{k_0+1} \cdots r_{k_2} = 0$, pero esto nos prueba que $\overline{m}r_1 \cdots r_{k_2} = 0$. Como se puede probar para cualquier sucesión de elementos de R, deducimos que $\overline{m} \in \mathbf{T}(\mathbf{C}(M)) = 0$ por ser $\mathbf{C}(M)$ libre de torsión.

Para ver que $\mathrm{Coker}(\mathbf{C}(f))$ es 0 vamos a probar que es de torsión y libre de torsión al mismo tiempo. La razón por la que es libre de torsión es por la Proposición 3.4.

Sea $\overline{n} \in \mathbf{C}(N)$ y $(r_k)_{k\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$. Como $\mathrm{Coker}(\iota_N)$ es de torsión podemos encontrar un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{n}r_1 \cdots r_{k_0} = \iota_N(n)$ para algún $n \in N$. Como $\mathrm{Coker}(f)$ también es de torsión, podremos encontrar un $k_1 \geq k_0$ tal que $nr_{k_0+1} \cdots r_{k_1} = f(m)$ para algún $m \in M$, pero entonces

$$\overline{n}r_1 \cdots r_{k_1} = \mathbf{C}(f)(\iota_N(mr_{k_0+1} \cdots r_{k_1})) \in \mathrm{Im}(\mathbf{C}(f)).$$

Como esto lo podemos hacer para toda sucesión de $R^{\mathbb{N}}$, deducimos que $\mathrm{Coker}(\mathbf{C}(f))$ es de torsión, pero como también era libre de torsión, concluimos que $\mathrm{Coker}(\mathbf{C}(f)) = 0$. □

Ejercicio 5.1. Sea M_B un módulo libre de torsión, $h : X_B \to Y_B$ un B-homomorfismo con conúcleo de torsión y $f : X_B \to M_B$ un B-homomorfismo. Entonces si existe un $g : Y_B \to M_B$ tal que $g \circ h = f$, este g es único.

Solución:

Supongamos que existen dos homomorfismos g_1 y g_2 entre Y_B y M_B tales que $g_1 \circ h = f = g_2 \circ h$. Entonces tenemos que $(g_1 - g_2) \circ h = 0$, por lo tanto $g_1 - g_2$ factoriza a través del conúcleo de h, es decir, existe un homomorfismo $\gamma : \mathrm{Coker}(h) \to M_B$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y_B & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(h) \\ {\scriptstyle g_1 - g_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ M_B & =\!= & M_B \end{array}$$

pero como $\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Coker}(h), M_B) = 0$ por ser $\mathrm{Coker}(h)$ de torsión y M_B libre de torsión, se ha de cumplir que $\gamma = 0$ y entonces $g_1 - g_2 = 0$. □

Ejercicio 5.2. Sea $\mathbf{C}' : \mathsf{Mod}\text{-}B \to \mathsf{CMod}\text{-}R$ un funtor tal que existe una transformación natural

$$\iota' : \mathrm{Id}_{\mathsf{Mod}\text{-}B} \to \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C}'$$

cumpliendo para todo $M_B \in \mathsf{Mod}\text{-}B$ que $\mathrm{Ker}(\iota'_M) = \mathbf{T}(M_B)$ y que $\mathrm{Coker}(\iota'_M) \in \mathcal{T}$. Demostrar que existe una equivalencia de funtores $\sigma : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ tal que para todo M_B el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_B \arrow[r, equal] \arrow[d, "\iota_M"'] & M_B \arrow[d, "\iota'_M"] \\ \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C}(M_B) \arrow[r, "\mathbf{I_C}(\sigma_M)"'] & \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C}'(M_B) \end{tikzcd}$$

Solución:
Por ser ι'_M un morfismo con núcleo y conúcleo de torsión, tenemos que $\mathbf{C}(\iota'_M)$ es un isomorfismo para todo M. Además es natural por ser ι' natural. Tenemos pues el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota_M"] \arrow[d, "\iota'_M"'] & \mathbf{C}(M) \arrow[d, "\mathbf{C}(\iota'_M)"] \\ \mathbf{C}'(M) \arrow[r, "\iota_{\mathbf{C}'(M)}"'] & \mathbf{C}(\mathbf{C}'(M)). \end{tikzcd}$$

Como $\mathbf{C}'(M) \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, entonces $\iota_{\mathbf{C}'(M)}$ es un isomorfismo que compuesto con el inverso del isomorfismo $\mathbf{C}(\iota'_M)$ nos da el isomorfismo natural que buscábamos y por lo tanto la equivalencia entre los funtores. □

2. El Funtor D : B-Mod → R-DMod

Lema 5.2. *Sea $f : M_B \to N_B$ un epimorfismo en R-DMod, entonces $\mathbf{I_D}(f)$ es un epimorfismo en B-Mod.*

Demostración:
El submódulo $\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))$ es un submódulo unitario de N_B, por lo tanto $N/\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f)) \in R\text{-}\mathsf{DMod}$. Consideremos la proyección canónica $p : N \to N/\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))$.

El morfismo $f * p$ es el morfismo 0, pero como f es un epimorfismo en R-DMod se ha de cumplir que $p = 0$, por lo tanto $\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f)) = N$ por lo que $\mathbf{I_D}(f)$ es un epimorfismo. □

Definición 5.3. Sea M un generador de la categoría R-DMod y sea ${}_BL$ un B-módulo por la izquierda, sea $H(L) = \mathrm{Hom}_B({}_BM, {}_BL)$, denotaremos

$$\eta_L : M^{(H(L))} \to L$$

el homomorfismo dado por $((m_h)_{h\in H(L)})\eta_L = \sum_{h\in H(L)}(m_h)h$.

Vamos a definir $\mathbf{D}(L_B) = M^{(H(L))}/\mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\eta_L))$. Denotaremos $\nu_L : \mathbf{D}(L_B) \to L_B$ el homomorfismo dado por

$$((m_h)_{h\in H(L)} + \mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\eta_L)))\nu_L = ((m_h)_{h\in H(L)})\eta_L.$$

Proposición 5.4.

1. *El módulo $\mathbf{D}\left({}_BL\right)$ dado en la Definición 5.3 está en la categoría R-*DMod.
2. *La asignación $\mathbf{D}$ dada para objetos se puede extender para morfismos de forma que $\mathbf{D}$ se convierte en un funtor.*
3. *Para todo ${}_BL$ en B-*Mod*, $\mathrm{Im}(\nu_L) = \mathbf{U}\left({}_BL\right)$.*
4. *Para todo ${}_BL$ en R-*DMod*, el homomorfismo ν_L es un isomorfismo.*

Demostración:
(1). Como M está en R-DMod y esta clase de módulos es cerrada para coproductos, $M^{(H(L))}$ también está en R-DMod, y como $\mathbf{U}\left(\mathrm{Ker}(\eta_L)\right)$ es unitario, podemos utilizar la Proposición 3.13 y deducir que $\mathbf{D}\left({}_BL\right)$ está en R-DMod. (2). Sean ${}_BL$ y ${}_BK$ dos R-módulos por la izquierda y $f :_B L \rightarrow_B K$ un homomorfismo entre ellos. Este homomorfismo induce otro

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_B(M,f): & \mathrm{Hom}_B(M,L) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_B(M,K) \\ & h & \mapsto & h * f \end{array}$$

Como habíamos utilizado la notación $H(L)$ para $\mathrm{Hom}_B(M,L)$, utilizaremos también $H(K) = \mathrm{Hom}_B(M,K)$ y $H(f) = \mathrm{Hom}_B(M,f)$.

A partir de f vamos a definir el morfismo

$$\begin{array}{rccc} M^{(H(f))}: & M^{(H(L))} & \rightarrow & M^{(H(K))} \\ & (m_h)_{h\in H(L)} & \mapsto & \left(\sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} m_h\right)_{\overline{h}\in H(K)} \end{array}$$

donde con $H(f)^{-1}(\overline{h})$ denotamos el conjunto $\{h \in H(L) : (h)H(f) = \overline{h}\}$. Dicho de otro modo, si $q_h : M \rightarrow M^{(H(L)}$ y $\overline{q}_h : M \rightarrow M^{(H(K))}$ son las inyecciones canónicas, entonces para todo $m \in M$, $((m)q_h)M^{(H(f))} = (m)q_{h*f}$.

Vamos a comprobar que con esta definición, $M^{(H(f))}$ es un homomorfismo de B-módulos que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} M^{(H(L))} & \xrightarrow{\eta_L} & L \\ {\scriptstyle M^{(H(f))}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M^{(H(K))} & \xrightarrow{\eta_K} & K \end{array}$$

Sean $(m_h)_{h\in H(L)}$ y $(m'_h)_{h\in H(L)}$ elementos de $M^{(H(L))}$ y sean a y a' dos elementos B, entonces

$$(a(m_h)_{h\in H(L)} + a'(m'_h)_{h\in H(L)})M^{(H(L))} = (am_h + a'm'_h)_{h\in H(L)})M^{(H(L))} =$$

$$\left(\sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} (am_h + a'm'_h)\right)_{\overline{h}\in H(K)} =$$

$$\left(a \sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} m_h + a' \sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} m'_h)\right)_{\overline{h}\in H(K)} =$$

$$a\left(\left(\sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} m_h\right)_{\overline{h}\in H(K)}\right) + a'\left(\left(\sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} m'_h\right)\right)_{\overline{h}\in H(K)} =$$

$$a((m_h)_{h\in H(L)})_{h\in H(L)})M^{(H(L))} + a'((m'_h)_{h\in H(L)})M^{(H(L))}.$$

Sea $(m_h)_{h\in H(L)} \in M^{(H(L))}$, por un lado tenemos que $((m_h)_{h\in H(L)})(\eta_L * f) = \sum_{h\in H(L)}(m_h)h * f$.

Por otro lado

$$((m_h)_{h\in H(L)})(M^{(H(f))} * \eta_K) = \left(\left(\sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} m_h\right)_{\overline{h}\in H(K)}\right)\eta_K =$$

$$\sum_{\overline{h}\in H(K)}\ \sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} (m_h)\overline{h} = \sum_{\overline{h}\in H(K)}\ \sum_{h\in H(f)^{-1}(\overline{h})} (m_h)h * f =$$

$$= \sum_{h\in H(L)} (m_h)h * f.$$

Siendo esta última igualdad consecuencia de que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \phi: & H(L) & \to & \{(\overline{h}, h) : \overline{h} \in H(K), h \in H(f)^{-1}(\overline{h})\} \\ & h & \mapsto & (h * f, h) \end{array}$$

es una biyección.

Sea $\tilde{m} \in \mathrm{Ker}(\eta_L)$, entonces $0 = (\tilde{m})\eta_L * f = (\tilde{m})M^{(H(f))} * \eta_K$ y por lo tanto $(\tilde{m})M^{(H(f))} \in \mathrm{Ker}(\eta_K)$. Esto prueba que $(\mathrm{Ker}(\eta_L))M^{(H(f))} \subseteq \mathrm{Ker}(\eta_K)$ y por lo tanto $(\mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\eta_L)))M^{(H(f))} \subseteq \mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\eta_K))$ y podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{D}(f): & \mathbf{D}(L_B) & \to & \mathbf{D}(K_B) \\ & \tilde{m} + \mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\eta_L)) & \mapsto & (\tilde{m})M^{(H(f))} \end{array}$$

Con esta definición obtenemos además la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}(L) & \xrightarrow{\nu_L} & L \\ {\scriptstyle \mathbf{D}(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{D}(K) & \xrightarrow{\nu_K} & K. \end{array}$$

El resto de las comprobaciones necesarias para ver que $\mathbf{D}$ es un funtor se realizarán en el Ejercicio 5.3.

(3). Sea ${}_BL$ un B-módulo por la izquierda y sea $m \in \mathbf{U}({}_BL)$. Sea X un conjunto y $\pi : X \to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R (ya vimos que estos conjuntos y aplicaciones existen para cualquier anillo). Utilizando la Proposición 4.32 sabemos que existe un soporte unitario σ y un homomorfismo $f : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to \mathbf{U}({}_BL)$ tal que $(\langle\varnothing\rangle_\sigma)f = m$. Por ser M un generador tenemos un epimorfismo $\eta_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle} : M^{(H(\langle\langle\sigma\rangle\rangle))} \to \langle\langle\sigma\rangle\rangle$ y como $\langle\varnothing\rangle_\sigma \in \langle\langle\sigma\rangle\rangle$ podemos encontrar un subconjunto finito $I \subseteq H(\langle\langle\sigma\rangle\rangle)$, y unos elementos $\{m_i \in M : i \in I\}$ tales que $\langle\varnothing\rangle_\sigma = \sum_{i\in I}(m_i)i$.

Consideremos los homomorfismos

$$M \xrightarrow{\ i\ } \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \xrightarrow{\ f\ } \mathbf{U}\left({}_BL\right) \xrightarrow{\ q\ } {}_BL$$

donde $q : \mathbf{U}\left({}_BL\right) \to_B L$ es la inclusión canónica. Sea $I_0 = I/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia de I con la relación $i \sim i'$ si y solo si $i * f * q = i' * f * q$. Para cada clase de equivalencia $v \in I_0$ definiremos $h_v = i * f * q$ para un $i \in v$ (por la definición de la relación de equivalencia, esta definición no depende de la elección de i) y $m_v = \sum_{i \in v} m_i$, entonces obtenemos que $m = \sum_{v \in I_0}(m_v)h_v$ donde $m_v \in M$ y $h_v \in H(L)$, siendo todos los h_v distintos. Esto prueba que $m \in \mathrm{Im}(\eta_L)$.

Como esto se puede hacer para todos los $m \in \mathbf{U}\left(L\right)$, hemos probado que $\mathbf{U}\left(L\right) \subseteq \mathrm{Im}(\eta_L)$. El otro contenido es trivial porque $\mathrm{Im}(\eta_L)$ es un cociente de un módulo unitario y por lo tanto es unitario y ha de estar contenido en $\mathbf{U}\left(L\right)$.

(4). Para probar el último apartado, supongamos que ${}_BL \in R$-DMod, entonces en particular es unitario y por lo tanto η_L es un epimorfismo, pero utilizando la Proposición 3.13 deducimos que $\mathrm{Ker}(\eta_L)$ es unitario y por lo tanto $\mathbf{U}\left(\mathrm{Ker}(\eta_L)\right) = \mathrm{Ker}(\eta_L)$. Esto prueba que $\mathrm{Ker}(\nu_L) = \mathrm{Ker}(\eta_L)/\mathbf{U}\left(\mathrm{Ker}(\eta_L)\right) = 0$ y junto con el hecho de que ν_L es un epimorfismo, concluimos que η_L es un isomorfismo. □

Ejercicio 5.3. Sean K,K' y K'' tres B-módulos por la izquierda y sean $f : K \to K'$ y $f' : K' \to K''$, B-homomorfismos. Entonces $\mathbf{D}\left(f * g\right) = \mathbf{D}\left(f\right) * \mathbf{D}\left(g\right)$.

Solución:
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}\left(K\right) \arrow[r, "\nu_K"] \arrow[d, "\mathbf{D}(f)"'] & K \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{D}\left(K\right)' \arrow[r, "\nu_{K'}"] \arrow[d, "\mathbf{D}(f')"'] & K' \arrow[d, "f'"] \\
\mathbf{D}\left(K\right)'' \arrow[r, "\nu_{K''}"] & K''
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del cuadrado exterior se deduce de la conmutatividad de los dos cuadrados interiores. Podemos pues asegurar que el siguiente diagrama es conmutativo con los dos morfismos, tanto $\mathbf{D}\left(f * f'\right)$ como $\mathbf{D}\left(f\right) * \mathbf{D}\left(f'\right)$,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}\left(K\right) \arrow[r, "\nu_K"] \arrow[d, "\mathbf{D}(f)*\mathbf{D}(f')"', "\mathbf{D}(f*f')"] & K \arrow[d, "f*f'"] \\
\mathbf{D}\left(K\right)'' \arrow[r, "\nu_M"] & K''
\end{tikzcd}$$

Denotemos $\epsilon = \mathbf{D}\left(f\right) * \mathbf{D}\left(f'\right) - \mathbf{D}\left(f * f'\right)$. Lo que hemos probado es que $\epsilon * \nu_{K''} = 0$ y por lo tanto existe un morfismo $\overline{\epsilon} : \mathbf{D}\left(K\right) \to \mathrm{Ker}(\nu_{K''})$ tal que $\overline{\epsilon} * \nu^k_{K''} = \epsilon$. Pero $\mathrm{Ker}(\nu_{K''}) = \mathrm{Ker}(\eta_{K''})/\mathbf{U}\left(\mathrm{Ker}(\eta_{K''})\right)$, en particular

$\mathbf{U}\left(\mathrm{Ker}(\nu_{K''})\right) = 0$ y $\overline{\epsilon}$ es un morfismo entre un módulo unitario y uno evanescente, por lo que ha de ser 0. Esto prueba que $\epsilon = 0$ y el resultado del ejercicio. □

Lema 5.5. *Sea $L \in R$-DMod y sea $K \in B$-Mod, entonces para todo B-homomorfismo $f : L \to K$ existe un único $\overline{f} : L \to \mathbf{D}(K)$ tal que $\overline{f} * \nu_K = f$.*

Demostración:
Empecemos probando la existencia y posteriormente probaremos la unicidad.

Dado $f : L \to K$ consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}(L) & \xrightarrow{\nu_L} & L \\ {\scriptstyle \mathbf{D}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{D}(K) & \xrightarrow{\nu_K} & K. \end{array}$$

Como ν_L es un isomorfismo, podemos definir $\overline{f} = \nu_L^{-1} * \mathbf{D}(f)$ que cumple la condición del enunciado.

Para ver la unicidad, supongamos que tenemos dos morfismos $g_1, g_2 : L \to \mathbf{D}(K)$ tales que $g_1 * \nu_K = f = g_2 * \nu_K$. Entonces $(g_1 - g_2) * \nu_K = 0$, por lo tanto podemos encontrar un morfismo $h : L \to \mathrm{Ker}(\nu_K)$ tal que $h * \nu_K^k = g_1 - g_2$. Pero $\mathrm{Hom}_B(L, \mathrm{Ker}(\nu_K)) = 0$ porque L es unitario y $\mathbf{U}\left(\mathrm{Ker}(\nu_K)\right) = 0$, por lo tanto $h = 0$ y $g_1 = g_2$. □

Proposición 5.6. *El funtor $\mathbf{D} : B$-$\mathsf{Mod} \to R$-DMod es un adjunto por la derecha de la inclusión canónica $\mathbf{I_D} : R$-$\mathsf{DMod} \to B$-Mod.*

Demostración:
Para probar ésto tenemos que encontrar un isomorfismo natural entre

$$\mathrm{Hom}_B(\mathbf{I_D}(-), -) \to \mathrm{Hom}_B(-, \mathbf{D}(-)).$$

En realidad nos resulta mas cómodo ver el isomorfismo en el otro sentido, para ello tomemos $L \in R$-DMod, $K \in B$-Mod, definiremos

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{LK} : & \mathrm{Hom}_B(L, \mathbf{D}(K)) & \to & \mathrm{Hom}_B(L, K) \\ & f & \mapsto & f * \eta_K \end{array}$$

Este homomorfismo es claramente natural. Para probar que es un isomorfismo veamos que es mono y epi. Para ver que es mono supongamos que tenemos un morfismo $f : L \to \mathbf{D}(K)$ tal que $f * \eta_K = 0$. La demostración del Lema 5.5 nos dice que f ha de ser 0. También ese mismo lema nos da la antiimagen de cualquier morfismo $f : L \to K$. □

3. Primeras Consecuencias de la Existencia de C y D

Proposición 5.7. *La categoría CMod-R es una categoría reflexiva con respecto a la categoría Mod-B y la categoría R-DMod es correflexiva con respecto a B-Mod.*

Demostración:
Hemos visto por propiedades generales de la localización que el funtor $\mathbf{C}$ es un adjunto por la izquierda de $\mathbf{I_C}$ y en la sección anterior que $\mathbf{D}$ es un adjunto por la derecha de $\mathbf{I_D}$. Además las categorías $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $R\text{-}\mathsf{DMod}$ son respectivamente subcategorías plenas de $\mathsf{Mod}\text{-}B$ y $B\text{-}\mathsf{Mod}$, i.e. los funtores $\mathbf{I_C}$ e $\mathbf{I_D}$ son funtores plenos. □

Este resultado nos permite utilizar todos los resultados que obtuvimos en el Tema 3 sobre categorías correflexivas y sus duales sobre categorías reflexivas. Por ejemplo, al ser $B\text{-}\mathsf{Mod}$ y $\mathsf{Mod}\text{-}B$ categorías completas y cocompletas, deducimos que $R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $\mathsf{CMod}\text{-}R$ son categorías completas y cocompletas.

Proposición 5.8. *Sea* $((M_i)_{i\in I}, (\sigma_{ji} : M_i \to M_j)_{i\leq j})$ *un sistema inverso en* $R\text{-}\mathsf{DMod}$*, entonces el límite inverso de dicho sistema en la categoría* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *es*

$$\varprojlim_{i\in I} M_i = \mathbf{D}\left(\varprojlim_{i\in I} \mathbf{I_D}(M_i)\right).$$

Del mismo modo, si $((M_i)_{i\in I}, (\sigma_{ji} : M_i \to M_j)_{i\leq j})$ *es un sistema directo en* $R\text{-}\mathsf{DMod}$*, entonces el límite directo de dicho sistema en la categoría* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *es*

$$\varinjlim_{i\in I} M_i = \mathbf{D}\left(\varinjlim_{i\in I} \mathbf{I_D}(M_i)\right)$$

teniendo en cuenta que en este caso se tiene que $\nu_{\varinjlim M_i}$ *es un isomorfismo.*

Demostración:
La parte del límite inverso es consecuencia de la Proposición 1.50, la del límite directo es consecuencia de la Proposición 1.48 o también de la Proposición 3.16.

Notemos que ν es precisamente la counidad de la adjunción. □

Proposición 5.9. *Sea* $((M_i)_{i\in I}, (\sigma_{ji} : M_i \to M_j)_{i\leq j})$ *un sistema inverso en* $\mathsf{CMod}\text{-}R$*, entonces el límite inverso de dicho sistema en la categoría* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *es*

$$\varprojlim_{i\in I} M_i = \mathbf{C}\left(\varprojlim_{i\in I} \mathbf{I_C}(M_i)\right)$$

teniendo en cuenta que en este caso se tiene que $\iota_{\varprojlim M_i}$ *es un isomorfismo.*

Del mismo modo, si $((M_i)_{i\in I}, (\sigma_{ji} : M_i \to M_j)_{i\leq j})$ *es un sistema directo en* $\mathsf{CMod}\text{-}R$*, entonces el límite directo de dicho sistema en la* *categoría* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *es*

$$\varinjlim_{i\in I} M_i = \mathbf{C}\left(\varinjlim_{i\in I} \mathbf{I_C}(M_i)\right).$$

Demostración:
Esta demostración se puede hacer dualizando la de la Proposición 1.50 y la de la Proposición 1.48 o también de la Proposición 3.7. También se puede ver en general para categorías cocientes en [**42**, Proposition X.1.2].

Notemos que ι es precisamente la unidad de la adjunción. □

La categoría $\mathsf{CMod}\text{-}R$, por ser una categoría cociente, es de Giraud y por lo tanto Grothendieck, ver [**42**, Chapter X]. El generador de la categoría es precisamente $\mathbf{C}(B)$ utilizando [**42**, Proposition X.1.3]. Además al ser Grothendieck, en particular sabemos que es abeliana por ambos lados. Los resultados relativos a la propiedad de ser una categoría de Giraud no pueden dualizarse.

Nota 5.10. *La categoría* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *es una categoría aditiva.*

Demostración:
Al ser una subcategoría plena de $B\text{-}\mathsf{Mod}$, podemos utilizar su estructura aditiva. Además el objeto 0 de $B\text{-}\mathsf{Mod}$ está en la subcategoría $R\text{-}\mathsf{DMod}$.
□

Proposición 5.11. *Sea* $f :_B L \to_B K$ *un morfismo en* $R\text{-}\mathsf{DMod}$. *Entonces* f *es un monomorfismo en* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *si y solo si* $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))$ *es evanescente.*

Demostración:
($\Rightarrow$). Supongamos que existe un elemento $m \in \mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))) \setminus \{0\}$. Consideremos un conjunto X y una aplicación $\pi : X \to R$ tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R. Para el elemento m podemos encontrar un soporte unitario σ y un homomorfismo $h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to \mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f)))$ tal que $(\langle \varnothing \rangle_\sigma)h = m$. Pero entonces $h * f = 0$ y sin embargo $h \neq 0$ lo cual contradice que f pueda ser un monomorfismo.

($\Leftarrow$). Sea ${}_BK \in R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $h :_B K \to_B L$ tal que $h * f = 0$, entonces h factoriza a través de $\mathrm{Ker}(f)$, es decir, existe un $\overline{h} : K \to \mathrm{Ker}(f)$ tal que $\overline{h} * f^k = h$, pero $\mathrm{Hom}_B(K, \mathrm{Ker}(f)) = 0$, por lo tanto $h = 0$. □

Proposición 5.12. *La categoría* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *es una categoría abeliana por la derecha.*

Demostración:
Hemos visto ya que es una categoría aditiva y que tiene núcleos y conúcleos.

Para ver que $R\text{-}\mathsf{DMod}$ es conormal supongamos que $f : L \to K$ es un epimorfismo en $R\text{-}\mathsf{DMod}$, entonces utilizando el Lema 5.2 sabemos que $\mathbf{I_D}(f)$ es un epimorfismo en $B\text{-}\mathsf{Mod}$, además su núcleo es unitario y tenemos un epimorfismo $\nu_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathbf{D}\,(\mathrm{Ker}(f)) \to \mathrm{Ker}(f)$, si componemos este morfismo con la inclusión $f^k : \mathrm{Ker}(f) \to L$ tenemos $\nu_{\mathrm{Ker}(f)} * f^k : \mathbf{D}\,(\mathrm{Ker}(f)) \to L$ que es un morfismo en R-DMod. El conúcleo de este morfismo en R-DMod es el mismo que en B-Mod que es $L/\mathrm{Ker}(f) \simeq K$, por lo tanto f es precisamente el conúcleo de este morfismo.

Nos queda por último ver que todo morfismo se descompone en mono y epi. Sea $f : X \to Y$ un morfismo en R-DMod. Denotemos $Z = X/\mathbf{U}\,(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f)))$ y $e : X \to K$ la aplicación canónica. Por ser X un módulo de R-DMod y $\mathbf{U}\,(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f)))$ unitario, tenemos que $Z \in R$-DMod, además e es un epimorfismo. Denotaremos por $m : Z \to Y$ el morfismo que a un elemento $x + \mathbf{U}\,(\mathrm{Ker})\,(\mathbf{I_D}(f))$ lo lleva a $(x)f$. El núcleo de $\mathbf{I_D}(m)$ es precisamente $\mathrm{Ker}(f)/\mathbf{U}\,(\mathrm{Ker}(f)) \in \mathcal{V}$ por lo tanto aplicando la proposición anterior m es un monomorfismo.

Claramente $e * m = f$. Lo único que nos queda por probar es la unicidad de la descomposición. Supongamos que tenemos otro $Z' \in R$-DMod y otros morfismos $e' : X \to Z'$ y $m' : Z' \to Y$ tales que e' es un epimorfismo en R-DMod, m' un monomorfismo en R-DMod y $e' * m' = f$.

Por ser e' un epimorfismo y Z' un módulo de R-DMod, $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(e'))$ es unitario, además claramente $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(e')) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))$, por lo tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(e')) \subseteq \mathbf{U}\,(()\,\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))) = \mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(e))$. Como $e * m = e' * m'$, tenemos que

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(e))/\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(e')) \subseteq \mathrm{Ker}(m') \in \mathcal{V}$$

por lo tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(e)) = \mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(e'))$. Esto nos prueba que $e = e'$, pero como ambos son epimorfismos, los podemos cancelar y deducir que también $m = m'$. □

PROPOSICIÓN 5.13. *Sean R y R' anillos y sea ${}_{R'}P_R$ un bimódulo. Entonces $\mathbf{C}\,(P_R)$ tiene una única estructura de (R', R)-bimódulo tal que $\iota_P : P \to \mathbf{C}\,(P)$ es un homomorfismo de bimódulos.*

Demostración:
Sea $r' \in R'$. Podemos definir el R-homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} L(r') : & P & \to & P \\ & p & \mapsto & r'p. \end{array}$$

Si aplicamos el funtor $\mathbf{C}$ a éste homomorfismo obtenemos $\mathbf{C}\,(L(r')) : \mathbf{C}\,(P) \to \mathbf{C}\,(P)$. Definiremos

$$r'x = \mathbf{C}\,(L(r'))\,(x) \quad \forall r' \in R', x \in \mathbf{C}\,(P)\,.$$

Por la definición y la naturalidad de la transformación ι, sabemos que para todo $p \in P$ y todo $r' \in R$,

$$\iota_P(r'p) = \iota_P \circ L(r')(p) = \mathbf{C}\,(L(r')) \circ \iota_P(p) = r'\iota_P(p).$$

Sean $r', s' \in R'$. Claramente $L(r' + s') = L(r') + L(s')$ y usando que $\mathbf{C}$ es un funtor aditivo deducimos que $\mathbf{C}\,(L(r' + s')) = \mathbf{C}\,(L(r'))+$

$\mathbf{C}\,(L(s'))$. El resto de las propiedades que son necesarias para ver que $\mathbf{C}\,(P)$ es un R'-módulo por la izquierda se ven de forma similar.

Vamos a ver que tiene estructura de bimódulo. Para ello tomemos $r' \in R'$, $r \in R$ y $x \in \mathbf{C}\,(P)$,

$$(r'x)r = (\mathbf{C}\,(L(r'))\,(x))r = \mathbf{C}\,(L(r'))\,(xr) = r'(xr).$$

Por último vamos a ver que esta definición es única. Supongamos que existiera otra forma de definir una operación $\cdot : R' \times \mathbf{C}\,(P) \to P$ que dotara a P de estructura de (R', R)-bimódulo tal que ι_P es un homomorfismo de bimódulos.

Sea $r' \in R'$ y $x \in \mathbf{C}\,(P)$, vamos a probar que $r'x - r' \cdot x = 0$ viendo que están en la torsión de $\mathbf{C}\,(P)$. Para ello tomemos $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, Como $\mathrm{Coker}(\iota_P)$ es de torsión, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$xr_1 \cdots r_{n_0}, r'xr_1 \cdots r_{n_0}, r' \cdot xr_1 \cdots r_{n_0} \in \mathrm{Im}(P),$$

sea $p \in P$ tal que $\iota_P(p) = xr_1 \cdots r_{n_0}$ entonces

$$r'xr_1 \cdots r_{n_0} = r'\iota_P(p) = \iota_P(r'p)$$

$$r' \cdot xr_1 \cdots r_{n_0} = r' \cdot \iota_P(p) = \iota_P(r'p)$$

por lo tanto $(r'x - r' \cdot x)r_1 \cdots r_{n_0} = 0$, lo que prueba que $r'x - r' \cdot x \in \mathbf{T}\,(\mathbf{C}\,(P_R)) = 0$ y por lo tanto la unicidad de la operación. □

NOTA 5.14. *Con esta estructura, el homomorfismo canónico* $\iota_B : B \to \mathbf{C}\,(B_B)$ *es además de un homomorfismo de bimódulos, un homomorfismo de anillos.*

Demostración:
Ver [**42**, Página 217]. □

PROPOSICIÓN 5.15. *Todos los módulos de* R-DMod *tienen una única estructura de* $\mathbf{C}\,(B_B)$*-módulos unitarios que extiende la estructura de* B*-módulos.*

Demostración:
Consideremos ${}_BL \in R$-DMod y el homomorfismo de anillos

$$\gamma : B \to \mathrm{BiEnd}({}_BL)$$

dado por $b^\gamma(m) = bm$ para todo $b \in B$ y todo $m \in L$.

Éste homomorfismo de anillos γ es también un homomorfismo de B-módulos ya que para todo $a, b \in B$ y todo $m \in L$, $(ab)^\gamma(m) = abm = a(b^\gamma(m))$.

Utilizando el hecho de que $\mathrm{BiEnd}({}_BL) \in \mathsf{CMod}$-$R$, podemos levantar γ a un homomorfismo $\overline{\gamma} : \mathbf{C}\,(B_B) \to \mathrm{BiEnd}({}_BL)$ tal que $\overline{\gamma} \circ \iota_B = \gamma$.

Tenemos que comprobar que de hecho éste es un homomorfismo de anillos ya que de momento solo sabemos que es un homomorfismo de R-módulos.

Para ello tomemos $c, d \in \mathbf{C}\,(B_B)$, si probamos que $(\overline{\gamma}(cd) - \overline{\gamma}(c)\overline{\gamma}(d)) \in \mathbf{T}\,(\mathrm{BiEnd}({}_BL)) = 0$ habremos terminado. Sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $cdr_1 \cdots r_{n_0}, dr_1 \cdots r_{n_0} \in \mathrm{Im}(\iota_B)$. Sean $a, b \in B$ tales que $\iota_B(a) = cdr_1 \cdots r_{n_0}, \iota_B(b) = dr_1 \cdots r_{n_0}$ entonces

$$\overline{\gamma}(cd)r_1 \cdots r_{n_0}r_{n_0+1} = \gamma(ar_{n_0+1}) = \gamma(a)\gamma(r_{n_0+1}) =$$

$$\overline{\gamma}(cb)\overline{\gamma}(\iota_B(r_{n_0+1})) == \overline{\gamma}(c)\overline{\gamma}(b\iota_B(r_{n_0+1})) = \overline{\gamma}(c)\overline{\gamma}(d)r_1 \cdots r_{n_0}r_{n_0+1}.$$

Para probar la unicidad de esta extensión, supongamos que existieran dos homomorfismos $\overline{\gamma}, \tilde{\gamma} : \mathbf{C}(B_B) \to \mathrm{BiEnd}({}_BL)$ tales que $\overline{\gamma} \circ \iota_B = \gamma = \tilde{\gamma} \circ \iota_B$. Como estos homomorfismos de anillos extienden la estructura de R-módulo, han de ser también R-homomorfismos de módulos.

La diferencia entre estos dos homomorfismos al componerla con ι_B es 0, por lo tanto ha de factorizar a través del conúcleo de ι_B que es de torsión, pero entonces ha de ser 0 porque

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(\iota_B), \mathrm{BiEnd}({}_BL)) = 0.$$

□

Proposición 5.16. *Sean X, Y, Z módulos de R-DMod, y sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ homomorfismos entre ellos. Entonces la sucesión*

$$X \xrightarrow{\ f\ } Y \xrightarrow{\ g\ } Z \longrightarrow 0$$

es exacta en R-DMod si y solo si

$$\mathbf{I_D}(X) \xrightarrow{\mathbf{I_D}(f)} \mathbf{I_D}(Y) \xrightarrow{\mathbf{I_D}(g)} \mathbf{I_D}(Z) \longrightarrow 0$$

es exacta en B-Mod.

Demostración:
($\Rightarrow$). Eso es consecuencia de que como $\mathbf{I_D}$ tiene un adjunto por la izquierda por lo que es exacto por la derecha.

($\Leftarrow$). El morfismo g es un epimorfismo por el Lema 5.2. Para probar que la sucesión es exacta en Y tenemos que probar que $f^c = g^{kc}$.

El conúcleo de f es precisamente el morfismo

$$f^c : Y \to Y/\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))$$

ya que los límites directos calculados en R-DMod son los mismos que los calculados en B-Mod. El núcleo de g es la composición de los morfismos siguientes

$$\mathbf{D}(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(g))) \xrightarrow{\nu_{\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(g))}} \mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(g)) \xrightarrow{\mathbf{I_D}(g)^k} Y$$

como consecuencia de la Proposición 5.8.

El conúcleo del núcleo de g va a resultar pues el conúcleo de este morfismo, que como es un límite directo, es el mismo que el calculado en B-Mod. Como $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(g))$ es unitario por ser g un epimorfismo, entonces $\nu_{\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(g))}$ es un epimorfismo y por lo tanto el conúcleo del núcleo de g es igual al conúcleo de $\mathbf{I_D}(g)^k$, que resulta ser

$$g^{ck} : Y \to Y/\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(g)).$$

Pero como la sucesión

$$\mathbf{I_D}(X) \xrightarrow{\mathbf{I_D}(f)} \mathbf{I_D}(Y) \xrightarrow{\mathbf{I_D}(g)} \mathbf{I_D}(Z) \longrightarrow 0$$

es exacta en B-Mod, $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(g)) = \mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))$, de donde concluimos que $g^{ck} = f^c$ que era lo que queríamos probar. $\square$

TEMA 6

Funtores Extensibles

DEFINICIÓN 6.1. Sea R un anillo, A' un anillo con identidad y $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$ un funtor que conserva límites directos.

Diremos que F es extensible si existe un conjunto X y una aplicación $\pi : X \to R$ con $\pi(X)$ un conjunto T-generador por la derecha de R tal que para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, la aplicación canónica

$$\varinjlim_{\tau \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle) \to F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$$

es un epimorfismo.

EJEMPLO 6.2. Si R tiene algún conjunto T-generador por la derecha finito, entonces todo funtor $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$ que conserve límites directos es extensible.

Demostración:
Tomemos X dicho conjunto T-generador por la derecha finito y $\pi : X \to R$ la inclusión de X en R.

El soporte $\Sigma(X)$ es un soporte unitario en este caso y

$$\varinjlim_{\tau \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle) = F(\langle\!\langle \Sigma(X) \rangle\!\rangle)$$

además, para cada $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, el homomorfismo canónico

$$F(\langle\!\langle \Sigma(X) \rangle\!\rangle) \to F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$$

que aparece es precisamente $F(\Phi_{\Sigma(X),\sigma})$ que es un epimorfismo porque $\Phi_{\Sigma(X),\sigma}$ es un epimorfismo y F conserva límites directos y en particular es exacto por la derecha. □

EJEMPLO 6.3. Sea ${}_{A'}P_R$ un (A', R)-bimódulo con $A'P = P$. El funtor

$$P \otimes_R - : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$$

es un funtor extensible.

Demostración:
Sea $\pi : X \to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R. Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Los elementos de $P \otimes_R \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ se pueden poner como sumas finitas de elementos de la forma $p \otimes \langle \underline{x} \rangle_\sigma$ para algún $p \in P$ y algún $\overline{x} \in \sigma$. Si demostramos que todos estos elementos están en la imagen del morfismo

$$\varinjlim_{\tau \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} P \otimes_R \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \to P \otimes_R \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$$

habremos terminado. Vamos pues a probar ésto:

Consideremos el elemento que denotaremos $p\otimes\langle \underline{x}\rangle \in \varprojlim_{\tau\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} P\otimes_R \langle\!\langle \tau\rangle\!\rangle$ definido como $p\otimes\langle \underline{x}\rangle_\tau$ si $\overline{x}\in\tau$ y 0 en caso contrario. Este elemento está en este límite inverso y además trivialmente se tiene que su componente en $P\otimes_R \langle\!\langle \sigma\rangle\!\rangle$ es precisamente $p\otimes\langle \underline{x}\rangle_\sigma$. $\square$

Nuestro objetivo en este Tema es precisamente caracterizar los funtores que cumplen la propiedad de ser extensibles. Veremos que son precisamente aquellos que se pueden poner como producto tensorial por un cierto bimódulo.

1. La Categoría de Funtores que Conservan Límites Directos

Definición 6.4. Sean R y R' dos anillos, vamos a denotar

$$\mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$$

la categoría cuyos objetos son los funtores $F : R\text{-}\mathsf{DMod}\to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ que conservan límites directos, y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos.

Tenemos que probar que de hecho esto es una categoría, ya que podría darse el caso de que para dos funtores que conserven límites directos F y F', la clase de las transformaciones naturales entre F y F' podría no ser un conjunto. En esta sección vamos a ver que eso es imposible.

Proposición 6.5. *Sean $F, F'\in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$ y sea ${}_RM$ un generador de la categoría R-DMod. Entonces si tenemos dos transformaciones naturales $\alpha,\beta : F\to F'$ tales que $\alpha_M=\beta_M$, entonces $\alpha=\beta$.*

Demostración:
Sea I un conjunto de índices y consideremos el módulo $M^{(I)}$. Sea $q_i : M\to M^{(I)}$ la inyección canónica. Entonces tenemos por la naturalidad de α y β que

$$F(q_i)*\alpha_{M^{(I)}} = \alpha_M * F'(q_i) = \beta_M * F'(q_i) = F(q_i)*\beta_{M^{(I)}}$$

Como esto lo podemos hacer para todo i y los funtores F y F' conservan coproductos, deducimos que $\alpha_{M^{(I)}}=\beta_{M^{(I)}}$.

Para probarlo en general consideremos un módulo $N\in R\text{-}\mathsf{DMod}$, y un epimorfismo

$$M^{(J)}\to N\to 0.$$

Ésto se puede hacer por ejemplo utilizando el epimorfismo η_N dado en la Definición 5.3. Si aplicamos los funtores F y F' a dichos epimorfismos, obtenemos un diagrama como sigue

$$\begin{array}{ccc} F(M^{(J)}) & \longrightarrow & F(N) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{M^{(J)}}=\beta_{M^{(J)}}} & & {\scriptstyle \beta_N}\Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_N} \\ F'(M^{(J)}) & \longrightarrow & F'(N). \end{array}$$

Como F conserva límites directos, en particular es exacto por la derecha y por lo tanto el morfismo $F(M^(J)) \to F(N)$ es un epimorfismo, pero entonces β_N y α_N compuestos con el dan el mismo morfismo y han de ser iguales. □

Corolario 6.6. *Sean $F, F' \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$, entonces las transformaciones naturales entre F y F' forman un conjunto.*

Demostración:
Sea M un generador de la categoría R-DMod. En la proposición anterior, probamos que las transformaciones naturales entre F y F' se podían considerar contenidas dentro de $\mathrm{Hom}_{R'}(F(M), F(M'))$, pero como éste es un conjunto, concluimos que las transformaciones naturales entre F y F' también son un conjunto. □

Este corolario hace que podamos hablar propiamente de la categoría $\mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$.

2. Funtores que Conservan Coproductos

Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de objetos de la categoría R-DMod. Tal y como hemos visto en resultados anteriores, el coproducto de dichos objetos calculado en R-MOD está en R-DMod y por lo tanto este objeto también es el coproducto de estos objetos en R-DMod. Aparte de los morfismos canónicos $q_i : M_i \to \coprod_{j\in I} M_j$ existen otros $p_i : \coprod_{j\in I} M_j \to M_i$ que son las proyecciones en cada una de las componentes. Lo que vamos a hacer en esta sección es ver cómo se transfieren estos morfismos en el caso de funtores que conserven coproductos.

Lema 6.7. *Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de objetos en R-DMod y $M \in R$-DMod junto con los morfismos $(q_i : M_i \to M)_{i\in I}$ un coproducto de dicha familia. Entonces existen morfismos $(p_i : M \to M_i)_{i\in I}$ cumpliendo las siguientes condiciones:*

1. $q_i * p_i = \mathrm{id}_{M_i}$ *para todo* $i \in I$.
2. $q_i * p_j = 0$ *para todo* $i \neq j \in I$.
3. $\forall m \in M$, *el conjunto* $\{i \in I : (m)p_i \neq 0\}$ *es finito.*
4. $\forall m \in M$, $\sum_{i\in I}(m)p_i * q_i = m$.

Recíprocamente, sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de objetos de la categoría R-DMod y $M \in R$-DMod junto con los morfismos $(q_i : M_i \to M)_{i\in I}$ y $(p_i : M \to M_i)_{i\in I}$ cumpliendo las condiciones (1), (2), (3) *y* (4) *anteriores. Entonces*

$$(M, (q_i : M_i \to M)_{i\in I})$$

es un coproducto de los objetos $(M_i)_{i\in I}$ en la categoría R-DMod.

Demostración:
La primera parte es evidente puesto que $M \simeq \coprod_{i\in I} M_i$ en R-MOD y podemos utilizar las proyecciones canónicas. Para ver el recíproco consideremos una familia de morfismos $(h_i : M_i \to H)_{i\in I}$. Para definir $g : M \to H$ utilizaremos la fórmula

$$(m)g = \sum_{i\in I} (m)p_i * h_i.$$

Notemos que esta suma es finita fijado un elemento m por la propiedad (3). Tenemos que ver que para todo $i \in I$, $q_i * g = h_i$. Para ello tomemos $m_i \in M_i$,

$$((m_i)q_i)g = \sum_{j\in I} (m_i)q_i * p_j * h_j = (m_i)q_i * p_i * h_i = (m_i)h_i$$

para ver la unicidad consideremos $\overline{g} : M \to H$ otro morfismo tal que para todo $i \in I$, $\overline{g} * q_i = h_i$. Entonces

$$(m)\overline{g} = \sum_{i\in I} (m)p_i * q_i * \overline{g} = \sum_{i\in I} p_i * h_i = (m)g.$$

$\square$

LEMA 6.8. *Sea $(M_i)_{i\in I}$ una familia de objetos de la categoría R-DMod y $M \in R$-DMod junto con los morfismos $(q_i : M_i \to M)_{i\in I}$ un coproducto de la dicha familia. Sean $(p'_i : M \to M_i)_{i\in I}$ una familia de morfismos tales que*

1. *$q_i * p'_i = \mathrm{id}_{M_i}$ para todo $i \in I$.*
2. *$q_i * p'_j = 0$ para todo $i \neq j \in I$.*

Entonces estos morfismos han de cumplir también las condiciones

3. *$\forall m \in M$, el conjunto $\{i \in I : (m)p'_i \neq 0\}$ es finito.*
4. *$\forall m \in M$, $\sum_{i\in I} (m)p'_i * q_i = m$.*

Si existiera otra familia de morfismos $(p''_i : M \to M_i)_{i\in I}$ cumpliendo las condiciones (1) y (2), necesariamente se tendrá que cumplir que $p'_i = p''_i$ para todo $i \in I$.

Demostración:
Utilizando el Lema 6.7, sabemos que existe una familia de morfismos $(p_i : M \to M_i)_{i\in I}$ cumpliendo las condiciones $(1), (2), (3)$ y (4). Si probamos la unicidad a partir de las dos primeras el lema quedará demostrado.

Sea $m \in M$, e I_0 el conjunto finito $\{i \in I : (m)p_i \neq 0\}$. Para todo $i, j \in I$ se cumple que $q_i * p_j = q_i * p'_j$ ya que si $i = j$ entonces ambos morfismos son id_{M_i} y si $i \neq j$ entonces ambos son 0. Por lo tanto

$$(m)p'_i = \sum_{j\in I_0} (m)p_j * q_j * p'_i = \sum_{j\in I_0} (m)p_j * q_j * p_i = (m)p_i.$$

Hemos probado que $p'_i = p_i$. Del mismo modo se prueba que $p''_i = p_i$ por lo tanto $p'_i = p''_i$ para todo $i \in I$. $\square$

PROPOSICIÓN 6.9. *Sea* $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$ *un funtor que conserve coproductos y sea* $(M_i)_{i\in I}$ *una familia de objetos de* $R\text{-}\mathsf{DMod}$, $M \in R\text{-}\mathsf{DMod}$ *junto con los morfismos* $(q_i : M_i \to M)_{i\in I}$ *un coproducto de dicha familia. Sean* $(p_i : M \to M_i)_{i\in I}$ *unos morfismos cumpliendo que*

1. $q_i * p_i = \mathrm{id}_{M_i}$ *para todo* $i \in I$.
2. $q_i * p_j = 0$ *para todo* $i \neq j \in I$.
3. $\forall m \in M$, *el conjunto* $\{i \in I : (m)p_i \neq 0\}$ *es finito.*
4. $\forall m \in M$, $\sum_{i\in I}(m)p_i * q_i = m$.

Entonces tenemos que

1. $F(q_i) * F(p_i) = \mathrm{id}_{F(M_i)}$ *para todo* $i \in I$.
2. $F(q_i) * F(p_j) = 0$ *para todo* $i \neq j \in I$.
3. $\forall m' \in F(M)$, *el conjunto* $\{i \in I : (m')F(p_i) \neq 0\}$ *es finito.*
4. $\forall m' \in F(M)$, $\sum_{i\in I}(m')F(p_i) * F(q_i) = m'$.

Demostración:
Como F conserva coproductos, en particular es aditivo y conserva el objeto 0 y los morfismos 0.

También como consecuencia de que F conserve coproductos, tenemos que $F(M)$ junto con los morfismos $(F(q_i) : F(M) \to F(M_i))_{i\in I}$ es una suma directa de la familia $(F(M_i))_{i\in I}$. Los morfismos $(F(p_i))_{i\in I}$ cumplen las condiciones (1) y (2) por ser F un funtor aditivo. Entonces utilizando el Lema 6.8, podemos deducir que también se cumplen las condiciones (3) y (4). □

3. El Grupo $\Omega(F)$

En esta sección vamos a fijar dos anillos R y R' junto con dos conjuntos X, X' y aplicaciones $\pi : X \to R$, $\pi' : X' \to R'$ tales que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R y $\pi'(X')$ es un conjunto T-generador por la derecha de R'.

DEFINICIÓN 6.10. Sea $F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$. Denotaremos

$$\Omega(F) = \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varinjlim_{\sigma'\in\Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle\sigma'\rangle\!\rangle, F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle))$$

Antes de dar ejemplos de elementos en estos conjuntos vamos a ver un poco mas en detalle cómo son estos elementos

Sea $w \in \Omega(F)$, entonces $w = (w_\sigma)_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)}$ de forma que $w_\sigma \in \varinjlim_{\sigma'\in\Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle\sigma'\rangle\!\rangle, F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle))$.

Tal y como denotamos en la Definición 4.29, para los elementos w_σ tenemos $\chi(w_\sigma) \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')$ y un morfismo

$$\overline{w}_\sigma : \langle\!\langle\chi(w_\sigma)\rangle\!\rangle \to \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$$

que representa a w_σ.

LEMA 6.11. *Sean $\sigma \supseteq \tau$ dos soportes unitarios, entonces $\chi(w_\sigma) \supseteq \chi(w_\tau)$, además el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} \langle\!\langle \chi(w_\sigma) \rangle\!\rangle & \xrightarrow{\overline{w}_\sigma} & F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) \\ {\scriptstyle \Phi'_{\chi(w_\sigma)\chi(w_\tau)}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle F(\Phi_{\sigma\tau})} \\ \langle\!\langle \chi(w_\tau) \rangle\!\rangle & \xrightarrow[\overline{w}_\tau]{} & F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle) \end{array}$$

Donde con $\Phi'_{\chi(w_\sigma)\chi(w_\tau)}$ representamos el morfismo canónico que existe entre $\langle\!\langle \chi(w_\sigma) \rangle\!\rangle$ y $\langle\!\langle \chi(w_\tau) \rangle\!\rangle$.

Demostración:
Como $w \in \varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varinjlim_{\sigma' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle, F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle))$, tenemos que

$$(w_\sigma) \varinjlim_{\sigma' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle, F(\Phi_{\sigma\tau})) = w_\tau$$

Esto, en términos de los morfismos que representan a w_σ y w_τ significa que $\overline{w}_\tau$ y $\overline{w}_\sigma * F(\Phi_{\sigma\tau})$ representan el mismo elemento en

$$\varinjlim_{\sigma' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle, F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle)).$$

Utilizando la Proposición 4.28 deducimos que $\chi(\overline{w}_\tau) \subseteq \sigma$ y que el diagrama del enunciado es conmutativo. □

PROPOSICIÓN 6.12. *Sea $(\theta, \overline{w})$ un par en el que $\theta : \Xi_{\mathbf{U}}(X) \to \Xi_{\mathbf{U}}(X')$ es una aplicación que conserva el orden y $\overline{w}$ es una familia de morfismos tales que para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$,*

$$\overline{w}_\sigma : \langle\!\langle \theta(\sigma) \rangle\!\rangle \to F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$$

y tal que para todo par $\sigma \supseteq \tau$, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \langle\!\langle \theta(\sigma) \rangle\!\rangle & \xrightarrow{\overline{w}_\sigma} & F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) \\ {\scriptstyle \Phi'_{\theta(\sigma)\theta(\tau)}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle F(\Phi_{\sigma\tau})} \\ \langle\!\langle \theta(\tau) \rangle\!\rangle & \xrightarrow[\overline{w}_\tau]{} & F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle) \end{array}$$

Entonces tenemos que

$$([\overline{w}_\sigma])_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \in \varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varinjlim_{\sigma' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle, F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle))$$

donde con $[\overline{w}_\sigma]$ representamos la clase de equivalencia del morfismo $\overline{w}_\sigma$ en $\varinjlim_{\sigma' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle, F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle))$.

Además todos los elementos de $\Omega(F)$ pueden representarse como un par de esta forma, aunque no necesariamente de forma unívoca.

Demostración:
Por la construcción

$$[\overline{w}_\sigma] \in \varinjlim_{\sigma' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle, F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)).$$

La condición de que

$$[\overline{w}_\sigma] \varinjlim_{\sigma' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle \sigma' \rangle\!\rangle, F(\Phi_{\sigma\tau})) = [\overline{w}_\tau]$$

es consecuencia directa de la conmutatividad del diagrama del enunciado.

La última afirmación es la que hemos hecho se obtiene tomando $\theta(\sigma) = \chi(w_\sigma)$ para un $w \in \Omega(F)$. La razón por la que no tiene que ser unívoca esta representación es porque podemos tomar diferentes aplicaciones $\theta : \Xi_{\mathbf{U}}(X) \to \Xi_{\mathbf{U}}(X')$. $\square$

PROPOSICIÓN 6.13. *Sea $\overline{x} \in \Sigma(X)$, entonces las familias de homomorfismos $\pi^\Delta(\underline{x})$ y $\pi^\nabla(\overline{x})$ dadas en la Definición 4.12 están en $\Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})$.*

Demostración:
Ya hemos probado anteriormente que las aplicaciones $\nabla_{\overline{x}}$ y $\Delta_{\underline{x}}$ conservan el orden. Quedaría por probar la conmutatividad de los diagramas siguientes

$$\begin{array}{ccc} \langle\!\langle \Delta_{\underline{x}}\sigma \rangle\!\rangle & \xrightarrow{\pi^\Delta(\underline{x})_\sigma} & \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \\ {\scriptstyle \Phi_{\Delta_{\underline{x}}\sigma\Delta_{\underline{x}}\tau}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{\sigma\tau}} \\ \langle\!\langle \Delta_{\underline{x}}\tau \rangle\!\rangle & \xrightarrow[\pi^\Delta(\underline{x})_\tau]{} & \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \langle\!\langle \nabla_{\overline{x}}\sigma \rangle\!\rangle & \xrightarrow{\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma} & \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \\ {\scriptstyle \Phi_{\nabla_{\overline{x}}\sigma\nabla_{\overline{x}}\tau}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{\sigma\tau}} \\ \langle\!\langle \nabla_{\overline{x}}\tau \rangle\!\rangle & \xrightarrow[\pi^\nabla(\overline{x})_\tau]{} & \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \end{array}$$

Para hacer ésto vamos a aplicar directamente las definiciones: Sea $\overline{y} \in \Delta_{\underline{x}}\sigma$,

$$(\langle \underline{y} \rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})\pi^\Delta(\underline{x})_\sigma * \Phi_{\sigma\tau} = (\langle \underline{yx} \rangle_\sigma)\Phi_{\sigma\tau} =$$

$$\left\{\begin{matrix} \langle \underline{yx} \rangle_\tau & \text{si } \overline{xy} \in \tau \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \langle \underline{yx} \rangle_\tau & \text{si } \overline{y} \in \Delta_{\underline{x}}\tau \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix}\right\} =$$

$$\left(\left\{\begin{matrix} \langle \underline{y} \rangle_{\Delta_{\underline{x}}\tau} & \text{si } \overline{y} \in \Delta_{\underline{x}}\tau \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix}\right\}\right) \pi^\Delta(\underline{x})_\tau = (\langle \underline{y} \rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})\Phi_{\Delta_{\underline{x}}\sigma\Delta_{\underline{x}}\tau} * \pi^\Delta(\underline{x})_\tau.$$

Sea $\overline{xy} \in \nabla_{\overline{x}}\sigma$,

$$(\langle \underline{yx} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma * \Phi_{\sigma\tau} = (\langle \underline{y} \rangle_\sigma)\Phi_{\sigma\tau} =$$

$$\left\{\begin{matrix} \langle \underline{y} \rangle_\tau & \text{si } \overline{y} \in \tau \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix}\right\} = \left(\left\{\begin{matrix} \langle \underline{yx} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\tau} & \text{si } \overline{y} \in \tau \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix}\right\}\right) \pi^\nabla(\overline{x})_\tau =$$

$$\left(\left\{\begin{matrix} \langle \underline{yx} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\tau} & \text{si } \overline{xy} \in \nabla_{\overline{x}}\tau \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix}\right\}\right) \pi^\nabla(\overline{x})_\tau = (\langle \underline{yx} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\Phi_{\nabla_{\overline{x}}\sigma\nabla_{\overline{x}}\tau} * \pi^\nabla(\overline{x})_\tau.$$

□

DEFINICIÓN 6.14. Sean R, R', R'' anillos, X,X',X'' conjuntos, $\pi : X \to R$, $\pi' : X' \to R'$, $\pi'' : X'' \to R''$ aplicaciones tales que $\pi(X)$, $\pi'(X')$ y $\pi''(X'')$ son conjuntos T-generadores por la derecha de R, R' y R'' respectivamente. Sean $F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$, $F' \in \mathsf{LDFun}(R'\text{-}\mathsf{DMod}, R''\text{-}\mathsf{DMod})$ y $w \in \Omega(F)$, $w' \in \Omega(F')$. Entonces definiremos $w' \circ w \in \Omega(F' \circ F)$ del siguiente modo:

Consideremos para w un par $(\theta, \overline{w})$ y para w' un par $(\theta', \overline{w}')$ que representen a w y a w' respectivamente como en la Proposición 6.12, entonces $w' \circ w$ será el elemento de $\Omega(F' \circ F)$ representado por la aplicación $\theta' \circ \theta$ y los morfismos $\overline{w}'_{\theta\sigma} * F'(\overline{w}_\sigma)$.

EJERCICIO 6.1. Con las notaciones de la Definición 6.14, comprobar que $w' \circ w$ está efectivamente en $\Omega(F' \circ F)$ y que su valor no depende de la elección hecha de $(\theta, \overline{w})$ ni $(\theta', \overline{w}')$.

Solución:
Tenemos que comprobar las condiciones de la Proposición 6.12. La primera es que $\theta' \circ \theta$ conserva el orden, pero eso es trivial a partir del hecho de que θ conserva el orden y θ' también.

Sean $\sigma \supseteq \tau$ dos soportes unitarios sobre X. Por la elección de $(\theta, \overline{w})$ tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\langle\!\langle \theta(\sigma) \rangle\!\rangle & \xrightarrow{\overline{w}_\sigma} & F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) \\
{\scriptstyle \Phi'_{\theta(\sigma)\theta(\tau)}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle F(\Phi_{\sigma\tau})} \\
\langle\!\langle \theta(\tau) \rangle\!\rangle & \xrightarrow[\overline{w}_\tau]{} & F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle)
\end{array}$$

Si aplicamos F' a este diagrama obtenemos la conmutatividad del cuadrado de la derecha del siguiente diagrama, la conmutatividad del cuadrado de la izquierda viene por la elección de $(\theta', \overline{w}')$.

$$\begin{array}{ccccc}
\langle\!\langle \theta'\theta(\sigma) \rangle\!\rangle & \xrightarrow{\overline{w}'_{\theta\sigma}} & F'(\langle\!\langle \theta(\sigma) \rangle\!\rangle) & \xrightarrow{F'(\overline{w}_\sigma)} & F' \circ F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) \\
{\scriptstyle \Phi''_{\theta'\theta(\sigma)\theta'\theta(\tau)}} \big\downarrow & & {\scriptstyle F'(\Phi'_{\theta(\sigma)\theta(\tau)})} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle F' \circ F(\Phi_{\sigma\tau})} \\
\langle\!\langle \theta'\theta(\tau) \rangle\!\rangle & \xrightarrow[\overline{w}'_{\theta\tau}]{} & F'(\langle\!\langle \theta(\tau) \rangle\!\rangle) & \xrightarrow[F'(\overline{w}_\tau)]{} & F' \circ F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle)
\end{array}$$

La conmutatividad del cuadrado exterior nos da las condiciones que buscábamos.

Vamos a probar ahora la independencia de la elección de $(\theta, \overline{w})$ y $(\theta', \overline{w}')$. Para ello consideremos $(\varphi, \overline{v})$ y $(\varphi', \overline{v}')$ dos pares que cumplan las condiciones de la Proposición 6.12 y que representen respectivamente a w y a w'.

Sea σ un soporte unitario. Como $\overline{w}_\sigma$ y $\overline{v}_\sigma$ representan al mismo elemento, podemos encontrar un soporte unitario sobre X' que llamaremos

ρ' tal que $\rho' \supseteq \theta(\sigma) \cup \varphi(\sigma)$ y el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\langle\langle \rho' \rangle\rangle \arrow[r, "{\Phi'}_{\rho'\varphi(\sigma)}"] \arrow[d, "{\Phi'}_{\rho'\theta(\sigma)}"] & \langle\langle \varphi(\sigma) \rangle\rangle \arrow[d, "\overline{v}_\sigma"] \\
\langle\langle \theta(\sigma) \rangle\rangle \arrow[r, "\overline{w}_\sigma"] & F(\langle\langle \sigma \rangle\rangle).
\end{tikzcd}$$

Como $\overline{w}'_{\rho'}$ y $\overline{v}'_{\rho'}$ representan al mismo elemento, tenemos un $\rho'' \supseteq \theta'(\rho') \cup \varphi'(\rho')$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\langle\langle \rho'' \rangle\rangle \arrow[r, "{\Phi''}_{\rho''\varphi'(\rho')}"] \arrow[d, "{\Phi''}_{\rho''\theta(\rho')}"] & \langle\langle \varphi'(\rho') \rangle\rangle \arrow[d, "\overline{v}'_{\rho'}"] \\
\langle\langle \theta'(\rho') \rangle\rangle \arrow[r, "\overline{w}'_{\rho'}"] & F'(\langle\langle \rho' \rangle\rangle).
\end{tikzcd}$$

Esto nos hace que los cuadrados de la esquina inferior derecha y la superior izquierda del siguiente diagrama sean conmutativos. La conmutatividad de los otros dos cuadrados viene por las condiciones dadas a $\overline{v}'$ y $\overline{w}'$ en la Proposición 6.12.

$$\begin{tikzcd}
\langle\langle \rho'' \rangle\rangle \arrow[r, "{\Phi''}_{\rho''\varphi'(\rho')}"] \arrow[d, "{\Phi''}_{\rho''\theta(\rho')}"] & \langle\langle \varphi'(\rho') \rangle\rangle \arrow[r, "{\Phi''}_{\phi'(\rho')\phi'\phi(\sigma)}"] \arrow[d, "\overline{v}'_{\rho'}"] & \langle\langle \phi'\phi(\sigma) \rangle\rangle \arrow[d, "\overline{v}'_{\phi(\sigma)}"] \\
\langle\langle \theta'(\rho') \rangle\rangle \arrow[r, "\overline{w}'_{\rho'}"] \arrow[d, "{\Phi''}_{\theta(\rho')\theta'\theta(\sigma)}"] & F'(\langle\langle \rho' \rangle\rangle) \arrow[r, "F'({\Phi'}_{\rho'\varphi(\sigma)})"] \arrow[d, "F'({\Phi'}_{\rho'\theta(\sigma)})"] & F'(\langle\langle \varphi(\sigma) \rangle\rangle) \arrow[d, "F'(\overline{v}_\sigma)"] \\
\langle\langle \theta'\theta(\sigma) \rangle\rangle \arrow[r, "\overline{w}'_{\theta(\sigma)}"] & F'(\langle\langle \theta(\sigma) \rangle\rangle) \arrow[r, "F'(\overline{w}_\sigma)"] & F' \circ F(\langle\langle \sigma \rangle\rangle).
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del cuadrado exterior nos dice que efectivamente los morfismos $\overline{w}'_{\theta(\sigma)} * F'(\overline{w}_\sigma)$ y $\overline{v}'_{\varphi(\sigma)} * F'(\overline{v}_\sigma)$ representan al mismo objeto en

$$\varinjlim_{\sigma'' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X'')} \mathrm{Hom}_{R''}(\langle\langle \sigma'' \rangle\rangle, F' \circ F(\langle\langle \sigma \rangle\rangle)).$$

□

NOTA 6.15. *Con esta notación obtenemos como consecuencia de la Proposición 4.13 que para todo* $\overline{x}, \overline{y} \in \Sigma(X)$,

$$\pi^\nabla(\overline{x}) \circ \pi^\nabla(\overline{y}) = \pi^\nabla(\overline{xy})$$

$$\pi^\Delta(\underline{x}) \circ \pi^\Delta(\underline{y}) = \pi^\Delta(\underline{xy})$$

EJERCICIO 6.2. Sean R^i anillos, X^i conjuntos, $\pi^i : X^i \to R^i$ aplicaciones tales que $\pi^i(X^i)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R^i, para $i = 1, 2, 3, 4$, $F^i \in \mathsf{LDFun}(R^i\text{-}\mathsf{DMod}, R^{i+1}\text{-}\mathsf{DMod})$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces

1. $(w^3 \circ w^2) \circ w^1 = w^3 \circ (w^2 \circ w^1)$ para todo $w^i \in \Omega(F^i)$, $i = 1, 2, 3$.

2. $(w^2+v^2)\circ w^1 = w^2\circ w^1 + v^2\circ w^1$ para todo $w^2, v^2 \in \Omega(F^2)$, $w^1 \in \Omega(F^1)$.
3. $w^2\circ(w^1+v^1) = w^2\circ w^1 + w^2\circ v^1$ para todo $w^1 \in \Omega(F^2)$, $w^1, v^1 \in \Omega(F^1)$.

Deducir que para todo funtor $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ que conserve límites directos $\Omega(F)$ es un bimódulo unitario sobre los anillos con identidad $\Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})$ y $\Omega(\mathrm{Id}_{R'\text{-}\mathsf{DMod}})$.

Solución:
(1). Sean $(\theta^i, \overline{w}^i)$ pares que representan a w^i para $i = 1,2,3$. El elemento $w^3\circ w^2$ viene representado por $(\theta^3\circ\theta^2, \overline{w}^3_{\theta^2\sigma_2} * F^2(\overline{w}^2_{\sigma_2}))$ por lo tanto $(w^3\circ w^2)\circ w^1$ viene representado por

$$(\theta^3\circ\theta^2\circ\theta^1, \overline{w}^3_{\theta^2\theta^1\sigma_1} * F^2(\overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1})))$$

El elemento $w^2\circ w^1$ viene representado por $(\theta^2\circ\theta^1, \overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1}))$ y por lo tanto $w^3\circ(w^2\circ w^1)$ viene representado por

$$(\theta^3\circ\theta^2\circ\theta^1, \overline{w}^3_{\theta^2\theta^1\sigma_1} * F^2(\overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1})))$$

que es precisamente el mismo morfismo que representaba a $(w^3\circ w^2)\circ w^1$.

(2). Sean $(\theta^2, \overline{w}^2)$, $(\theta^1, \overline{w}^1)$ y $(\varphi^2, \overline{v}^2)$ pares que representen respectivamente a w^2,w^1 y v^2. Denotaremos

$$\begin{array}{rccc} \theta^2\cup\varphi^2: & \Xi_{\mathbf{U}}(X^2) & \to & \Xi_{\mathbf{U}}(X^3) \\ & \sigma_2 & \mapsto & \theta^2(\sigma_2)\cup\varphi^2(\sigma_2) \end{array}$$

Esta aplicación claramente conserva el orden. El elemento w^2+v^2 viene representado por

$$(\theta^2\cup\varphi^2, \Phi^2_{\theta^2\cup\varphi^2\sigma_2,\theta^2\sigma_2} * \overline{w}^2_{\sigma_2} + \Phi^2_{\theta^2\cup\varphi^2\sigma_2,\varphi^2\sigma_2} * \overline{v}^2_{\sigma_2})$$

por lo tanto $(w^2+v^2)\circ w^1$ viene representado por

$$((\theta^2\cup\varphi^2)\circ\theta^1, (\Phi^2_{(\theta^2\cup\varphi^2)\theta^1\sigma_1,\theta^2\theta^1\sigma_1} * \overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} +$$
$$\Phi^2_{(\theta^2\cup\varphi^2)\theta^1\sigma_1,\varphi^2\theta^1\sigma_1} * \overline{v}^2_{\theta^1\sigma_1}) * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1})) =$$
$$((\theta^2\cup\varphi^2)\circ\theta^1, \Phi^2_{(\theta^2\cup\varphi^2)\theta^1\sigma_1,\theta^2\theta^1\sigma_1} * \overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1}) +$$
$$\Phi^2_{(\theta^2\cup\varphi^2)\theta^1\sigma_1,\varphi^2\theta^1\sigma_1} * \overline{v}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1})).$$

Por otro lado, $w^2\circ w^1$ viene representado por $(\theta^2\circ\theta^1, \overline{w}^2_{\theta^1\sigma_2} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1}))$ y $v^2\circ w^1$ por $(\varphi^2\circ\theta^1, \overline{v}^2_{\theta^1\sigma_2} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1}))$ por lo tanto $w^2\circ w^1 + v^2\circ w^1$ viene representado por

$$(\theta^2\theta^1\cup\varphi^2\theta^1, \Phi^2_{(\theta^2\theta^1\cup\varphi^2\theta^1)\sigma_1,\theta^2\theta^1\sigma_1} * \overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1}) +$$
$$\Phi^2_{(\theta^2\theta^1\cup\varphi^2\theta^1)\sigma_1,\varphi^2\theta^1\sigma_1} * \overline{v}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1})).$$

que es precisamente el par que representaba a $(w^2+v^2)\circ w^1$ ya que para todo σ_1,

$$(\theta^2\theta^1\cup\varphi^2\theta^1)(\sigma_1) = \theta^2\theta^2\sigma_1\cup\varphi^2\theta^1\sigma_1 = (\theta^2\cup\varphi^2)(\theta^1\sigma_1).$$

(3). Sean $(\theta^2, \overline{w}^2)$, $(\theta^1, \overline{w}^1)$, $(\varphi^1, \overline{v}^1)$ pares que representen respectivamente a w^2,w^1 y v^1.

El elemento $w^1 + v^1$ vendrá representado por

$$(\theta^1 \cup \varphi^1, \Phi^1_{(\theta^1\cup\varphi^1)\sigma_1, \theta^1\sigma_1} * \overline{w}^1_{\sigma_1} + \Phi^1_{(\theta^1\cup\varphi^1)\sigma_1, \varphi^1\sigma_1} * \overline{v}^1_{\sigma_1})$$

por lo tanto $w^2 \circ (w^1 + v^1)$ viene representado por el par

$$(\theta^2 \circ (\theta^1 \cup \varphi^1), \overline{w}^2_{(\theta^1\cup\varphi^1)\sigma_1} * F^1(\Phi^1_{(\theta^1\cup\varphi^1)\sigma_1, \theta^1\sigma_1} * \overline{w}^1_{\sigma_1} +$$

$$\Phi^1_{(\theta^1\cup\varphi^1)\sigma_1, \varphi^1\sigma_1} * \overline{v}^1_{\sigma_1})).$$

Por otro lado, el elemento $w^2 \circ w^1$ viene representado por $(\theta^2 \circ \theta^1, \overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1}))$ y $w^2 \circ v^2$ por $(\theta^2 \circ \varphi^1, \overline{w}^2_{\varphi^1\sigma_1} * F^1(\overline{v}^1_{\sigma_1}))$ por lo tanto, $w^2 \circ w^1 + w^2 \circ v^1$ viene representado por

$$(\theta^2 \circ \theta^1 \cup \theta^2 \circ \varphi^1, \Phi^2_{(\theta^2\circ\theta^1\cup\theta^2\circ\varphi^1)\sigma_1, \theta^2\theta^1\sigma_1} * \overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} * F^1(\overline{w}^1_{\sigma_1}) +$$

$$\Phi^2_{(\theta^2\circ\theta^1\cup\theta^2\circ\varphi^1)\sigma_1, \theta^2\varphi^1\sigma_1} * \overline{w}^2_{\varphi^1\sigma_1} * F^1(\overline{v}^1_{\sigma_1}))$$

Pero este par es el mismo que representaba a $w^2 \circ (w^1 + v^1)$ ya que $\theta^2 \circ \theta^1 \cup \theta^2 \circ \varphi^1 = \theta^2 \circ (\theta^1 \cup \varphi^1)$ y

$$\Phi^2_{(\theta^2\circ\theta^1\cup\theta^2\circ\varphi^1)\sigma_1, \theta^2\theta^1\sigma_1} * \overline{w}^2_{\theta^1\sigma_1} = \overline{w}^2_{(\theta^1\cup\varphi^1)\sigma_1} * F^1(\Phi^1_{(\theta^1\cup\varphi^1)\sigma_1, \theta^1\sigma_1})$$

tal y como se ve en la Proposición 6.12.

La identidad del anillo $\Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})$ es precisamente el elemento representado por el par $(\mathrm{id}_{\Xi_{\mathbf{U}}(X)}, \mathrm{id}_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle})$. Claramente los bimódulos del tipo $\Omega(F)$ son unitarios. □

Hasta ahora hemos definido $\Omega(-)$ para objetos. Vamos a definirlo para morfismos (es decir para transformaciones naturales entre funtores) y probaremos que con estas condiciones $\Omega(-)$ se convierte en un funtor.

Definición 6.16. Sean $F, G : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ dos funtores que conserven límites directos y sea $\alpha : F \to G$ una transformación natural. Entonces definiremos $\Omega(\alpha) : \Omega(F) \to \Omega(G)$ del siguiente modo: Dado un $w \in \Omega(F)$ representado por el par $(\theta, \overline{w})$, definiremos $(w)\Omega(\alpha)$ el elemento de $\Omega(G)$ representado por $(\theta, \overline{w}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle})$.

Ejercicio 6.3. Demostrar que el valor de $(w)\Omega(\alpha)$ dado en la Definición 6.16 no depende de la elección del par $(\theta, \overline{w})$ que represente a w.

Solución:

Supongamos que los pares $(\theta, \overline{w})$ y $(\varphi, \overline{v})$ representan a w y sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Entonces como $\overline{w}_\sigma$ y $\overline{v}_\sigma$, existirá un soporte unitario $\rho' \in \Xi_{\mathbf{U}}(X')$ tal que $\Phi'_{\rho'\theta(\sigma)} * \overline{w}_\sigma = \Phi'_{\rho'\varphi(\sigma)} * \overline{v}_\sigma$ pero entonces

$$\Phi'_{\rho'\theta(\sigma)} * \overline{w}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle} = \Phi'_{\rho'\varphi(\sigma)} * \overline{v}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}$$

por lo tanto $\overline{w}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}$ representa el mismo elemento que $\overline{v}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}$. □

Ejercicio 6.4. Sean $F, G : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ dos funtores que conserven límites directos y sea $\alpha : F \to G$ una transformación natural. Entonces $\Omega(\alpha) : \Omega(F) \to \Omega(G)$ es un homomorfismo de bimódulos.

Solución:
Sean $w, v \in \Omega(F)$ y $(\theta, \overline{w})$, $(\varphi, \overline{v})$ pares que representen a w y a v respectivamente. Entonces

$$(\theta \cup \varphi, \Phi'_{(\theta\cup\varphi)\sigma,\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma + \Phi'_{(\theta\cup\varphi)\sigma,\varphi\sigma} * \overline{v}_\sigma)$$

representa a $w + v$, por lo tanto $(w + v)\Omega(\alpha)$ viene representado por

$$(\theta \cup \varphi, (\Phi'_{(\theta\cup\varphi)\sigma,\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma + \Phi'_{(\theta\cup\varphi)\sigma,\varphi\sigma} * \overline{v}_\sigma) * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}) =$$

$$(\theta \cup \varphi, \Phi'_{(\theta\cup\varphi)\sigma,\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle} + \Phi'_{(\theta\cup\varphi)\sigma,\varphi\sigma} * \overline{v}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle})$$

que es precisamente el par que representa a $(w)\Omega(\alpha) + (v)\Omega(\alpha)$.

Sean $w \in \Omega(F)$, $g \in \Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})$ representados por $(\theta, \overline{w})$ y $(\gamma, \overline{g})$ respectivamente. Tenemos que probar que $(w \circ g)\Omega(\alpha) = (w)\Omega(\alpha) \circ g$.

El elemento $w \circ g$ viene representado por $(\theta \circ \gamma, \overline{w}_{\gamma\sigma} * F(\overline{g}_\sigma))$. Entonces $(w \circ g)\Omega(\alpha)$ viene representado por $(\theta \circ \gamma, \overline{w}_{\gamma\sigma} * F(\overline{g}_\sigma) * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle})$. Utilizando la naturalidad de α deducimos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(\langle\!\langle\gamma\sigma\rangle\!\rangle) \arrow[r, "F(\overline{g}_\sigma)"] \arrow[d, "\alpha_{\langle\!\langle\gamma\sigma\rangle\!\rangle}"] & F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle) \arrow[d, "\alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}"] \\
G(\langle\!\langle\gamma\sigma\rangle\!\rangle) \arrow[r, "G(\overline{g}_\sigma)"] & G(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle)
\end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$(\theta \circ \gamma, \overline{w}_{\gamma\sigma} * F(\overline{g}_\sigma) * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}) =$$

$$(\theta \circ \gamma, \overline{w}_{\gamma\sigma} * \alpha_{\langle\!\langle\gamma\sigma\rangle\!\rangle} * G(\overline{g}_\sigma))$$

que es precisamente el par que representa a $(w)\Omega(\alpha) \circ g$.

Por el otro lado sean $w \in \Omega(F)$ y $g \in \Omega(\mathrm{Id}_{R'\text{-}\mathsf{DMod}})$ representados respectivamente por $(\theta, \overline{w})$, $(\gamma, \overline{g})$. El elemento $g \circ w$ viene representado por $(\gamma \circ \theta, \overline{g}_{\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma)$ y $(g \circ w)\Omega(\alpha)$ por $(\gamma \circ \theta, \overline{g}_{\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle})$ que es precisamente el par que representa a $g \circ (w)\Omega(\alpha)$. □

Proposición 6.17. *Sean $F, G, H : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ tres funtores que conserven límites directos y sean $\alpha : F \to G$ y $\beta : G \to H$ transformaciones naturales, entonces $\Omega(\alpha * \beta) = \Omega(\alpha) * \Omega(\beta)$, es decir, Ω se convierte en un funtor*

$$\Omega : \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod}) \to \Omega(\mathrm{Id}_{R'\text{-}\mathsf{DMod}})\text{-}\mathsf{MOD}\text{-}\Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}}).$$

Demostración:
Sea $w \in \Omega(F)$ representado por $(\theta, \overline{w})$, entonces $(w)\Omega(\alpha * \beta)$ viene representado por $(\theta, \overline{w}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle} * \beta_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle})$. Por otro lado, $(w)\Omega(\alpha)$ viene representado por $(\theta, \overline{w}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle})$ y $(w)\Omega(\alpha) * \Omega(\beta)$ por $(\theta, \overline{w}_\sigma * \alpha_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle} * \beta_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle})$ que era el par que representaba a $(w)\Omega(\alpha * \beta)$. □

COROLARIO 6.18. *Sean* $F, G : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ *dos funtores que conserven límites directos, y sea* $\alpha : F \to G$ *una equivalencia entre dichos funtores, entonces* $\Omega(\alpha) : \Omega(F) \to \Omega(G)$ *es un isomorfismo de bimódulos.*

Demostración:
Sea $\beta : G \to F$ la transformación inversa. Utilizando la Proposición anterior, para todo $w \in \Omega(F)$, $(w)\Omega(\alpha) * \Omega(\beta) = w$ y para todo $v \in \Omega(G)$, $(v)\Omega(\beta) * \Omega(\alpha) = v$. Por lo tanto $\Omega(\alpha)$ es un isomorfismo con inverso $\Omega(\beta)$. □

4. La Transformación $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$

En esta sección vamos a fijar un anillo R, otro anillo con identidad A'. Consideraremos un $F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$. Al ser A' un anillo con identidad, tenemos que $A'\text{-}\mathsf{DMod} = A'\text{-}\mathsf{Mod}$, pero seguiremos utilizando la notación $A'\text{-}\mathsf{DMod}$ para evitar confusiones. También fijaremos un generador M de la categoría $R\text{-}\mathsf{DMod}$.

Denotaremos $E = \mathrm{End}({}_R M)$. El módulo M adquiere estructura de E-módulo por la derecha unitario con la operación $m \cdot e = (m)e$. De esta forma $F(M)$ adquiere también estructura de E-módulo unitario con la operación $m' \cdot e = (m')F(e)$ para todo $m' \in F(M)$. Esto nos permite hacer la siguiente definición:

DEFINICIÓN 6.19. Con las notaciones anteriores, definiremos $\mathbb{C}(F) = \mathrm{Hom}_E(M, F(M))$.

También denotaremos

$$\begin{array}{rccc} \varsigma_M : & \mathbb{C}(F) \otimes_R M & \to & F(M) \\ & c \otimes m & \mapsto & c(m) \end{array}$$

EJERCICIO 6.5. Realizar las siguientes comprobaciones asociadas a la Definición 6.19:

1. $\mathbb{C}(F)$ es un (A', R)-bimódulo unitario como A'-módulo.
2. ς_M está bien definido y es un A'-homomorfismo.

Solución:

1. Ésto es un resultado general para los módulos del tipo $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$ cuando los módulos X e Y tienen estructura de bimódulos. Recordaremos únicamente cómo se definen las operaciones. Sean $c \in \mathbb{C}(F)$, $a' \in A'$, $r \in R$ y $m \in M$, entonces $(a'c)(m) := a'(c(m))$ y $(cr)(m) := c(rm)$.
2. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \mathbb{C}(F) \times M & \to & F(M) \\ & (c, m) & \mapsto & c(m). \end{array}$$

Esta aplicación es bilineal y R-equilibrada con la operación definida en el apartado anterior, por lo tanto, utilizando la Definición 1.54 deducimos que existe un único homomorfismo ς_M :

$\mathbb{C}(F) \otimes_R M \to F(M)$ dado por $(c \otimes m)\varsigma_M = c(m)$. Además utilizando la estructura de A'-módulo de $\mathbb{C}(F) \otimes_R M$ dada en la Proposición 1.56 deducimos que ς_M es un A'-homomorfismo.

$\square$

DEFINICIÓN 6.20. Sea I un conjunto de índices. Vamos a definir

$$\varsigma_{M^{(I)}} : \mathbb{C}(F) \otimes_R M^{(I)} \to F(M^{(I)})$$

como la aplicación inducida por ς_M en cada una de las componentes ya que $\mathbb{C}(F) \otimes_R M^{(I)} \simeq (\mathbb{C}(F) \otimes_R M)^{(I)}$ y $F(M^{(I)}) \simeq F(M)^{(I)}$ porque ambos funtores conservan límites directos.

LEMA 6.21. *Sean I e J dos conjuntos de índices, y sea $f : M^{(I)} \to M^{(J)}$ un R-homomorfismo. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(F) \otimes_R M^{(I)} & \xrightarrow{\mathbb{C}(F)\otimes f} & \mathbb{C}(F) \otimes_R M^{(J)} \\ \downarrow{\scriptstyle \varsigma_{M^{(I)}}} & & \downarrow{\scriptstyle \varsigma_{M^{(J)}}} \\ F(M^{(I)}) & \xrightarrow{F(f)} & F(M^{(J)}). \end{array}$$

Demostración:
Vamos a utilizar las siguientes notaciones. Dados $i \in I$, $j \in J$ denotaremos por

$$p_i : M^{(I)} \to M \quad q_i : M \to M^{(I)}$$
$$\overline{p}_j : M^{(J)} \to M \quad \overline{q}_j : M \to M^{(J)}$$

las proyecciones e inyecciones en cada una de las componentes. Estos homomorfismos cumplen las condiciones del Lema 6.7.

Sean $i \in I$, $j \in J$, denotaremos $e_{ij} = q_i * f * \overline{p}_j : M \to M$. Estos elementos están en $E = \mathrm{End}({}_R M)$. Vamos a utilizar varias veces la Proposición 6.9.

Consideremos un elemento $c \in \mathbb{C}(F)$ y un $m \in M$. Si probamos la conmutatividad del diagrama para un elemento de la forma $c \otimes (m)q_i$ entonces lo habremos probado para todos ya que todos los demás se pueden poner como sumas finitas de elementos de esta forma. Vamos pues a centrarnos en probar que el diagrama conmuta para el elemento $c \otimes (m)q_i$.

Por definición de $\varsigma_{M^{(I)}}$, tenemos que

$$(c \otimes (m)q_i)\varsigma_{M^{(I)}} = (c(m))F(q_i),$$

por lo tanto

$$(c \otimes (m)q_i)\varsigma_{M^{(I)}} * F(f) =$$
$$(c(m))F(q_i * f) = \sum_{j\in J}(c(m))F(q_i * f * \overline{p}_j) * F(\overline{q}_j) =$$
$$\sum_{j\in J}(c(m))F(e_{ij}) * F(\overline{q}_j) = \sum_{j\in J}(c(me_{ij}))F(\overline{q}_j) =$$

$$\sum_{j\in J}(c((m)q_i * f * \overline{p}_j))F(\overline{q}_j) = (\sum_{j\in J} c \otimes (m)q_i * f * \overline{p}_j * \overline{q}_j)\varsigma_{M^{(J)}} =$$

$$(c \otimes \sum_{j\in J}(m)q_i * f * \overline{p}_j * \overline{q}_j)\varsigma_{M^{(J)}} = (c \otimes (m)q_i * f)\varsigma_{M^{(J)}} =$$

$$(c \otimes (m)q_i)(\mathbb{C}\,(F) \otimes f) * \varsigma_{M^{(J)}}.$$

□

Proposición 6.22. *Sea ${}_RN$ un R-módulo por la izquierda de R-*DMod*, $H(N) = \mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN)$ y sea $\eta_N : M^{(H(N))} \to N$ el epimorfismo canónico dado en la Definición 5.3. Entonces existe un único A'-homomorfismo que denotaremos $\varsigma_N : \mathbb{C}\,(F) \otimes_R N \to F(N)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\,(F) \otimes_R M^{(H(N))} \arrow[r, "\mathbb{C}(F)\otimes\eta_N"] \arrow[d, "\varsigma_{M^{(H(N))}}"] & \mathbb{C}\,(F) \otimes_R N \arrow[d, "\varsigma_N"] \\
F(M^{(H(N))}) \arrow[r, "F(\eta_N)"] & F(N).
\end{tikzcd}$$

Demostración:
Empezaremos probando la unicidad y posteriormente probaremos la existencia.

Supongamos que existe dos morfismos $h_1, h_2 : \mathbb{C}\,(F) \otimes_R N \to F(N)$ tales que

$$\mathbb{C}\,(F) \otimes \eta_N * h_1 = \varsigma_{M^{(H(N))}} * F(\eta_N) = \mathbb{C}\,(F) \otimes \eta_N * h_2.$$

Entonces $\mathbb{C}\,(F) \otimes \eta_N * (h_1 - h_2) = 0$ y como η_N es un epimorfismo, $\mathbb{C}\,(F) \otimes \eta_N$ también lo es y deducimos que $h_1 - h_2 = 0$.

Para probar la existencia vamos a denotar $I(N) = \mathrm{Hom}_R({}_RM, \mathrm{Ker}(\eta_N))$ y por φ_N la composición de los morfismos

$$M^{(I(N))} \xrightarrow{\eta_{\mathrm{Ker}(\eta_N)}} \mathrm{Ker}(\eta_N) \xrightarrow{j} M^{(H(N))}$$

donde j es la inclusión canónica. Utilizando la Proposición 5.4 en su punto (3), sabemos que $\mathrm{Im}(\varphi_N) = \mathrm{Ker}(\eta_N)$ ya que η_N es un epimorfismo entre módulos de R-DMod y por lo tanto tiene núcleo unitario. Esto hace que la siguiente sucesión sea una sucesión exacta en R-DMod (y en R-MOD)

$$M^{(I(N))} \xrightarrow{\varphi_N} M^{(H(N))} \xrightarrow{\eta_N} N \longrightarrow 0$$

Aplicando los funtores $\mathbb{C}\,(F) \otimes_R -$ y F que conservan coímites y en particular son exactos por la derecha, obtenemos el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\,(F) \otimes M^{(I(N))} \arrow[r, "\mathbb{C}(F)\otimes\varphi_N"] \arrow[d, "\varsigma_{M^{(I(N))}}"] & \mathbb{C}\,(F) \otimes M^{(H(N))} \arrow[r, "\mathbb{C}(F)\otimes\eta_N"] \arrow[d, "\varsigma_{M^{(H(N))}}"] & \mathbb{C}\,(F) \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\varsigma_N"] & 0 \\
F(M^{(I(N))}) \arrow[r, "F(\varphi_N)"] & F(M^{(H(N))}) \arrow[r, "F(\eta_N)"] & F(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del cuadrado de la izquierda nos viene dada por el Lema 6.21. La existencia del morfismo ς_N viene como consecuencia de la exactitud de las filas ya que

$$\mathbb{C}\,(F) \otimes \varphi_N * \varsigma_{M^{(H(N))}} * F(\eta_N) = \varsigma_{M^{(I(N))}} * F(\varphi_N) * F(\eta_N) = 0$$

por lo tanto $\varsigma_{M^{(H(N))}} * F(\eta_N)$ factoriza a través de $(\mathbb{C}\,(F) \otimes \varphi_N)^c = C(F) \otimes \eta_N$. El morfismo ς_N es el resultado de dicha factorización. $\square$

Proposición 6.23. *La asignación* $\varsigma : \mathbb{C}\,(F) \otimes_R - \to F$ *es una transformación natural.*

Demostración:
Sean L y N en R-DMod y $h : L \to N$ un homomorfismo. En la demostración de la Proposición 5.4 se vió que el siguiente diagrama era conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M^{(H(L))} \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[d, "M^{(H(h))}"'] & L \arrow[d, "h"] \\
M^{(H(N))} \arrow[r, "\eta_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

de donde podemos deducir la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\,(F) \otimes_R M^{(H(L))} \arrow[r, "\mathbb{C}(F)\otimes\eta_L"] \arrow[d, "\mathbb{C}(F)\otimes M^{(H(h))}"'] & \mathbb{C}\,(F) \otimes_R L \arrow[d, "\mathbb{C}(F)\otimes h"] \\
\mathbb{C}\,(F) \otimes_R M^{(H(N))} \arrow[r, "\mathbb{C}(F)\otimes\eta_N"'] & \mathbb{C}\,(F) \otimes_R N
\end{tikzcd} \tag{6.23.1}$$

$$\begin{tikzcd}
F(M^{(H(L))}) \arrow[r, "F(\eta_L)"] \arrow[d, "F(M^{(H(h))})"'] & F(L) \arrow[d, "F(h)"] \\
F(M^{(H(N))}) \arrow[r, "F(\eta_L)"'] & F(N)
\end{tikzcd} \tag{6.23.2}$$

La construcción de ς_N y ς_L nos da la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\,(F) \otimes_R M^{(H(N))} \arrow[r, "\mathbb{C}(F)\otimes\eta_N"] \arrow[d, "\varsigma_{M^{(H(N))}}"'] & \mathbb{C}\,(F) \otimes_R N \arrow[d, "\varsigma_N"] \\
F(M^{(H(N))}) \arrow[r, "F(\eta_N)"'] & F(N).
\end{tikzcd} \tag{6.23.3}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\,(F) \otimes_R M^{(H(L))} \arrow[r, "\mathbb{C}(F)\otimes\eta_L"] \arrow[d, "\varsigma_{M^{(H(L))}}"'] & \mathbb{C}\,(F) \otimes_R L \arrow[d, "\varsigma_L"] \\
F(M^{(H(L))}) \arrow[r, "F(\eta_L)"'] & F(L).
\end{tikzcd} \tag{6.23.4}$$

y el Lema 6.21 nos da la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(F) \otimes_R M^{(H(L))} & \xrightarrow{\mathbb{C}(F)\otimes M^{(H(h))}} & \mathbb{C}(F) \otimes_R M^{(H(N))} \\ \varsigma_{M^{(H(L))}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \varsigma_{M^{(H(N))}} \\ F(M^{(H(L))}) & \xrightarrow[F(M^{(H(h))})]{} & F(M^{(H(N))}). \end{array} \tag{6.23.5}$$

De ahí obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{gathered} \mathbb{C}(F) \otimes \eta_L * \mathbb{C}(F) \otimes h * \varsigma_N = \text{por } 6.23.1 \\ \mathbb{C}(F) \otimes M^{(H(h))} * \mathbb{C}(F) \otimes \eta_N * \varsigma_N = \text{por } 6.23.3 \\ \mathbb{C}(F) \otimes M^{(H(h))} * \varsigma_{M^{(H(L))}} * F(\eta_L) = \text{por } 6.23.5 \\ \varsigma_{M^{(H(L))}} * F(M^{(H(h))}) * F(\eta_L) = \text{por } 6.23.2 \\ \varsigma_{M^{(H(L))}} * F(\eta_L) * F(h) = \text{por } 6.23.4 \\ \mathbb{C}(F) \otimes \eta_L * \varsigma_L * F(h). \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{C}(F) \otimes \eta_L * (\mathbb{C}(F) \otimes h * \varsigma_N - \varsigma_L * F(h)) = 0$$

y como $\mathbb{C}(F) \otimes \eta_L$ es un epimorfismo, deducimos que

$$\mathbb{C}(F) \otimes h * \varsigma_N = \varsigma_L * F(h)$$

que es precisamente la condición de naturalidad de ς. □

Proposición 6.24. *La transformación natural ς es una equivalencia de funtores si y solo si ς_M es un isomorfismo.*

Demostración:
Si ς es una equivalencia de funtores, trivialmente ς_M es un isomorfismo. Vamos a probar el recíproco. Por un lado tenemos que si ς_M es un isomorfismo, entonces $\varsigma_{M^{(I)}}$ es un isomorfismo para todo conjunto de índices I ya que es un isomorfismo componente a componente.

Para ver que es un isomorfismo para todo módulo, consideremos el siguiente diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}(F)\otimes M^{(I(N))} & \xrightarrow{\mathbb{C}(F)\otimes\varphi_N} & \mathbb{C}(F)\otimes M^{(H(N))} & \xrightarrow{\mathbb{C}(F)\otimes\eta_N} & \mathbb{C}(F)\otimes N & \longrightarrow & 0 \\ \simeq \Big\downarrow \varsigma_{M^{(I(N))}} & & \simeq \Big\downarrow \varsigma_{M^{(H(N))}} & & \Big\downarrow \varsigma_N & & \\ F(M^{(I(N))}) & \xrightarrow{F(\varphi_N)} & F(M^{(H(N))}) & \xrightarrow{F(\eta_N)} & F(N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como $\varsigma_{M^{(H(N))}} * F(\eta_N)$ es un epimorfismo, entonces $\mathbb{C}(F) \otimes \eta_N * \varsigma_N$ también lo es y por lo tanto ς_N lo es.

Supongamos que tenemos $x \in \mathrm{Ker}(\varsigma_N)$. Como $\mathbb{C}(F) \otimes \eta_N$ es epi, tenemos $y \in (\mathbb{C}(F)\otimes\eta_N)^{-1}(x)$. Como $(y)\varsigma_{M^{(H(N))}} * F(\eta_N) = 0$ entonces existe $z \in \mathbb{C}(F) \otimes M^{(I(N))}$ tal que $(z)\mathbb{C}(F) \otimes \varphi_N = y$ pero de ahí deducimos que $x = (z)\mathbb{C}(F) \otimes \varphi_N * \mathbb{C}(F) \otimes \eta_N = 0$. □

COROLARIO 6.25. *Sea* ${}_RN \in R$-DMod, $n \in N$ *y* $c \in \mathbb{C}(F)$. *Entonces*

$$(c \otimes n)\varsigma_N = (c(m))F(g)$$

donde $g : M \to N$ *es cualquier homomorfismo con* $n \in \mathrm{Im}(g)$ *y* $m \in g^{-1}(n)$.

Demostración:
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(F) \otimes_R M & \xrightarrow{\varsigma_M} & F(M) \\ {\scriptstyle \mathbb{C}(F)\otimes g}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle F(g)} \\ \mathbb{C}(F) \otimes_R N & \xrightarrow{\varsigma_N} & F(N). \end{array}$$

Utilizando la conmutatividad de este diagrama deducimos que

$$(c \otimes n)\varsigma_N = (c \otimes m)(\mathbb{C}(F) \otimes g * \varsigma_N) =$$
$$(c \otimes m)\varsigma_M * F(g) = (c(m))F(g).$$

□

NOTA 6.26. *En esta sección hemos hecho la construcción de* $\mathbb{C}(F)$ *y de la transformación natural* $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$. *Esta construcción esta basada en la elección de un generador de la categoría* R-DMod, *sin embargo la notación no hace referencia a dicho generador. Lo que haremos para hacer la distinción del generador utilizado es decir "Sea* $\mathbb{C}(F)$ *el bimódulo construido a partir del generador ... y* $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ *la transformación natural asociada."*

En realidad la construcción está muy relacionada cuando utilizamos diferentes generadores.

PROPOSICIÓN 6.27. *Sean* ${}_RM$ *y* ${}_RM'$ *dos generadores de la categoría* R-DMod, *sean* $\mathbb{C}(F)$ *y* $\mathbb{C}'(F)$ *los bimódulos asociados a cada uno de estos generadores y sean* $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ *y* $\varsigma' : \mathbb{C}'(F) \otimes_R - \to F$ *las transformaciones naturales asociadas. Entonces existe un isomorfismo de bimódulos*

$$\alpha : \mathbb{C}(F) \to \mathbb{C}'(F)$$

tal que para todo ${}_RN \in R$-DMod, $(\alpha \otimes N) * \varsigma'_N = \varsigma_N$, *o dicho de otro modo, el siguiente diagrama de funtores y transformaciones naturales es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(F) \otimes_R - & \xrightarrow{\varsigma} & F \\ {\scriptstyle \alpha\otimes -}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_F} \\ \mathbb{C}'(F) \otimes_R - & \xrightarrow[\varsigma']{} & F \end{array}$$

Demostración:
Sea $H(M') = \mathrm{Hom}_R(M, M')$ y consideremos el epimorfismo canónico

$$\eta_{M'} : M^{(H(M'))} \to M'$$

Sea $c \in \mathbb{C}(F)$, $m' \in M'$. Vamos a definir

$$\alpha(c)(m') = \sum_{h \in H(M')} (c(m_h))F(h)$$

donde $(m_h)_{h\in H(M')} \in M^{(H(M'))}$ es tal que $((m_h)_{h\in H(M')})\eta_M = m'$, es decir, $\sum_{h\in H(M')}(m_h)h = m'$. Tenemos que hacer varias comprobaciones con respecto a α, una de las primeras cosas es ver que la definición no depende de la elección de $(m_h)_{h\in H(M')}$. Antes de ver ésto vamos a ver un poco mas en detalle cómo es $F(M^{(H(M'))})$.

Denotemos con

$$p_h : M^{(H(M'))} \to M \quad q_h : M \to M^{(H(M'))}$$

las proyecciones e inyecciones canónicas.

Sea $z \in F(M^{(H(M'))})$. Utilizando la Proposición 6.9 podemos deducir que el conjunto $\{h \in H(M') : (z)F(p_h) \neq 0\}$ es finito y que $z = \sum_{h\in H(M')}(z)F(p_h) * F(q_h)$. Tendremos que hacer uso de esta igualdad un poco mas adelante.

Para probar que la definición de $\alpha(c)(m')$ es independiente de la elección de $(m_h)_{h\in H(M')}$ siempre que se cumpla que $((m_h)_{h\in H(M')})\eta_{M'} = m'$ basta probar que si $(m_h)_{h\in H(M')} \in \mathrm{Ker}(\eta_{M'})$ entonces

$$\sum_{h\in H(M')} (c(m_h))F(h) = 0.$$

Cómo $\mathrm{Ker}(\eta_{M'})$ es unitario, tal y como vimos en la demostración de la Proposición 5.4 sabemos que existe un homomorfismo $g : M \to M^{(H(M'))}$ tal que

$$(m_h)_{h\in H(M')} \in \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(\eta_{M'}).$$

Tomemos un $\overline{m} \in M$ tal que $(\overline{m})g = (m_h)_{h\in H(M')}$. Es decir, $m_h = (\overline{m})g * p_h$, pero $g * p_h \in E$ por lo tanto

$$c(m_h) = c((\overline{m})g * p_h) = (c(\overline{m}))F(g * p_h) \quad \forall h \in H(M').$$

Entonces, usando el hecho de que $h = q_h * \eta_{M'}$ tenemos que

$$\sum_{h\in H(M')} (c(m_h))F(h) = \sum_{h\in H(M')} (c(\overline{m}))F(g * p_h * h) =$$

$$\sum_{h\in H(M')} (c(\overline{m}))F(g*p_h*q_h*\eta_{M'}) = (\sum_{h\in H(M')} (c(\overline{m})F(g))F(p_h*q_h))F(\eta_{M'}) =$$

$$(c(\overline{m}))F(g) * F(\eta_{M'}) = (c(\overline{m}))F(\underbrace{g * \eta_{M'}}_{=0}) = 0$$

tal y como queríamos probar.

Vamos ahora a ver que $\alpha(c)$ con la definición anterior está en $\mathbb{C}'(F)$. Para ello consideremos $m' \in M'$ y $e' \in \mathrm{End}_R(M')$. Tomemos

$(m_h)_{h\in H(M')}$ tal que $\sum_{h\in H(M')}(m_h)h = m'$, entonces usando la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} M^{(H(M'))} & \xrightarrow{\eta_{M'}} & M' \\ {\scriptstyle M^{(H(e'))}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle e'} \\ M^{(H(M'))} & \xrightarrow{\eta_{M'}} & M' \end{array}$$

que se ve en la Proposición 5.4, deducimos que

$$\alpha(c)(m'e') = \sum_{\overline{h}\in H(M')} c\left(\sum_{\{h\in H(M'):h*e'=\overline{h}\}} m_h\right) F(\overline{h}) =$$

$$\sum_{\overline{h}\in H(M')}\ \sum_{\{h\in H(M'):h*e'=\overline{h}\}} (c(m_h))F(h*e') =$$

$$\left(\sum_{h\in H(M')}(c(m_h))F(h)\right) F(e') = (\alpha(c)(m'))F(e').$$

Para probar que α es un homomorfismo de bimódulos, tomemos un $c \in \mathbb{C}\,(F)$, $a' \in A'$, $r \in R$, $(m_h)_{h\in H(M')} \in M^{(H(M'))}$ y $m' = \sum_{h\in H(M')}(m_h)h$.

$$(\alpha(cr))(m') = \sum_h((cr)(m_h))F(h) =$$

$$\sum_h(c(rm_h))F(h) = (\alpha(c)(rm')$$

ya que $\sum_h(rm_h)h = \sum_h r(m_h)h = rm'$. Por otro lado

$$\alpha(a'c)(m') = \sum_h((a'c)(m_h))F(h) = \sum_h(a'(c(m_h)))F(h) =$$

$$a'(\sum_h(c(m_h))F(h)) = a'(\alpha(c)(m')) = (a'\alpha(c))(m').$$

Para probar que α es un isomorfismo, la forma mas fácil es construir su inverso. Consideremos $H'(M) = \mathrm{Hom}_R(M', M)$ y el epimorfismo canónico

$$\eta'_M : M'^{(H'(M))} \to M.$$

A partir de él construiremos $\beta : \mathbb{C}'\,(F) \to \mathbb{C}\,(F)$ simétricamente a la construcción de α. Vamos a ver que β es el inverso de α. Sea $c' \in \mathbb{C}'\,(F)$, $m' \in M'$, $(m_h)_{h\in H(M)}$ tal que $m' = \sum_h(m_h)h$. Para cada $m_h \neq 0$ tomemos $(m'_{hh'})_{h'\in H'(M)}$ tal que $\sum_{h'}(m'_{hh'})h' = m_h$ para todo h. Si $m_h = 0$ definiremos $m'_{hh'} = 0$ para todo h'. Entonces

$$((\alpha\circ\beta)(c'))(m') = \sum_h(\beta(c')(m_h))F(h) =$$

$$\sum_{h,h'} c'(m'_{hh'})F(h') * F(h) = \sum_{h,h'} c'(m'_{hh'})F(\underbrace{h' * h}_{\in E'}) =$$

$$c'(\sum_{h,h'}(m'_{hh'})h * h') = c'(m').$$

Simétricamente se prueba que $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{C}(F)}$.

Notemos que hemos probado que para todo $c \in \mathbb{C}(F)$, $m' \in M'$, $m \in M$ $f : M \to M'$ con $(m)f = m'$, se tiene que $\alpha(c)(m') = (c(m))F(f)$ ya $m' = (m)f = ((m)q_f)\eta_{M'}$. Utilizando ésto podemos probar que $(\alpha \otimes N) * \varsigma'_N = \varsigma_N$ del siguiente modo:

Sea $c \in \mathbb{C}(F)$, $n \in N$ y $g : M \to N$ tal que $n \in \mathrm{Im}(g)$. Sea $m \in M$ tal que $(m)g = n$. Utilizando el Corolario 6.25 sabemos que $(c \otimes n)\varsigma_N = (c(m))F(g)$. Por otro lado consideremos $f : M' \to M$ tal que $(m')f = m$ para algún $m' \in M'$, entonces

$$(\alpha(c) \otimes n)\varsigma'_N = (\alpha(c)(m'))F(f * g) =$$

$$(c((m')f))F(g) = (c(m))F(g) = (c \otimes n)\varsigma_N.$$

Como ésto es cierto para todo $c \in \mathbb{C}(F)$ y todo $n \in N$ deducimos que $(\alpha \otimes N) * \varsigma'_N = \varsigma_N$. □

Hasta ahora habíamos definido $\mathbb{C}$ para un funtor fijo $F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$. Vamos a ver ahora cómo se puede definir para transformaciones naturales de forma que podamos conseguir un funtor

$$\mathbb{C} : \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod}) \to A'\text{-}\mathsf{MOD}\text{-}R.$$

Definición 6.28. Sean $F, F' \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{Mod})$ y sea $\alpha : F \to F'$ una transformación natural. Definiremos

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{C}(\alpha): & \mathbb{C}(F) & \to & \mathbb{C}(F') \\ & c & \mapsto & \alpha_M \circ c \end{array}$$

Ejercicio 6.6. Sean $F, F' \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$ y sea $\alpha : F \to F'$ una transformación natural. Demostrar que con el valor de $\mathbb{C}(\alpha)$ dado en la Definición 6.28, $\mathbb{C}(\alpha)$ está bien definido y es un homomorfismo de bimódulos.

Solución:
Por la naturalidad de α sabemos que para todo $e \in \mathrm{End}({}_RM)$, $F(e) * \alpha_M = \alpha_M * F'(e)$, por lo tanto α_M es también un E-homomorfismo. Esto prueba que si $c \in \mathrm{Hom}_E(M, F(M))$ entonces $\alpha_M \circ c \in \mathrm{Hom}_E(M, F'(M))$.

Para ver que es un homomorfismo de bimódulos consideremos elementos $a' \in A'$, $c \in \mathbb{C}(F)$, $r \in R$ y $m \in M$

$$(\mathbb{C}(\alpha)(cr))(m) = \alpha_M(cr(m)) = \alpha_M(c(rm)) =$$

$$\mathbb{C}(\alpha)(c)(rm) = ((\mathbb{C}(\alpha)(c))r)(m).$$

$$(\mathbb{C}(\alpha)(ac))(m) = \alpha_M(ac(m)) = a\alpha_M(c(m)) = (a(\mathbb{C}(\alpha)(c)))(m).$$

Las comprobaciones relativas a la linealidad son consecuencia de la aditividad de los funtores. □

Ejercicio 6.7. Sean $F, G, H \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$ y sean $\alpha : F \to G$ y $\beta : G \to H$ transformaciones naturales. Entonces $\mathbb{C}(\alpha * \beta) = \mathbb{C}(\alpha) * \mathbb{C}(\beta)$. Además $\mathbb{C}(\mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}(F)}$.

En otras palabras,

$$\mathbb{C} : \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod}) \to A'\text{-}\mathsf{MOD}\text{-}R$$

es un funtor.

Concluir a partir de ésto que si $\alpha : F \to G$ es una equivalencia de funtores, entonces $\mathbb{C}(\alpha)$ es un isomorfismo.

Solución:
Sea $c \in \mathbb{C}(F)$ entonces

$$\mathbb{C}(\alpha * \beta)(c) = (\alpha * \beta)_M \circ c = \beta_M \circ \alpha_M \circ c =$$

$$\beta_M \circ (\mathbb{C}(\alpha)(c)) = (\mathbb{C}(\beta) \circ \mathbb{C}(\alpha))(c) = (\mathbb{C}(\alpha) * \mathbb{C}(\beta))(c).$$

Si aplicamos $\mathbb{C}$ a la transformación natural identidad $\mathrm{id}_F : F \to F$ nos da la identidad ya que $\mathbb{C}(\mathrm{id}_F)(c) = \mathrm{id}_{F(M)} \circ c = c$ para todo $c \in \mathbb{C}(F)$. □

Proposición 6.29. *Sean $F, F' \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$ y sea $\alpha : F \to F'$ una transformación natural.*

Entonces para todo ${}_RN$ en R-DMod, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(F) \otimes_R N & \xrightarrow{\mathbb{C}(\alpha)\otimes N} & \mathbb{C}(F') \otimes_R N \\ {\scriptstyle \varsigma_N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varsigma'_N} \\ F(N) & \xrightarrow[\alpha_N]{} & F'(N) \end{array}$$

donde $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ y $\varsigma'_N : \mathbb{C}(F') \otimes_R - \to F'$ son las transformaciones naturales asociadas.

Demostración:
Empecemos comprobando la conmutatividad del diagrama para el generador M. Sea $c \in \mathbb{C}(F)$, $m \in M$, entonces

$$(c \otimes m)(\mathbb{C}(\alpha) \otimes N) * \varsigma'_M = (\alpha_M \circ c)(m) = \alpha_M(c(m)) =$$

$$\alpha_M \circ \varsigma_M(c \otimes m)) = (c \otimes m)\varsigma_M * \alpha_M.$$

En el caso general, tomemos $c \in \mathbb{C}(F)$, $n \in N$, $g : M \to N$ tal que $n \in \mathrm{Im}(g)$ y $m \in M$ tal que $(m)g = n$. Utilizando el Corolario 6.25 tenemos que

$$(c \otimes n)(\varsigma_N * \alpha_N) = (c(m))F(g) * \alpha_N = \text{Por la naturalidad de } \alpha$$

$$(c(m))\alpha_M * G(g) = ((\alpha_M \circ c)(m))G(g) = (\alpha_M \circ c \otimes n)\varsigma'_N =$$

$$(c \otimes n)(\mathbb{C}(\alpha) \otimes N) * \varsigma'_N$$

□

Proposición 6.30. *Sean $F, F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$, $\alpha : F \to F'$ una equivalencia de funtores. Entonces si F es tal que $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ es una equivalencia*[1]*, G cumple la misma propiedad.*

Demostración:
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}(F) \otimes_R M \arrow[r, "\mathbb{C}(\alpha)\otimes M"] \arrow[d, "\varsigma_M"'] & \mathbb{C}(F') \otimes_R M \arrow[d, "\varsigma'_M"] \\
F(M) \arrow[r, "\alpha_M"'] & F'(M)
\end{tikzcd}$$

Como ς_M, α_M y $\mathbb{C}(\alpha) \otimes M$ son isomorfismos, entonces ς'_M es un isomorfismo. □

5. Funtores Extensibles y Funtores Producto Tensorial

En esta sección R será un anillo, X un conjunto, $\pi : X \to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R, A' un anillo con identidad y $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$ un funtor que conserva límites directos.

Denotaremos por $G = \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$.

Definición 6.31. Sea $\alpha = (\alpha_\sigma)_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \in \varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ y $w \in \Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})$ representado por $(\theta, \overline{w})$. Entonces definiremos

$$\alpha \circ w = ((\alpha_{\theta\sigma})F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \in \varprojlim_{\tau \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle).$$

Ejercicio 6.8. Realizar las siguientes comprobaciones relativas a la Definición 6.31:

1. La definición de $\alpha \circ w$ no depende de la elección de $(\theta, \overline{w})$.
2. $\alpha \circ w \in \varprojlim_{\tau \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle)$.

Solución:

1. Supongamos que $(\theta, \overline{w})$ y $(\varphi, \overline{v})$ representan a w. Entonces dado un $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ existe un $\rho \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ que contiene a $\theta(\sigma)$ y a $\varphi(\sigma)$ y tal que $\Phi_{\rho\varphi(\sigma)} * \overline{v}_\sigma = \Phi_{\rho\theta(\sigma)} * \overline{w}_\sigma$. Por lo tanto

$$(\alpha_{\theta(\sigma)})F(\overline{w}_\sigma) = ((\alpha_\rho)F(\Phi_{\rho\theta(\sigma)}))F(\overline{w}_\sigma) =$$

$$(\alpha_\rho)F(\Phi_{\rho\varphi(\sigma)} * \overline{v}_\sigma) = ((\alpha_\rho)F(\Phi_{\rho\varphi(\sigma)}))F(\overline{v}_\sigma) =$$

$$(\alpha_{\varphi(\sigma)})F(\overline{v}_\sigma).$$

[1] En en Teorema 6.44 veremos que esta condición es equivalente a que F sea extensible

2. Sean $\sigma \subseteq \tau$ dos soportes unitarios.

$$((\alpha \circ w)_\tau)F(\Phi_{\tau\sigma}) = (\alpha_{\theta(\tau)})F(\overline{w}_\tau * \Phi_{\tau\sigma}) =$$
$$(\alpha_{\theta(\tau)})F(\Phi_{\theta(\tau)\theta(\sigma)} * \overline{w}_\sigma) = (\alpha_{\theta(\sigma)})F(\overline{w}_\sigma).$$

$\square$

LEMA 6.32. $\varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ *tiene estructura de* $(A', \Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}}))$-*bimódulo unitario con la operación dada en la Definición 6.31.*

Demostración:
La estructura de A'-módulo unitario es la usual que se deduce del hecho de que $F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) \in A'$-$\mathsf{Mod}$.

Sean $\alpha, \beta \in \varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ y sean $w, v \in \Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})$ representados por $(\theta, \overline{w})$ y $(\varphi, \overline{v})$. Sea también $a' \in A'$.

- $$(a'\alpha) \circ w = ((a'\alpha)_{\theta\sigma} * F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$((a'\alpha_{\theta\sigma}) * F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} = a'((\alpha_{\theta\sigma}) * F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$a'(\alpha \circ w).$$

- $$(\alpha + \beta) \circ w = ((\alpha + \beta)_{\theta\sigma} F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$((\alpha_\sigma + \beta_\sigma) F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$((\alpha_\sigma) F(\overline{w}_\sigma) + (\beta_\sigma) F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$((\alpha_\sigma) F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} + ((\beta_\sigma) F(\overline{w}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$\alpha \circ w + \beta \circ w.$$

- $$\alpha \circ (w + v) =$$
$$((\alpha_{(\theta\cup\varphi)\sigma}) F(\Phi_{(\theta\cup\varphi)\sigma, \theta\sigma} * \overline{w}_\sigma + F(\Phi_{(\theta\cup\varphi)\sigma, \varphi\sigma} * \overline{v}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$((\alpha_{(\theta\cup\varphi)\sigma}) F(\Phi_{(\theta\cup\varphi)\sigma, \theta\sigma}) * F(\overline{w}_\sigma) + (\alpha_{(\theta\cup\varphi)\sigma}) F(\Phi_{(\theta\cup\varphi)\sigma, \varphi\sigma}) * F(\overline{v}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$((\alpha_{\theta\sigma}) F(\overline{w}_\sigma) + (\alpha_{\varphi\sigma}) F(\overline{v}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} = \alpha \circ w + \alpha \circ v.$$

- $$\alpha \circ (w \circ v) = ((\alpha_{\theta\varphi\sigma}) F(\overline{w}_{\varphi\sigma} * \overline{v}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)}$$
$$((\alpha_{\theta\varphi\sigma}) F(\overline{w}_{\varphi\sigma}) * F(\overline{v}_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} = (\alpha \circ w) \circ v.$$

- $$\alpha \circ 1_{\Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})} = ((\alpha_\sigma) F(\mathrm{id}_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle}))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} =$$
$$((\alpha_\sigma) \mathrm{id}_{F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)})_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} = (\alpha_\sigma)_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} = \alpha.$$

$\square$

Denotaremos $q_\sigma : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G$ y $p_\sigma : G \to \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ a las inyecciones y proyecciones canónicas en la componente σ-ésima.

Lema 6.33. *Sea $\mathbb{C}(F)$ el bimódulo construido a partir del generador G y sea $c \in \mathbb{C}(F)$ y $g \in G$. Sea $f : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G$ un homomorfismo tal que $(\langle \varnothing \rangle_\sigma)f = g$, entonces*

$$c(g) = c((\langle \varnothing \rangle_\sigma)q_\sigma)F(p_\sigma * f).$$

Demostración:
Denotemos $e_\sigma = p_\sigma * f \in \mathrm{End}(_R G)$. Entonces por definición de $\mathbb{C}(F)$ tenemos que

$$c((\langle \varnothing \rangle_\sigma)q_\sigma)F(p_\sigma * f) = c((\langle \varnothing \rangle_\sigma)q_\sigma)F(e_\sigma) =$$

$$c((\langle \varnothing \rangle_\sigma)q_\sigma * e_\sigma) = c((\langle \varnothing \rangle_\sigma)q_\sigma * p_\sigma * f) = c(g).$$

$\square$

Proposición 6.34. *Sea $\mathbb{C}(F)$ el bimódulo construido a partir del generador G y $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ la transformación natural asociada. Entonces son equivalentes*

1. *ς es una equivalencia de funtores.*
2. *ς_G es un isomorfismo.*
3. *$\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle}$ es un isomorfismo para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$.*

Demostración:
La demostración de $(2 \Rightarrow 1)$ ya la hemos visto y la de $(1 \Rightarrow 3)$ es trivial. Nos queda por ver $(3 \Rightarrow 2)$.

Como F y $\mathbb{C}(F) \otimes_R -$ conservan coproductos tenemos isomorfismos canónicos $F(G) \simeq \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ y $\mathbb{C}(F) \otimes_R G \simeq \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \mathbb{C}(F) \otimes_R \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$. Con estas identificaciones vamos a ver que

$$\varsigma_G = \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle}.$$

Sea $c \in C$ y $g \in G$. El elemento $c \otimes g$ se identifica con

$$(c \otimes (g)p_\sigma)_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \in \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \mathbb{C}(F) \otimes \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$$

Si aplicamos $\coprod \varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle}$ obtenemos

$$((c \otimes (g)p_\sigma)\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle})_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \in \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle).$$

Utilizando el Corolario 6.25 deducimos que $(c \otimes (g)p_\sigma)\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle} = (c(g))F(p_\sigma)$, por lo tanto

$$((c \otimes (g)p_\sigma)\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle})_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \in \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) =$$

$$((c(g))F(p_\sigma))_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)}$$

pero éste es precisamente el elemento que identificamos con $c(g) = (c \otimes g)\varsigma_G$ en la identificación $F(G) \simeq \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$. $\square$

PROPOSICIÓN 6.35. *Sea $\zeta \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ y $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Denotemos*

$$\mathbb{A}_{\zeta}(\sigma) = \{h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G : \forall \overline{x} \in \sigma \cap \partial\zeta, (\langle \underline{x} \rangle_{\sigma})h = 0\}.$$

Si el soporte es del tipo $\cup_{k=0}^{n-1} X^k \cap \sigma$ utilizaremos la notación abreviada

$$\mathbb{A}_n(\sigma) = \mathbb{A}_{\cup_{k=0}^{n-1} X^k \cap \sigma}(\sigma) = \{h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G : \forall \overline{x} \in \sigma \cap X^n, (\langle \underline{x} \rangle_{\sigma})h = 0\}.$$

Entonces

1. *Si $\zeta \subseteq \xi$ son dos soportes de torsión, $\mathbb{A}_{\xi}(\sigma) \subseteq \mathbb{A}_{\zeta}(\sigma)$.*
2. *Para todo $\alpha \in \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\alpha)h = 0$ para todo $h \in \mathbb{A}_n(\sigma)$.*
3. *Para todo $\beta \in F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\beta)F(h) = 0$ para todo $h \in \mathbb{A}_n(\sigma)$.*
4. *Para todo $\beta \in F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ existe un soporte de torsión $\theta_{\beta}(\sigma) \subseteq \sigma$ tal que para todo $h \in \mathbb{A}_{\theta(\sigma)}$, $(\beta)F(h) = 0$ y además $\theta_{\beta}(\sigma)$ está contenido en cualquier soporte de torsión $\xi \subseteq \sigma$ que cumpla que $\forall h \in \mathbb{A}_{\xi}(\sigma)$, $(\beta)F(h) = 0$.*

Demostración:

(1). Sea $h \in \mathbb{A}_{\xi}(\sigma)$. Tenemos que probar que $h \in \mathbb{A}_{\zeta}(\sigma)$, o lo que es lo mismo, que para todo $\overline{x} \in \partial\zeta \cap \sigma$, $(\langle \underline{x} \rangle_{\sigma})h = 0$.

Utilizando el soporte de torsión ξ sabemos que

$$\langle \underline{x} \rangle_{\sigma} = \sum_{\overline{y} \in \partial\xi \cap \sigma} (\langle \underline{x} \rangle_{\sigma}) \Phi_{\sigma, (\underline{y})\sigma} * \Gamma_{(\underline{y})\sigma, \sigma}$$

y por lo tanto

$$(\langle \underline{x} \rangle_{\sigma})h = \sum_{\overline{y} \in \partial\xi \cap \sigma} (\langle \underline{x} \rangle_{\sigma}) \Phi_{\sigma, (\underline{y})\sigma} * \Gamma_{(\underline{y})\sigma, \sigma} * h.$$

Vamos a probar que este elemento es 0 viendo que son 0 todos y cada uno de estos sumandos.

Para empezar, si $\overline{x} \notin (\underline{y})\sigma$, entonces $(\langle \underline{x} \rangle_{\sigma})\Phi_{\sigma, (\underline{y})\sigma} = 0$, por lo tanto podemos eliminar todos los sumandos que no cumplan que $\overline{x} \in (\underline{y})\sigma$. Como $\overline{x} \in \partial\zeta$, $\zeta \subseteq \xi$ y $\overline{y} \in \partial\xi$, la única posibilidad para que $\overline{x} \in (\underline{y})\sigma$ es que $\overline{x} \leq \overline{y}$. Podemos pues suponer que existe $\overline{z}$ tal que $\overline{xz} = \overline{y}$. Por lo tanto

$$(\langle \underline{x} \rangle_{\sigma}) \Phi_{\sigma, (\underline{zx})\sigma} * \Gamma_{(\underline{zx})\sigma, \sigma} * h = (\langle \underline{x} \rangle_{(\underline{zx})\sigma}) \Gamma_{(\underline{zx})\sigma, \sigma} * h =$$

$$(\pi(\overline{z}) \langle \underline{zx} \rangle_{(\underline{zx})\sigma}) \Gamma_{(\underline{zx})\sigma, \sigma} * h = \pi(\overline{z})(\langle \underline{zx} \rangle_{\sigma})h = \pi(\overline{z})0 = 0$$

ya que $\overline{xz} \in \partial\xi$ y $h \in \mathbb{A}_{\xi}(\sigma)$.

(2). Para este α podremos encontrar utilizando el Lema 4.4 un $n \in \mathbb{N}$ y unos elementos $r(\overline{x}) \in R$ con $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$ tales que

$$\alpha = \sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} r(\overline{x}) \langle \underline{x} \rangle_{\sigma}.$$

Sea $h \in \mathbb{A}_n(\sigma)$, entonces

$$(\alpha)h = \sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} r(\overline{x})(\langle \underline{x} \rangle_\sigma)h = 0.$$

(3). Consideremos $\beta \in F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $h_n \in \mathbb{A}_n(\sigma)$ con $(\beta)F(h_n) \neq 0$. Consideremos

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle & \to & G^{\mathbb{N}} \\ & \alpha & \mapsto & ((\alpha)h_n)_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

Utilizando el apartado anterior, sabemos que $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq G^{(\mathbb{N})}$ por lo que podemos considerar φ como un morfismo del tipo

$$\varphi : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G^{(\mathbb{N})}$$

que es un morfismo en R-DMod. Si aplicamos el funtor F, teniendo en cuenta que conserva límites directos obtenemos

$$\begin{array}{rccc} F(\varphi) : & F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) & \to & F(G^{(\mathbb{N})}) \simeq F(G)^{(\mathbb{N})} \\ & \beta & \mapsto & ((\beta)F(h_n))_{n \in \mathbb{N}}. \end{array}$$

Pero entonces llegamos a una contradicción porque $(\beta)F(h_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4). Consideremos la familia

$$I(\beta, \sigma) = \{\xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X) : \xi \subseteq \sigma, \forall h \in \mathbb{A}_\xi(\sigma), (\beta)F(h) = 0\}.$$

Por el apartado anterior sabemos que el soporte $\sigma \cap \cup_{k=0}^{n-1} X^k \in I(\beta, \sigma)$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$.

Sean $\xi_1, \cdots, \xi_t \in I(\beta, \sigma)$. Vamos a ver que entonces $\zeta = \cap_{i=1}^t \xi_i \in I(\beta, \sigma)$.

Sea $h \in \mathbb{A}_\zeta(\sigma)$, entonces

$$(\beta)F(h) = \sum_{\overline{x} \in \partial\zeta \cap \sigma} (\beta)F(\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * h)$$

Vamos a ver que $(\beta)F(h) = 0$ viendo que cada uno de estos sumandos es 0. Ésto lo haremos probando que para todo $\overline{x} \in \partial\zeta \cap \sigma$, existe un $j \in \{1, \cdots, t\}$ tal que $\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * h \in \mathbb{A}_{\xi_j}(\sigma)$.

Sea $\overline{x} \in \partial\zeta \cap \sigma$, entonces $x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{x})-1}$ está en $\zeta = \cap \xi_i$ pero $\overline{x}$ no está, existirá pues un $j \in \{1, \cdots, t\}$ tal que $\overline{x} \in \partial\xi_j$.

Sea $\overline{y} \in \sigma \cap \partial\xi_j$. Si $\overline{y} \notin (\underline{x})\sigma$ entonces $\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} = 0$, por lo tanto

$$(\langle \underline{y} \rangle_\sigma)\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * h = 0.$$

Si por el contrario, $\overline{y} \in (\underline{x})\sigma$, entonces como $\overline{x} \in \partial\xi_j$ e $\overline{y} \notin \xi_j$, existirá un $\overline{z}$ tal que $\overline{y} = \overline{xz}$, pero como $\overline{y}, \overline{x} \in \partial\xi_j$, esto implica que $\overline{y} = \overline{x}$. Por lo tanto

$$(\langle \underline{y} \rangle_\sigma)\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * h = (\langle \underline{y} \rangle_\sigma)h = 0$$

ya que $\overline{y} = \overline{x} \in \partial\zeta$.

En cualquiera de los dos casos tenemos que

$$(\langle \underline{y} \rangle_\sigma)\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * h = 0$$

para todo $\overline{y} \in \sigma \cap \partial\xi_j$, por lo tanto $\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * h \in \mathbb{A}_{\xi_j}(\sigma)$ con lo que deducimos que

$$(\beta)F(\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma} * \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * h) = 0 \quad \forall \overline{x} \in \partial\zeta \cap \sigma.$$

Una vez probado que toda intersección finita de soportes de $I(\beta,\sigma)$ está en $I(\beta,\sigma)$, definamos

$$\theta_\beta(\sigma) = \cap_{\xi \in I(\beta,\sigma)} \xi.$$

Como $\sigma \cap \cup_{k=0}^{n-1} X^k \in I(\beta,\sigma)$ deducimos que

$$\theta_\beta(\sigma) = \bigcap_{\xi \in I(\beta,\sigma)} \xi = \bigcap_{\substack{\xi \in I(\beta,\sigma)\\ \xi \subseteq \cup_{k=0}^{n-1} X^k}} \xi$$

pero como $\cup_{k=0}^{n-1} X^k \cap \sigma$ es un conjunto finito, podemos encontrar $\xi_1, \cdots, \xi_k \in I(\beta,\sigma)$ tales que

$$\theta_\beta(\sigma) = \xi_1 \cap \cdots \cap \xi_k \in I(\beta,\sigma).$$

$\square$

Definición 6.36. Sea $\mathbb{C}(F)$ el bimódulo construido a partir de G y sea $c \in \mathbb{C}(F)$. Entonces para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ denotaremos $c_\sigma = (c((\langle\varnothing\rangle_\sigma)q_\sigma))F(p_\sigma) \in F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle)$.

Proposición 6.37. *Sea $\mathbb{C}(F)$ el bimódulo construido a partir de G. Entonces*

1. *Para todo $c \in \mathbb{C}(F)$, $\epsilon(c) := (c_\sigma)_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \in \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle)$.*
2. *La aplicación $\epsilon : \mathbb{C}(F) \to \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle)$ es un monomorfismo de A'-módulos.*
3. *Para todo $c \in \mathbb{C}(F)$ y todo $w \in \Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})$, si w viene representado por $(\theta,\overline{w})$ y se cumple que existe un $r \in R$ tal que $(\langle\varnothing\rangle_{\theta\sigma})\overline{w}_\sigma = r\langle\varnothing\rangle_\sigma$ para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, entonces $\epsilon(c)\circ w = \epsilon(cr)$.*
4. *Para todo $c \in \mathbb{C}(F)$ y todo $\overline{x} \in \Sigma(X)$, $\epsilon(c)\circ\pi^\nabla(\overline{x}) = \epsilon(c\pi(\overline{x}))$.*
5. *Para todo $\alpha \in \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle)$ se cumple que $\alpha \in \mathrm{Im}(\epsilon)$ si y solo si para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y todo $h : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to G$ tal que $(\langle\varnothing\rangle_\sigma)h = 0$ entonces $(\alpha_\sigma)F(h) = 0$.*
6. *Para todo $\alpha \in \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle)$ el conjunto*

$$\xi = \{\overline{x} \in \Sigma(X) : \alpha\circ\pi^\nabla(\overline{x}) \notin \mathrm{Im}(\epsilon)\}$$

es un soporte de torsión.

Demostración:
(1). Sea $\sigma \subseteq \tau$ dos soportes unitarios. Si $\sigma = \varnothing$ entonces $\Phi_{\tau\sigma} = 0$ y $(c_\tau)F(\Phi_{\tau\sigma}) = 0 = c_\sigma$. Si $\sigma \neq \varnothing$, entonces

$$(c_\tau)F(\Phi_{\tau\sigma}) = (c(\langle\varnothing\rangle_\tau q_\tau))F(p_\tau * \Phi_{\tau\sigma}) =$$
$$(c(\langle\varnothing\rangle_\tau q_\tau)F(p_\tau * \Phi_{\tau\sigma} * \underbrace{q_\sigma * p_\sigma}_{=\mathrm{id}_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}}) =$$
$$(c(\langle\varnothing\rangle_\tau q_\tau)F(\underbrace{p_\tau * \Phi_{\tau\sigma} * q_\sigma}_{\in E}) * F(p_\sigma) =$$
$$(c(\langle\varnothing\rangle_\tau q_\tau * p_\tau * \Phi_{\tau\sigma} * q_\sigma))F(p_\sigma) =$$
$$(c(\langle\varnothing\rangle_\tau \Phi_{\tau\sigma} * q_\sigma))F(p_\sigma) = (c(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma) = c_\sigma.$$

(2). Sean $c, d \in \mathbb{C}(F)$, $a', b' \in A'$, y $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, entonces

$$(a'c + b'd)_\sigma = ((a'c + b'd)(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma) =$$
$$(a'c(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma) + b'd(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma) =$$
$$a'(c(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma) + b'(d(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma) = a'c_\sigma + b'c_\sigma$$

por lo tanto $\epsilon(a'c + b'd) = a'\epsilon(c) + b'\epsilon(d)$.

Sea $c \in \mathbb{C}(F)$ tal que $\epsilon(c) = 0$ y sea $g \in G$, Sea $h : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to G$ tal que $(\langle\varnothing\rangle_\sigma)h = g$ para algún $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Entonces usando el Lema 6.33 deducimos que

$$c(g) = (c(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma * h)$$
$$= (c_\sigma)F(h) = (0)F(h) = 0.$$

(3). Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$,

$$(\epsilon(c) \circ w)_\sigma = (c_{\theta\sigma})F(\overline{w}_\sigma) = (c(\langle\varnothing\rangle_{\theta\sigma} q_{\theta\sigma}))F(p_{\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma) =$$
$$(c(\langle\varnothing\rangle_{\theta\sigma} q_{\theta\sigma}))F(p_{\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma * \underbrace{q_\sigma * p_\sigma}_{=\mathrm{id}_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}}) =$$
$$(c(\langle\varnothing\rangle_{\theta\sigma} q_{\theta\sigma}))F(\underbrace{p_{\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma * q_\sigma}_{\in E}) * F(p_\sigma) =$$
$$(c(\langle\varnothing\rangle_{\theta\sigma} q_{\theta\sigma} * p_{\theta\sigma} * \overline{w}_\sigma * q_\sigma))F(p_\sigma) = (c(\langle\varnothing\rangle_{\theta\sigma} \overline{w}_\sigma * q_\sigma))F(p_\sigma) =$$
$$(c(r\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma) = ((cr)(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma) = (cr)_\sigma.$$

Por lo tanto $\epsilon(c) \circ w = \epsilon(cr)$.

(4). Lo único que tenemos que comprobar es que $\pi^\nabla(\overline{x})$ está en las condiciones del apartado anterior, para ello sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$,

$$(\langle\varnothing\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma = (\pi(\overline{x})\langle\underline{x}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma =$$
$$\pi(\overline{x})(\langle\underline{x}\rangle_\sigma)\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma = \pi(\overline{x})\langle\varnothing\rangle_\sigma.$$

(5). $(\Rightarrow)$. Sea $h : \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to G$ tal que $(\langle\varnothing\rangle_\sigma)h = 0$ y sea $c \in \mathbb{C}(F)$. Entonces

$$(c_\sigma)F(h) = (c(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma * h) =$$
$$c(\langle\varnothing\rangle_\sigma q_\sigma * p_\sigma * h) = c(\langle\varnothing\rangle_\sigma h) = c(0) = 0.$$

($\Leftarrow$). Sea $\alpha \in \varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ tal que para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y todo $h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G$ tal que $(\langle \varnothing \rangle_\sigma)h = 0$ se cumple que $(\alpha_\sigma)F(h) = 0$.

Para definir un $c \in \mathbb{C}(F)$ tal que $\epsilon(c) = \alpha$, tenemos que definir $c(g)$ para todo $g \in G$. Supongamos que tenemos $h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G$ tal que $(\langle \varnothing \rangle_\sigma)h = g$, entonces $c(g)$ tendría que venir definido como $(c_\sigma)F(h)$. Como queremos que c_σ sea igual a α_σ, la única posibilidad que nos queda es que definamos

$$c(g) = (\alpha_\sigma)F(h).$$

El único problema con esta definición, es probar que realmente es independiente de la elección de h. Para ello supongamos que tenemos dos posibles homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} h_i & \langle\!\langle \sigma_i \rangle\!\rangle & \to & G \\ & \langle \varnothing \rangle_{\sigma_i} & \mapsto & g \end{array}$$

para $i = 1, 2$. Consideremos $\tau = \sigma_i \cup \sigma_2$. El homomorfismo $\Phi_{\tau\sigma_1} * h_1 - \Phi_{\tau\sigma_2} * h_2$ lleva el elemento $\langle \varnothing \rangle_\tau$ a 0, por que utilizando la hipótesis deducimos que

$$0 = (\alpha_\tau)F(\Phi_{\tau\sigma_1} * h_1 - \Phi_{\tau\sigma_2} * h_2) =$$
$$(\alpha_\tau)F(\Phi_{\tau\sigma_1} * h_1) - (\alpha_\tau)F(\Phi_{\tau\sigma_2} * h_2) = (\alpha_{\sigma_1})F(h_1) - (\alpha_{\sigma_2})F(h_2)$$

lo que prueba la independencia de esta elección de h.

Vamos a probar que con esta definición $c \in \mathbb{C}(F)$. Para ello supongamos que $e \in E$, $g \in G$. Si tenemos un $h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G$ tal que $(\langle \varnothing \rangle_\sigma)h = g$, entonces $(\langle \varnothing \rangle_\sigma)h * e = (g)e$, por lo tanto

$$c((g)e) = (\alpha_\sigma)F(h * e) = ((\alpha_\sigma)F(h))F(e) = (c(g))F(e).$$

La linealidad se prueba de una forma similar.

Para ver que $\alpha_\sigma = c_\sigma$, tenemos que

$$c_\sigma = (c(\langle \varnothing \rangle_\sigma q_\sigma))F(p_\sigma) = (\alpha_\sigma)F(q_\sigma * p_\sigma) = \alpha_\sigma.$$

(6). Empecemos viendo que es un soporte y posteriormente veremos que es un soporte de torsión. Sea $\overline{x} \in \xi$ y sea $\overline{y} \leq \overline{x}$ tal que $\overline{y} \notin \xi$. Como $\overline{y} \leq \overline{x}$ tomemos $\overline{z}$ tal que $\overline{yz} = \overline{x}$.

Como $\alpha \circ \pi^\nabla(\overline{y}) \in \operatorname{Im}(\epsilon)$, podemos tomar $c \in \mathbb{C}(F)$ tal que $\alpha \circ \pi^\nabla(\overline{y}) = \epsilon(c)$, pero entonces

$$\alpha \circ \pi^\nabla(\overline{x}) = \alpha \circ \pi^\nabla(\overline{y}) \circ \pi^\nabla(\overline{z}) =$$
$$\epsilon(c) \circ \pi^\nabla(\overline{z}) = \epsilon(c\pi(\overline{z})) \in \operatorname{Im}(\epsilon).$$

Para ver que es un soporte de torsión, lo que vamos a hacer es comprobar que está contenido en un soporte de torsión. Para ello consideremos la aplicación $\theta_\beta : \Xi_{\mathbf{U}}(X) \to \Xi_{\mathbf{T}}(X)$ dada por $\theta_\beta(\sigma) = \theta_{\beta_\sigma}(\sigma)$ tal y como se define en la Proposición 6.35. Utilizando las notaciones que teníamos en la demostración de dicha proposición, tenemos que $\theta_\beta(\sigma) \subseteq \sigma$ para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y que $\theta_\beta(\sigma) \in I(\beta_\sigma, \sigma)$. Vamos a comprobar también que para todo $\sigma \subseteq \tau$ se tiene que $\theta_\beta(\sigma) \subseteq \theta_\beta(\tau)$.

Para ver esta inclusión basta ver que $\theta_\beta(\tau) \cap \sigma \in I(\beta_\sigma, \sigma)$. Sea $h \in \mathbb{A}_{\theta_\beta(\tau)\cap\sigma}(\sigma)$. Consideremos el homomorfismo $\Phi_{\tau\sigma} * h : \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \to G$. Para todo $\overline{x} \in \tau \cap \partial\theta_\beta(\tau)$ tenemos que

$$(\langle \underline{x} \rangle_\tau)\Phi_{\tau\sigma} * h = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{si } \overline{x} \notin \sigma \\ (\langle \underline{x} \rangle_\sigma)h & \text{si } \overline{x} \in \sigma \end{matrix} \right\} = 0.$$

Por lo tanto $\Phi_{\tau\sigma} * h \in \mathbb{A}_{\theta_\beta(\tau)}(\tau)$ con lo que tenemos que $0 = (\beta_\tau)F(\Phi_{\tau\sigma} * h) = (\beta_\sigma)F(h)$.

Aplicando el Lema 2.33 deducimos que existe un soporte de torsión ζ tal que para todo $\overline{x} \in \Sigma(X) \setminus \zeta$, se tiene que $\theta_\beta(\nabla_{\overline{x}}\sigma) \subset (\!(\overline{x})\!)$.

Sea $\overline{x} \in \xi \setminus \zeta$, entonces por definición $\alpha \circ \pi^\nabla(\overline{x}) \notin \mathrm{Im}(\epsilon)$, es decir, que existe un $h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G$ tal que $(\langle \varnothing \rangle_\sigma)h = 0$ y $((\alpha \circ \pi^\nabla(\overline{x}))_\sigma)F(h) \neq 0$.

Como $(\alpha \circ \pi^\nabla(\overline{x}))_\sigma = (\alpha_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})F(\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma)$ entonces $(\alpha_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})F(\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma * h) \neq 0$, pero $\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma * h \in \mathbb{A}_{\theta_\beta(\nabla_{\overline{x}}\sigma)}(\nabla_{\overline{x}}\sigma)$ lo cual es una contradicción.

La razón por la que $\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma * h \in \mathbb{A}_{\theta_\beta(\nabla_{\overline{x}}\sigma)}(\nabla_{\overline{x}}\sigma)$ es porque $\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma * h \in \mathbb{A}_{\lambda(\overline{x})}(\nabla_{\overline{x}}\sigma)$ ya que $X^{\lambda(\overline{x})} \cap \nabla_{\overline{x}}\sigma = \{\overline{x}\}$ y $(\langle \underline{x} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma})\pi^\nabla(\overline{x})_\sigma * h = (\langle \varnothing \rangle_\sigma)h = 0$. Por lo tanto usando el hecho de que $\theta_\beta(\nabla_{\overline{x}}\sigma) \subset (\!(\overline{x})\!) = \cup_{k=0}^{\lambda(\overline{x})} X^k \cap \nabla_{\overline{x}}\sigma$ entonces deducimos que $\mathbb{A}_{\lambda(\overline{x})}(\nabla_{\overline{x}}\sigma) \subseteq \mathbb{A}_{\theta_\beta(\nabla_{\overline{x}}\sigma)}(\nabla_{\overline{x}}\sigma)$ tal y como vimos en la Proposición 6.35.

Lo que hemos probado pues es que $\xi \setminus \zeta = \varnothing$ o lo que es lo mismo, que $\xi \subseteq \zeta$. Pero como ζ es un soporte de torsión, deducimos que ξ es un soporte de torsión. $\square$

LEMA 6.38. *Sea $\mathbb{C}(F)$ el bimódulo construido a partir de G y sea $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ la transformación natural asociada. Entonces se cumple*[2] $(4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1)$ *con*

1. *Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle}$ es un monomorfismo.*
2. *Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, todo $\overline{x} \in \sigma$ y todo $c \in \mathbb{C}(F)$, si $(c \otimes \langle \underline{x} \rangle_{(\underline{x})\sigma})\varsigma_{\langle\!\langle (\underline{x})\sigma \rangle\!\rangle} = 0$ entonces $c \otimes \langle \underline{x} \rangle_{(\underline{x})\sigma} = 0$.*
3. *Para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y todo $c \in \mathbb{C}(F)$, si $(c \otimes \langle \varnothing \rangle_\sigma)\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle} = 0$, entonces $c \otimes \langle \varnothing \rangle_\sigma = 0$.*
4. *Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ y todo $c \in \mathbb{C}(F)$ se cumple que si $c_{(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)} = 0$ entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c\pi(x_1 \cdots x_{n_0}) = 0$.*

Demostración:
$(2 \Rightarrow 1)$. Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y sea $\alpha \in \mathbb{C}(F) \otimes_R \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$. Para este elemento α podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ y elementos $c(\overline{x}) \in \mathbb{C}(F)$ de forma que

$$\alpha = \sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} c(\overline{x}) \otimes \langle \underline{x} \rangle_\sigma.$$

Supongamos que $\alpha \in \mathrm{Ker}(\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle})$. Utilizando que ς es una transformación natural, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo para

[2]De hecho son todas las condiciones equivalentes y ciertas, en la Proposición 6.42 probaremos la condición (4) de este lema para deducir la condición (1) que es la que nos interesa.

todo $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}(F) \otimes_R \langle\langle\sigma\rangle\rangle & \xrightarrow{\varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}} & F(\langle\langle\sigma\rangle\rangle) \\ {\scriptstyle \mathbb{C}(F)\otimes\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle F(\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma})} \\ \mathbb{C}(F) \otimes_R \langle\langle(\underline{x})\sigma\rangle\rangle & \xrightarrow[\varsigma_{\langle\langle(\underline{x})\sigma\rangle\rangle}]{} & F(\langle\langle(\underline{x})\sigma\rangle\rangle)\end{array}$$

Aplicando la conmutatividad de este diagrama para nuestro elemento α obtenemos que

$$0 = (\alpha)\varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle} * F(\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma}) = (\alpha)\mathbb{C}(F) \otimes \Phi_{\sigma(\underline{x})\sigma} * \varsigma_{(\underline{x})\sigma} =$$
$$(c(\overline{x}) \otimes \langle\underline{x}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\varsigma_{(\underline{x})\sigma}$$

y aplicando (2) deducimos que $c(\overline{x}) \otimes \langle\underline{x}\rangle_{(\underline{x})\sigma} = 0$ por lo tanto

$$\alpha = \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} c(\overline{x}) \otimes \langle\underline{x}\rangle_{\sigma} = 0.$$

(3 $\Rightarrow$ 2). Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $c \in \mathbb{C}(F)$ y $\overline{x} \in \sigma$ tal que $(c \otimes \langle\underline{x}\rangle_{(\underline{x})\sigma})\varsigma_{(\underline{x})\sigma} = 0$, entonces

$$0 = (c \otimes \langle\underline{x}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\sigma})\varsigma_{(\underline{x})\sigma} * F(\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma}) =$$
$$(c \otimes \langle\underline{x}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\sigma})(\mathbb{C}(F) \otimes \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma}) * \varsigma_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} = (c \otimes \langle\varnothing\rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})\varsigma_{\Delta_{\underline{x}}\sigma}.$$

Utilizando (3) deducimos que $c \otimes \langle\varnothing\rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} = 0$, por lo tanto

$$(c \otimes \langle\underline{x}\rangle_{(\underline{x})\sigma})(\mathbb{C}(F) \otimes \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma}) = 0$$

pero esto implica que $c \otimes \langle\underline{x}\rangle_{(\underline{x})\sigma} = 0$ porque $\mathbb{C}(F) \otimes \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma}$ es un isomorfismo por serlo $\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma}$ tal y como se vió en la Proposición 4.14.

(4 $\Rightarrow$ 3). Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, sea $c \in \mathbb{C}(F)$ tal que $(c \otimes \langle\varnothing\rangle_{\sigma})\varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle} = 0$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\sigma)$.

$$c_{\langle\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle\rangle} = (c \otimes \langle\varnothing\rangle_{\langle\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle\rangle})\varsigma_{\langle\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle\rangle} =$$
$$(c \otimes \langle\varnothing\rangle_{\sigma})(\mathbb{C}(F) \otimes \Phi_{\sigma,\langle\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle\rangle}) * \varsigma_{\langle\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle\rangle} =$$
$$(c \otimes \langle\varnothing\rangle_{\sigma})(\varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}) * F(\Phi_{\sigma,\langle\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle\rangle}) = (0)F(\Phi_{\sigma,\langle\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle\rangle}) = 0$$

por lo tanto, aplicando (4) deducimos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c\pi(x_1 \cdots x_{n_0}) = 0$. Definamos

$$\xi = \{\overline{x} \in \sigma : c\pi(\overline{x}) \neq 0\}.$$

Tal y como acabamos de ver, este soporte es de torsión y como está contenido en un unitario, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\xi \subseteq \cup_{k=0}^{n-1} X^k$, por lo tanto

$$c \otimes \langle\varnothing\rangle_{\sigma} = \sum_{\overline{x}\in X^n\cap\sigma} c\pi(\overline{x}) \otimes \langle\underline{x}\rangle_{\sigma} = 0.$$

$\square$

Lema 6.39. *Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\beta \in F(\langle\langle\sigma\rangle\rangle)$ y $\tau \subseteq \sigma$ tal que $(\beta)F(\Phi_{\sigma\tau}) = 0$. Entonces existe $\rho \subseteq_{\oplus} \sigma$ tal que $\tau \subseteq \rho$ y $(\beta)F(\Phi_{\sigma\rho}) = 0$.*

Demostración:
Utilizando la Proposición 4.23 sabemos que

$$\mathrm{Ker}(\Phi_{\sigma\tau}) \simeq \coprod_{\overline{x}\in\partial\tau\cap\sigma} \langle\!\langle (\underline{x})\sigma \rangle\!\rangle$$

además tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \coprod_{\overline{x}\in\partial\tau\cap\sigma} \langle\!\langle (\underline{x})\sigma \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle \to 0$$

por lo tanto, aplicando el funtor F tenemos la sucesión exacta

$$\coprod_{\overline{x}\in\partial\tau\cap\sigma} F(\langle\!\langle (\underline{x})\sigma \rangle\!\rangle) \to F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle) \to F(\langle\!\langle \tau \rangle\!\rangle) \to 0.$$

Utilizando la Proposición 6.9 y la sucesión anterior, deducimos que para todo $\beta \in \mathrm{Ker}(\Phi_{\sigma\tau})$, el conjunto

$$F_\beta = \{\overline{x} \in \partial\tau \cap \sigma : (\beta)F(\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma}) \neq 0\}$$

es finito. Construyamos

$$\xi_\beta = \cup_{\overline{x}\in F_\beta} (\!(x_1 \cdots x_{\lambda(\overline{x})-1})\!).$$

Éste es un soporte de torsión por ser una unión finita de soportes de torsión.

Aplicando directamente la definición tenemos que $F_\beta \subseteq \partial\xi_\beta \cap \sigma$. Podemos pues definir

$$\rho = \cup_{\overline{x}\in(\partial\xi_\beta\cap\sigma)\setminus F_\beta} (\underline{x})\sigma$$

que utilizando la Proposición 2.46 deducimos que $\rho \subseteq_\oplus \sigma$. Además

$$(\beta)F(\Phi_{\sigma\rho}) = \sum_{\overline{x}\in\partial\xi_\beta\cap\rho} (\beta)F(\Phi_{\sigma\rho}) * F(\Phi_{\rho,(\underline{x})\rho}) * F(\Gamma_{(\underline{x})\rho,\rho}) =$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi_\beta\cap\rho} (\beta)F(\Phi_{\sigma\rho}) * F(\Phi_{\rho,(\underline{x})\sigma}) * F(\Gamma_{(\underline{x})\rho,\rho}) = \sum_{\overline{x}\in\partial\xi_\beta\cap\rho} (\beta)F(\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma}) * F(\Gamma_{(\underline{x})\rho,\rho}) = 0$$

ya que para todo $\overline{x} \in \partial\xi_\beta \cap \rho$, $\overline{x} \notin F_\beta$. □

COROLARIO 6.40. *Sea* $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\beta \in F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\sigma)$ *tal que* $(\beta)F(\Phi_{\sigma,(\!(x_n:n\in\mathbb{N})\!)}) = 0$. *Entonces existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $(\beta)F(\Phi_{\sigma,(x_{n_0}\cdots x_1)\sigma}) = 0$.

Demostración:
Utilizando el Lema 6.39 sabemos que existe un soporte unitario $\rho \subseteq_\oplus \sigma$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Seq}(\rho)$. Además $(\beta)F(\Phi_{\sigma\rho}) = 0$. Utilizando el Lema 2.45 sabemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_{n_0} \cdots x_1)\sigma \subseteq \rho$, por lo tanto

$$(\beta)F(\Phi_{\sigma,(x_{n_0}\cdots x_1)\sigma}) = (\beta)F(\Phi_{\sigma\rho}) * F(\Phi_{\rho,(x_{n_0}\cdots x_1)\sigma}) = 0.$$

□

LEMA 6.41. *Sea* $\beta \in \varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$ *tal que para una cierta sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $\beta_{(\!(x_n : n\in\mathbb{N})\!)} = 0$. *Entonces existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\beta \circ \pi^{\nabla}(x_1 \cdots x_{n_0}) = 0$.

Demostración:
Supongamos que ésto no es cierto, es decir, que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\beta \circ \pi^{\nabla}(x_1 \cdots x_n) \neq 0.$$

Puesto que éste es un elemento de $\varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle)$, si no es 0 es porque existe un soporte unitario $H(n)$, que podemos suponer no vacío, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\beta \circ \pi^{\nabla}(x_1 \cdots x_n))_{H(n)} \neq 0.$$

Por lo tanto

$$(\beta_{\nabla_{x_1 \cdots x_n} H(n)}) F(\pi^{\nabla}(x_1 \cdots x_n)_{H(n)}) \neq 0.$$

Pero como $\pi^{\nabla}(x_1 \cdots x_n)_{H(n)}$ es un isomorfismo al aplicar la Proposición 4.14, deducimos que

$$\beta_{\nabla_{x_1 \cdots x_n} H(n)} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $\sigma = \cup_{n\in\mathbb{N}} \nabla_{x_1\cdots x_n} H(n)$. Éste es un soporte unitario que contiene a $(\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$ por aplicación del Corolario 2.32 y como $\beta_{(\!(x_n : n\in\mathbb{N})\!)} = 0$, utilizando el Corolario 6.40 deducimos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{(x_{n_0} \cdots x_1)\sigma} = 0$. Pero como

$$(x_{n_0} \cdots x_1)\sigma = \nabla_{x_1 \cdots x_{n_0}} \Delta_{x_{n_0} \cdots x_1} \sigma \supseteq$$
$$\nabla_{x_1 \cdots x_{n_0}} \Delta_{x_{n_0} \cdots x_1} \nabla_{x_1 \cdots x_{n_0}} H(n_0) = \nabla_{x_1 \cdots x_{n_0}} H(n_0)$$

deducimos que

$$\beta_{\nabla_{x_1 \cdots x_{n_0}} H(n_0)} = 0$$

lo cual es una contradicción con la construcción que hemos hecho. □

PROPOSICIÓN 6.42. *Sea* $\mathbb{C}(F)$ *el bimódulo construido a partir de* G *y sea* $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \longrightarrow F$ *la transformación natural asociada. Entonces* $\varsigma_{\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle}$ *es un monomorfismo para todo* $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$.

Demostración:
Vamos a probar esta Proposición viendo la condición (4) del Lema 6.38. Para ello supongamos por reducción al absurdo que existe un $c \in \mathbb{C}(F)$ tal que $c_{(\!(x_n : n\in\mathbb{N})\!)} = 0$ pero $c\pi(x_1 \cdots x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando que ϵ es un monomorfismo, esta condición es equivalente a que

$$0 \neq \epsilon(c\pi(x_1 \cdots x_n)) = \epsilon(c) \circ \pi^{\nabla}(x_1 \cdots x_n)$$

pero ésto no puede suceder para todo $n \in \mathbb{N}$ por el Lema 6.41. □

PROPOSICIÓN 6.43. *Sea* $\mathbb{C}(F)$ *el bimódulo construido a partir de* G *y sea* $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \longrightarrow F$ *la transformación natural asociada. Entonces*

1. *El homomorfismo*

$$\varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle} : \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \mathbb{C}\,(F)\otimes_R \langle\langle\sigma\rangle\rangle \to \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\langle\sigma\rangle\rangle)$$

es un isomorfismo.

2. *Para todo $\tau\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)$, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \mathbb{C}\,(F)\otimes_R \langle\langle\sigma\rangle\rangle & \xrightarrow{\varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}} & \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\langle\sigma\rangle\rangle) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{C}\,(F)\otimes_R \langle\langle\tau\rangle\rangle & \xrightarrow[\varsigma_{\langle\langle\tau\rangle\rangle}]{} & F(\langle\langle\tau\rangle\rangle)
\end{array}$$

donde los morfismos verticales son los canónicos.

Demostración:
El límite inverso de monomorfismos es un monomorfismo, por lo tanto podemos asegurar que $\varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}$ es un monomorfismo como aplicación de la Proposición 6.42.

Para ver que es un epimorfismo consideremos un $\beta\in \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\langle\sigma\rangle\rangle)$ y sea

$$\xi=\{\overline{x}\in\Sigma(X) : \beta\circ\pi^{\nabla}(\overline{x})\notin \mathrm{Im}(\epsilon)\}$$

Utilizando la Proposición 6.37 sabemos que ξ es un soporte de torsión. Para cada $\overline{x}\in\partial\xi$ vamos a tomar $c(\overline{x})\in\mathbb{C}\,(F)$ tal que $\epsilon(c(\overline{x}))=\beta\circ\pi^{\nabla}(\overline{x})$.

Vamos a probar que

$$\left(\left(\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} c(\overline{x})\otimes\langle\underline{x}\rangle_\sigma\right)_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)}\right)\varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}=\beta$$

o lo que es lo mismo, que para todo $\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)$,

$$(\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} c(\overline{x})\otimes\langle\underline{x}\rangle_\sigma)\varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}=\beta_\sigma.$$

$$(\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} c(\overline{x})\otimes\langle\underline{x}\rangle_\sigma)\varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}=$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(c(\overline{x})\otimes\langle\varnothing\rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})(\mathbb{C}\,(F)\otimes\pi^{\Delta}(\underline{x})_\sigma)*\varsigma_{\langle\langle\sigma\rangle\rangle}=$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(c(\overline{x})\otimes\langle\varnothing\rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})\varsigma_{\langle\langle\Delta_{\underline{x}}\sigma\rangle\rangle}*F(\pi^{\Delta}(\underline{x})_\sigma)=$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(c(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma})F(\pi^{\Delta}(\underline{x})_\sigma)=\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(\beta_{(\underline{x})\sigma})F(\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma}*\pi^{\Delta}(\underline{x})_\sigma)=$$

$$\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(\beta_{(\underline{x})\sigma})F(\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma})=\sum_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma}(\beta_{\sigma})F(\Phi_{\sigma,(\underline{x})\sigma})*F(\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma})=\beta_{\sigma}.$$

La segunda parte es una consecuencia inmediata de la construcción del límite inverso de homomorfismos. □

TEOREMA 6.44. *Sea* $F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$ *con* R *un anillo y* A' *un anillo con identidad. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. F *es un funtor extensible.*
2. F *es equivalente a un funtor de la forma* $P \otimes_R -$ *para algún* (A', R)*-bimódulo con* $A'P = P$.
3. *Existe un funtor* $\overline{F} \in \mathsf{LDFun}({}^{\mathbb{Z}\times}R\text{-}\mathsf{DMod}, A'\text{-}\mathsf{DMod})$ *que extiende al funtor* F*, es decir* $\overline{F} \circ \mathbf{I_D} = F$*, siendo* $\mathbf{I_D} : R\text{-}\mathsf{DMod} \to {}^{\mathbb{Z}\times}R\text{-}\mathsf{Mod}$ *la inclusión canónica.*
4. *Existe un generador* ${}_RM$ *tal que la transformación natural* $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ *construida a partir de* M *es una equivalencia de funtores.*
5. *Para todo generador* ${}_RM$*, la transformación natural* $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ *construida a partir de* M *es una equivalencia de funtores.*
6. *Existe un conjunto* X *junto con una aplicación* $\pi : X \to R$ *tal que* $\pi(X)$ *es un conjunto* T*-generador por la derecha de* R *y la construcción de* $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ *para el generador* $G = \coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ *es una equivalencia de funtores.*
7. *Existe un conjunto* X *junto con una aplicación* $\pi : X \to R$ *tal que* $\pi(X)$ *es un conjunto* T*-generador por la derecha de* R *y* $\varsigma_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}$ *es un isomorfismo para todo* $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ *siendo* ς *la construcción asociada al generador* $\coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$.
8. *Existe un conjunto* X *junto con una aplicación* $\pi : X \to R$ *tal que* $\pi(X)$ *es un conjunto* T*-generador por la derecha de* R *y* $\varsigma_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle}$ *es un epimorfismo para todo* $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ *siendo* ς *la construcción asociada al generador* $\coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$.

Demostración:

($2 \Rightarrow 1$) Se vió en el Ejemplo 6.3 para funtores producto tensorial. Para funtores que son equivalentes a ellos no hay mas que componer con los isomorfismos correspondientes.

($2 \Leftrightarrow 3$) Es el teorema de Watt's para anillos con identidad, que nos dice que entre anillos con identidad, los funtores que conservan límites directos son precisamente los funtores producto tensorial.

($4 \Rightarrow 2$) Tomar $P = \mathbb{C}(F)$.

($5 \Rightarrow 4$) Trivial.

($6 \Rightarrow 5$) Es consecuencia de la Proposición 6.27.

($7 \Rightarrow 6$) Es consecuencia de la Proposición 6.34.

($8 \Rightarrow 7$) Es consecuencia de la Proposición 6.42.

($1 \Rightarrow 8$) Se deduce de la Proposición 6.43 del siguiente modo. Utilizando la conmutatividad del diagrama que se da en dicha proposición y que los homomorfismos canónicos

$$\varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \mathbb{C}(F) \otimes_R \langle\langle \sigma \rangle\rangle \to \mathbb{C}(F) \otimes_R \langle\langle \tau \rangle\rangle$$

son siempre epimorfismos, deducimos que el morfismo

$$\varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\langle \sigma \rangle\rangle) \to F(\langle\langle \tau \rangle\rangle)$$

es un epimorfismo si y solo si $\varsigma_{\langle\langle \tau \rangle\rangle}$ es un epimorfismo.

□

6. Aplicaciones para el Funtor de Localización

LEMA 6.45. *Sea* $\alpha \in \varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} P \otimes_R \langle\langle \sigma \rangle\rangle$, $\alpha = (\alpha_\sigma)_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)}$. *Entonces*

$$\zeta_\alpha = \{\overline{x} \in \Sigma(X) : \exists \sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X) \setminus \{\varnothing\}, \alpha_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} \notin P \otimes \langle \underline{x} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}\}$$

es un soporte de torsión, donde con $P \otimes \langle \underline{x} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}$ *representamos el conjunto*

$$\{p \otimes \langle \underline{x} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} \in P \otimes_R \langle\langle \nabla_{\overline{x}}\sigma \rangle\rangle : p \in P\}.$$

Demostración:
Empecemos viendo que es un soporte y luego veremos que es de torsión. Supongamos que $\overline{x} \in \zeta_\alpha$ y que $\overline{y} \leq \overline{x}$, es decir, existe $\overline{z}$ tal que $\overline{x} = \overline{yz}$.

Si $\overline{y} \notin \zeta_\alpha$ entonces para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ se tiene que $\alpha_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} \in P \otimes \langle \underline{y} \rangle_{\nabla_{\overline{y}}\sigma}$, en particular, para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ se tiene que $\alpha_{\nabla_{\overline{y}}\nabla_{\overline{z}}\sigma} \in P \otimes \langle \underline{y} \rangle_{\nabla_{\overline{y}}\nabla_{\overline{z}}\sigma}$, es decir

$$\alpha_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} \in P \otimes \langle \underline{y} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} = P \otimes \pi(\overline{z})\langle \underline{x} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} \subseteq P \otimes \langle \underline{x} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos que ζ_α no es de torsión, es decir, que existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \operatorname{Seq}(\zeta_\alpha)$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $H(n) \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ tal que

$$\alpha_{\nabla_{x_1 \cdots x_n} H(n)} \notin P \otimes \langle x_n \cdots x_1 \rangle_{\nabla_{x_1 \cdots x_n} H(n)}.$$

Usando el Corolario 2.32 podemos deducir que $\sigma = \cup_{n \in \mathbb{N}} \nabla_{x_1 \cdots x_n} H(n)$ es un soporte unitario.

Para el elemento $\alpha_\sigma \in \langle\langle \sigma \rangle\rangle$ podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ y elementos $p(\overline{x}) \in P$ con $\overline{x} \in X^n \cap \sigma$ tales que

$$\alpha_\sigma = \sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} p(\overline{x}) \otimes \langle \underline{x} \rangle_\sigma$$

utilizando el Lema 4.8.

$$\alpha_{\nabla_{x_1 \cdots x_n} H(n)} = (\alpha_\sigma) P \otimes \Phi_{\sigma, \nabla_{x_1 \cdots x_n} H(n)} =$$

$$\sum_{\overline{y}\in X^n\cap\sigma} p(\overline{y})\otimes(\langle\underline{y}\rangle_\sigma)\Phi_{\sigma,\nabla_{x_1\cdots x_n}H(n)} =$$
$$p(x_1\cdots x_n)\otimes\langle x_n\cdots x_1\rangle_{\nabla_{x_1\cdots x_n}H(n)}\in P\otimes\langle x_n\cdots x_1\rangle_{\nabla_{x_1\cdots x_n}H(n)}$$

lo cual es una contradicción con la elección de $H(n)$. □

LEMA 6.46. *Sea* $\alpha\in\varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} P\otimes_R\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$, $\alpha=(\alpha_\sigma)_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)}$. *Entonces*

$$\xi_\alpha=\Sigma(X)\setminus\{\overline{x}\in\Sigma(X):\exists p\in P \text{ tal que } \forall\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)\setminus\{\varnothing\},\alpha_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}=p\otimes\langle\underline{x}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}\}$$

es un soporte de torsión.

Demostración:
Empecemos viendo que $\zeta_\alpha\subseteq\xi_\alpha$ siendo ζ_α el dado en el Lema 6.45. Si $\overline{x}\notin\xi_\alpha$ entonces existe un $p\in P$ tal que para todo $\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\alpha_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}=p\otimes\langle\underline{x}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}$, en particular, para todo $\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\alpha_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}\in P\otimes\langle\underline{x}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}$, por lo tanto $\overline{x}\notin\zeta_\alpha$.

Vamos ahora a ver que ξ_α es un soporte. Supongamos que $\overline{x}\in\xi_\alpha$ y que $\overline{y}\le\overline{x}$ con $\overline{y}\notin\xi_\alpha$. Tomemos $\overline{z}\in\Sigma(X)$ tal que $\overline{x}=\overline{yz}$.

Como $\overline{y}\notin\xi_\alpha$, existe un $p\in P$ tal que para todo $\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $\alpha_{\nabla_{\overline{y}}\sigma}=p\otimes\langle\underline{y}\rangle_{\nabla_{\overline{y}}\sigma}$, entonces

$$\alpha_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}=\alpha_{\nabla_{\overline{y}}\nabla_{\overline{z}}\sigma}=p\otimes\langle\underline{y}\rangle_{\nabla_{\overline{y}}\nabla_{\overline{z}}\sigma}=$$
$$p\otimes\pi(\overline{z})\langle\underline{zy}\rangle_{\nabla_{\overline{y}}\nabla_{\overline{z}}\sigma}=p\pi(\overline{z})\otimes\langle\underline{x}\rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma}$$

lo que prueba que $\overline{x}\notin\xi_\alpha$ y por tanto es una contradicción.

Vamos a ver que ξ_α es un soporte de torsión suponiendo que existe una cadena infinita $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathrm{Seq}(\xi_\alpha)$. Como ζ_α es de torsión existirá un $k\in\mathbb{N}$ tal que $(x_1\cdots x_k)\notin\zeta_\alpha$. Consideremos el soporte $\tau=\langle\!\langle x_n : n\in\mathbb{N}\rangle\!\rangle$. Como $(x_1\cdots x_k)\notin\zeta_\alpha$ podemos encontrar $\overline{p}\in P$ tal que

$$\alpha_\tau=\overline{p}\otimes\langle x_k\cdots x_1\rangle_\tau.$$

Para todo $t\in\mathbb{N}$, como $(x_1\cdots x_{k+t})\in\xi_\alpha$, podemos encontrar $H(t)\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)$, $H(t)\neq\varnothing$ tal que

$$\alpha_{\nabla_{x_1\cdots x_{k+t}}H(t)}\neq\overline{p}\pi(x_{k+1}\cdots x_{k+t})\otimes\langle x_{k+t}\cdots x_1\rangle_{\nabla_{x_1\cdots x_{k+t}}H(t)}.$$

Como además $(x_1\cdots x_n)\notin\zeta_\alpha$, podemos encontrar $h(t)\in P$ tal que

$$\alpha_{\nabla_{x_1\cdots x_k}\nabla_{x_{k+1}\cdots x_{k+t}}H(t)}=$$
$$h(t)\otimes\langle x_k\cdots x_1\rangle_{\nabla_{x_1\cdots x_k}\nabla_{x_{k+1}\cdots x_{k+t}}H(t)}=$$
$$h(t)\pi(x_{k+1}\cdots x_{k+t})\otimes\langle x_{k+t}\cdots x_1\rangle_{\nabla_{x_1\cdots x_{k+t}}H(t)}.$$

Sea $\sigma=\cup_{t\in\mathbb{N}}\nabla_{x_{k+1}\cdots x_{k+t}}H(t)\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)$. Además $\langle\!\langle x_{k+t} : t\in\mathbb{N}\rangle\!\rangle\subseteq\sigma$.

Como $(x_1\cdots x_k)\notin\zeta_\alpha$ podemos encontrar un $\tilde{p}\in P$ tal que

$$\alpha_{\nabla_{x_1\cdots x_k}\sigma}=\tilde{p}\otimes\langle x_k\cdots x_1\rangle_{\nabla_{x_1\cdots x_k}\sigma}$$

Como $\tau \subseteq \nabla_{x_1 \cdots x_k}\sigma$ tenemos que $\tilde{p} \otimes \langle x_k \cdots x_1 \rangle_\tau = \overline{p} \otimes \langle x_k \cdots x_1 \rangle_\tau$ por lo que podemos encontrar un $t \geq 0$ tal que $\tilde{p}\pi(x_{k+1} \cdots x_{k+t}) = \overline{p}\pi(x_{k+1} \cdots x_{k+t})$ como consecuencia del Lema 4.8, por lo tanto para este t tenemos que

$$h(t)\pi(x_{k+1} \cdots x_{k+t}) \otimes \langle x_{k+t} \cdots x_1 \rangle_{\nabla_{x_1 \cdots x_{k+t}} H(t)} =$$

$$\alpha_{\nabla_{x_1 \cdots x_{k+t}} H(t)} = (\alpha_{\nabla_{x_1 \cdots x_k}\sigma})(P \otimes \Phi_{\nabla_{x_1 \cdots x_k}\sigma, \nabla_{x_1 \cdots x_{k+t}} H(t)}) =$$

$$\tilde{p} \otimes \langle x_k \cdots x_1 \rangle_{\nabla_{x_1 \cdots x_{k+t}} H(t)} = \tilde{p}\pi(x_{k+1} \cdots x_{k+t}) \otimes \langle x_{k+t} \cdots x_1 \rangle_{\nabla_{x_1 \cdots x_{k+t}} H(t)} =$$

$$\overline{p}\pi(x_{k+1} \cdots x_{k+t}) \otimes \langle x_{k+t} \cdots x_1 \rangle_{\nabla_{x_1 \cdots x_{k+t}} H(t)}$$

lo cual es una contradicción ya que

$$\alpha_{\nabla_{x_1 \cdots x_{k+t}} H(t)} \neq \overline{p}\pi(x_{k+1} \cdots x_{k+t}) \otimes \langle x_{k+t} \cdots x_1 \rangle_{\nabla_{x_1 \cdots x_{k+t}} H(t)}.$$

para todo $t \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 6.47. Sea P_R un R-módulo por la derecha. Consideraremos P con estructura de $(\mathbb{Z}, R)$-bimódulo y sea M un generador de R-DMod. Definiremos

$$\begin{array}{rccc} \overline{\iota}_P & P & \rightarrow & \mathbb{C}\left(P \otimes_R -\right) \\ & p & \mapsto & \overline{\iota}_P(p) \end{array}$$

siendo $\overline{\iota}_P(p)(m) = p \otimes m$.

Aunque la definición la hemos dado en general, a partir de ahora vamos a utilizar la definición para el generador $G = \coprod_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$ con X un conjunto y $\pi : X \to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R. Posteriormente veremos lo que pasa para otros generadores.

Proposición 6.48. *Sea P_R un R-módulo por la derecha. Entonces* $\operatorname{Ker}(\overline{\iota}_P) = \mathbf{T}\left(P\right)$.

Demostración:
Sea $p \in \mathbf{T}\left(P\right)$, entonces

$$\xi_p = \{\overline{x} \in \Sigma(X) : p\pi(\overline{x}) \neq 0\}$$

Supongamos que $p \notin \operatorname{Ker}(\overline{\iota}_P)$, entonces existirá un $g \in G$ tal que $p \otimes g \neq 0$. Sea $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$ y $h : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to G$ tal que $(\langle \varnothing \rangle_\sigma)h = g$. Como $\xi_p \cap \sigma$ es finito, podemos tomar un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\overline{x} \in \xi_p \cap \sigma$, $\lambda(\overline{x}) < n$. Entonces

$$p \otimes g = p \otimes (\langle \varnothing \rangle_\sigma)h = \sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} p \otimes (\pi(\overline{x})\langle \underline{x} \rangle_\sigma)h =$$

$$\sum_{\overline{x} \in X^n \cap \sigma} p\pi(\overline{x}) \otimes (\langle \underline{x} \rangle_\sigma)h = 0.$$

Recíprocamente supongamos que $p \notin \mathbf{T}(P)$. Entonces existirá una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $p\pi(x_1 \cdots x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto si denotamos $\tau = (\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$, obtenemos que

$$p \otimes (\langle \varnothing \rangle_\tau) q_\tau \neq 0$$

como consecuencia de la Proposición 4.9. $\square$

Proposición 6.49. *Sea P_R un R-módulo por la derecha. Entonces* $\mathrm{Coker}(\overline{\iota}_P)$ *es un R-módulo por la derecha de torsión.*

Demostración:
Sea $c \in \mathbb{C}(P \otimes_R -)$, entonces $\epsilon(c) \in \varprojlim_{\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)} P \otimes_R \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$. Consideremos el soporte de torsión $\xi_{\epsilon(c)}$ dado en el Lema 6.46. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, para un cierto $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(x_1 \cdots x_n) \notin \xi_{\epsilon(c)}$, entonces por definición de $\xi_{\epsilon(c)}$ existirá un elemento $p \in P$ tal que para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$,

$$c_{\nabla_{x_1 \cdots x_n}\sigma} = p \otimes \langle x_n \cdots x_1 \rangle_{\nabla_{x_1 \cdots x_n}\sigma}$$

pero entonces para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$,

$$(c\pi(x_1 \cdots x_n))_\sigma = (\epsilon(c) \circ \pi^\nabla(x_1 \cdots x_n))_\sigma =$$

$$(c_{\nabla_{x_1 \cdots x_n}\sigma})(P \otimes \pi^\nabla(x_1 \cdots x_n)_\sigma) = p \otimes (\langle x_n \cdots x_1 \rangle_{\nabla_{x_1 \cdots x_n}}) \pi^\nabla(x_1 \cdots x_n)_\sigma =$$

$$p \otimes \langle \varnothing \rangle_\sigma = (\overline{\iota}_P(p))_\sigma.$$

Como ésto se puede hacer para todo $\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$, deducimos que $c\pi(x_1 \cdots x_n) = \overline{\iota}_P(p) \in \mathrm{Im}(\overline{\iota}_P)$. $\square$

Corolario 6.50. *Para todo R-módulo por la derecha P_R se tiene un isomorfismo*

$$\beta_P : \mathbf{C}(P_R) \to \mathbb{C}(P \otimes_R -)$$

tal que $\overline{\iota}_P = \beta_P \circ \iota_P$.

Demostración:
Este resultado es consecuencia directa de la Proposición 6.49 de la Proposición 6.48 y la demostración que se hizo en el Ejercicio 5.2 aplicada a un solo módulo P. $\square$

Corolario 6.51. *Sea M un generador de la categoría R-*DMod*, entonces para todo R-módulo por la derecha P_R se tiene que* $\mathbf{C}(P_R) \simeq \mathbb{C}(P \otimes_R -)$ *donde* $\mathbb{C}(P \otimes_R -)$ *es el bimódulo construido a partir de* ${}_RM$

Demostración:
Es consecuencia del corolario anterior y de la Proposición 6.27. $\square$

Corolario 6.52. *Sea ${}_RM$ un generador de la categoría R-*DMod*, entonces* $\mathrm{BiEnd}({}_RM) \simeq \mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right)$.

Demostración:
El funtor ${}^{\mathbb{Z}\times}R \otimes_R -$ es equivalente al funtor identidad, por lo tanto

$$\mathrm{BiEnd}({}_R M) = \mathrm{Hom}_E(M, M) \simeq \mathrm{Hom}_E(M, {}^{\mathbb{Z}\times}R \otimes_R M) =$$

$$\mathbb{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R \otimes_R -\right) \simeq \mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right).$$

□

PROPOSICIÓN 6.53. *Sean $F, F' : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$ dos funtores extensibles que conserven límites directos tales que existe un isomorfismo de bimódulos, $\beta : \mathbb{C}(F) \to \mathbb{C}(F')$, entonces F y F' son equivalentes.*

Demostración:
Sean $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ y $\varsigma' : \mathbb{C}(F') \otimes_R - \to F'$ las equivalencias de funtores asociadas, entonces los funtores F y F' son equivalentes a través de la siguiente cadena de equivalencias

$$F \underset{\simeq}{\xrightarrow{\varsigma^{-1}}} \mathbb{C}(F) \otimes_R - \underset{\simeq}{\xrightarrow{\beta\otimes -}} \mathbb{C}(F') \otimes_R - \underset{\simeq}{\xrightarrow{\varsigma'}} F'$$

□

PROPOSICIÓN 6.54. *Sea $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$ un funtor que conserve límites directos, y sea $\varsigma : \mathbb{C}(F) \otimes_R - \to F$ la transformación natural asociada, entonces $\mathbb{C}(\varsigma) : \mathbb{C}(\mathbb{C}(F) \otimes_R -) \to \mathbb{C}(F)$ es un isomorfismo de bimódulos.*

Demostración:
Utilizando el Corolario 6.50 tenemos un isomorfismo $\mathbb{C}(\mathbb{C}(F) \otimes_R -) \simeq \mathbf{C}(\mathbb{C}(F))$, pero como $\mathbb{C}(F) \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ deducimos que $\mathbf{C}(\mathbb{C}(F)) \simeq \mathbb{C}(F)$. Faltaría ver que estos isomorfismos son precisamente los que vienen a partir de $\mathbb{C}(\varsigma)$.

El isomorfismo del que hablamos viene dado por

$$\begin{array}{rccc} \overline{\iota}_{\mathbb{C}(F)} : & \mathbb{C}(F) & \to & \mathbb{C}(\mathbb{C}(F) \otimes_R -) \\ & c & \mapsto & \overline{\iota}_{\mathbb{C}(F)}(c) \end{array}$$

con $\overline{\iota}_{\mathbb{C}(F)}(c)(m) = c \otimes m$. Si aplicamos ahora $\mathbb{C}(\varsigma) : \mathbb{C}(\mathbb{C}(\otimes)_R -) \to \mathbb{C}(F)$ obtenemos

$$\mathbb{C}(\varsigma)(\overline{\iota}_{\mathbb{C}(F)}(c))(m) = \varsigma_M(c \otimes m) = c(m)$$

por lo tanto $\mathbb{C}(\varsigma) \circ \overline{\iota}_{\mathbb{C}(F)} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}(F)}$. Aplicando que $\overline{\iota}_{\mathbb{C}(F)}$ es un isomorfismo deducimos que $\mathbb{C}(\varsigma)$ es un isomorfismo. □

7. Generalización del Concepto de Funtor Extensible

DEFINICIÓN 6.55. Sean R y R' dos anillos. Diremos que un funtor $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ que conserve límites directos es extensible si $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{MOD}$ es un funtor extensible.

EJERCICIO 6.9. Demostrar que si R' es un anillo con identidad, entonces un funtor $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod} = R'\text{-}\mathsf{Mod}$ que conserve límites directos es extensible con la Definición 6.1 si y solo si lo es con la Definición 6.55.

Solución:
Como $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}}$ conserva límites directos, entonces si $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F$ conserva límites directos.

Si F es un funtor extensible con la Definición 6.1, entonces F es equivalente a un funtor producto tensorial del tipo $P \otimes_R -$, pero entonces $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F$ también es equivalente a $P \otimes_R -$ ya que $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}}(F(M)) \simeq F(M)$ para todo $M \in R\text{-}\mathsf{DMod}$. Del mismo modo, si $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}}(F(M)) \simeq P \otimes_R M$ para un cierto bimódulo P, entonces $F(M) \simeq P \otimes_R M$ para el mismo bimódulo, el único problema podría plantearse en este caso si P no es un R'-módulo unitario. En tal caso podemos descomponer P en dos partes, $P = 1_{R'}P \oplus (1_{\mathbb{Z}\ltimes R'} - 1_{R'})P$, pero como los módulos $P \otimes_R M$ son R'-unitarios para todo ${}_RM \in R\text{-}\mathsf{DMod}$, entonces $(1_{\mathbb{Z}\ltimes R'} - 1_{R'})P \otimes_R M = 0$, por lo que $P \otimes_R M \simeq 1_{R'}P \otimes_R M$ con lo que logramos poner F como un producto tensorial por un bimódulo que como R'-módulo es unitario. □

DEFINICIÓN 6.56. Sean R y R' dos anillos. Definiremos

$$\mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$$

como la subcategoría plena de $\mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$ formada por los funtores extensibles y las transformaciones naturales entre ellos.

A la restricción del funtor $\mathbb{C}$ sobre la categoría $\mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$ la denotaremos también como $\mathbb{C}$.

Realmente podemos establecer un resultado similar al obtenido para funtores extensibles entre $R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $A'\text{-}\mathsf{Mod}$ para funtores entre $R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $R'\text{-}\mathsf{DMod}$. Sería, poniendo únicamente las condiciones principales, como sigue

TEOREMA 6.57. *Sea $F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$ para ciertos anillos R y R'. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$F \in \mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$.*
2. *F es equivalente a un funtor de la forma $P \otimes_R -$ para algún (R', R)-bimódulo.*
3. *Existe un generador ${}_RM$ tal que la transformación natural $\varsigma : \mathbb{C}(\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F) \otimes_R - \to F$ construida a partir de M es una equivalencia de funtores.*

Demostración:
Consideremos $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} : R'\text{-}\mathsf{DMod} \to {}^{\mathbb{Z}\ltimes}R'\text{-}\mathsf{Mod}$ la inclusión.

$(1 \Rightarrow 2)$. Si $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F$ es extensible, entonces por el Teorema 6.57, existe un (R', R)-bimódulo P tal que $P \otimes_R D \simeq F(D)$ para todo $D \in R\text{-}\mathsf{DMod}$. Este isomorfismo es en ${}^{\mathbb{Z}\ltimes}R'\text{-}\mathsf{Mod}$. El módulo $F(D)$ está en $R'\text{-}\mathsf{DMod}$, y si $P \otimes_R D$ es isomorfo a él, también estará en dicha categoría, por lo tanto F es equivalente al funtor $P \otimes_R -$ como funtores entre R-DMod y R'-DMod.

($2 \Rightarrow 3$). A partir del Teorema 6.57, sabemos que $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F$ es equivalente a $\mathbb{C}\,(\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F) \otimes_R -$ como funtores entre R-DMod y ${}^{\mathbb{Z}\times}R'$-Mod. Como $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F(D)$ está de hecho en la subcategoría R'-DMod y $\mathbb{C}\,(\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F) \otimes_R D$ es isomorfo a él, también estará éste último en dicha categoría, y por lo tanto F y $\mathbb{C}\,(\mathbf{I}'_{\mathbf{C}} \circ F) \otimes_R -$ serán funtores equivalentes considerados como funtores entre R-DMod y R'-DMod.

($3 \Rightarrow 1$). Si se cumple (3), entonces $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F$ es equivalente al funtor $\mathbb{C}\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F \otimes_R -$ y utilizando directamente el Teorema 6.57, deducimos que $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F$ es extensible y por definición eso significa que F es extensible.

□

8. La Independencia del Anillo Ambiente III

PROPOSICIÓN 6.58. *Sean R y R' anillos, B' un anillo con identidad y $\beta' : R' \to B'$ un homomorfismo de anillos tal que* $\mathrm{Ker}(\beta')$ *y* $\mathrm{Coker}(\beta')$ *considerados como R'-módulos por la derecha, son de torsión. Sea $F \in \mathsf{LDFun}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$. Entonces son equivalentes*

1. $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F$ *es extensible, siendo* $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} : R'\text{-}\mathsf{DMod} \to {}^{\mathbb{Z}\times}R'\text{-}\mathsf{Mod}$ *la inclusión canónica.*
2. $\mathbf{J}'_{\mathbf{D}} \circ F$ *es extensible, siendo* $\mathbf{J}'_{\mathbf{D}} : R'\text{-}\mathsf{DMod} \to B'\text{-}\mathsf{Mod}$ *la inclusión canónica.*

Demostración:
$\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F$ es extensible si y solo si $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F(D) \simeq P \otimes_R D$ para un cierto bimódulo P y esto sucede si y solo si $F(D) \simeq P \otimes_R D$ para todo $D \in R$-DMod, pero como R-DMod es una subcategoría plena de B-Mod, la condición anterior es equivalente a que $\mathbf{J}'_{\mathbf{D}} \circ F(D) \simeq P \otimes_R D$ para todo D, que es la condición de que $\mathbf{J}'_{\mathbf{D}} \circ F$ sea extensible. □

DEFINICIÓN 6.59. Sean R y R' dos anillos, $F \in \mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$, y sea ${}_RM$ un generador de R-DMod, entonces definiremos $\mathbb{C}\,(F) = \mathbb{C}\,(\mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F)$.

PROPOSICIÓN 6.60. *Sean R y R' dos anillos, $F \in \mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$, y sea $\beta' : R' \to B'$ un homomorfismo de anillos con B' un anillo con identidad tal que β' tiene núcleo y conúcleo de torsión considerando estos módulos como R'-módulos por la derecha. Supongamos que* $\mathbf{J}'_{\mathbf{D}} : R'\text{-}\mathsf{DMod} \to B'\text{-}\mathsf{Mod}$ *es la inclusión canónica entre las categorías, entonces* $\mathbb{C}\,(F) = \mathbb{C}\,(\mathbf{J}'_{\mathbf{D}} \circ F)$.

Demostración:
Sea ${}_RM$ un generador de R-DMod. Entonces $\mathrm{Hom}_E(M, F(M)) = \mathrm{Hom}_E(M, \mathbf{I}'_{\mathbf{D}} \circ F(M)) = \mathrm{Hom}_E(M, \mathbf{J}'_{\mathbf{D}} \circ F(M))$ ya que $F(M)$, $\mathbf{I}'_{\mathbf{D}}(F(M))$ y $\mathbf{J}'_{\mathbf{D}}(F(M))$ son el mismo E-módulo (son módulos con estructuras

diferentes por la izquierda, pero por la derecha, la estructura de E-módulo es la misma para los tres).

Este hecho hace $\mathrm{Hom}_E(M, F(M)) = \mathrm{Hom}_E(M, \mathbf{J}'_{\mathbf{D}} \circ F(M))$ tenga una estructura de B'-módulo que extienda a su estructura de R'-módulo. $\square$

PROPOSICIÓN 6.61. *Sean R y R' anillos, B y B' anillos con identidad, $\beta : R \to B$ y $\beta' : R' \to B'$ homomorfismos de anillos tales que* $\mathrm{Ker}(\beta), \mathrm{Coker}(\beta) \in \mathcal{T}_R$ *y* $\mathrm{Ker}(\beta'), \mathrm{Coker}(\beta') \in \mathcal{T}_{R'}$. *Sea $F \in$* $\mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$.

Entonces $\mathbb{C}(F)$ tiene una única estructura de (B, B')-bimódulo que extiende su estructura de (R, R')-bimódulo.

Demostración:
Sea ${}_RM$ un generador de la categoría R-DMod. Entonces M tiene estructura de B-módulo por la izquierda. También $F(M)$ tiene estructura de B'-módulo por la izquierda, por lo tanto $\mathrm{Hom}_E(M, F(M))$ tiene estructura de (B, B')-módulo por la izquierda. Esta estructura extiende trivialmente a la de (R, R')-bimódulo. Como $\mathrm{Hom}_E(M, F(M)) \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, la estructura de B-módulo por la derecha es única.

Supongamos que existen dos estructuras de B'-módulo en $\mathrm{Hom}_E(M, F(M))$ que denotaremos $\cdot, \star$. El R'-isomorfismo $\varsigma_M : \mathrm{Hom}_E(M, F(M)) \otimes_R M \to F(M)$ hace que

$$(b'\cdot c)(m) = b'(\cdot(c(m))) = (b'\star c)(m) \quad \forall b' \in B', c \in \mathrm{Hom}_E(M, F(M)), m \in M$$

(por la unicidad de la estructura de B'-módulo de $F(M)$, pero entonces $b' \cdot c = b' \star c$ para todo $c \in \mathrm{Hom}_E(M, F(M))$, lo que prueba la unicidad de la estructura de B'-módulo. $\square$

TEMA 7

Teoría de Morita

1. Bimódulos Permeables

DEFINICIÓN 7.1. Sean R y R' anillos y sea ${}_{R'}M_R$ un (R',R)-bimódulo. Denotaremos por

$$\begin{array}{rccc} \phi_M: & R'\otimes_{R'} M & \to & M \\ & s\otimes m & \mapsto & sm \end{array}$$

Diremos que un (R',R)-bimódulo es permeable por la derecha si $\mathrm{Ker}(\phi_M)$ y $\mathrm{Coker}(\phi_M)$ son módulos de torsión como R-módulos por la derecha.

Denotaremos por (R',R)-Perm a la subcategoría plena de la categoría de (R',R)-bimódulos formada por los que son (R',R)-permeables por la derecha y como R-módulos están en CMod-R.

EJEMPLO 7.2. Todo anillo R es un (R,R)-bimódulo permeable por ambos lados.

LEMA 7.3. *Sea P_R un R-módulo por la derecha. Las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *P_R es un R-módulo de torsión.*
2. *$P\otimes_R N = 0$ para todo $N\in R$-DMod.*
3. *$P\otimes_R M = 0$ para un generador ${}_RM$ de R-DMod.*
4. *$P\otimes_R W = 0$ para todo R-módulo por la izquierda unitario ${}_RW$.*

Demostración:
$(4\Rightarrow 3)$. Trivial.

$(3\Rightarrow 2)$. Consideremos un epimorfismo $\eta: M^{(I)}\to N$. Como $P\otimes_R -$ conserva epimorfismos tenemos que $P\otimes_R\eta: P\otimes_R M^{(I)}\to P\otimes_R N$ es un epimorfismo, pero como $P\otimes_R M = 0$ tenemos que $P\otimes_R M^{(I)} = 0$ y por lo tanto $P\otimes_R N = \mathrm{Im}(P\otimes_R\eta) = 0$

$(2\Rightarrow 1)$. Sea X un conjunto, $\pi: X\to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R. Supongamos que existe un $p\in P$ y una cadena $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$, $p\pi(x_1\cdots x_n)\neq 0$, entonces $p\otimes\langle\varnothing\rangle_{\langle\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle\rangle}\neq 0$ y por lo tanto $P\otimes\langle\langle x_n: n\in\mathbb{N}\rangle\rangle\neq 0$.

$(1\Rightarrow 4)$. Vamos a utilizar el Lema 3.37 del siguiente modo, consideremos $Z = P\otimes_R W$ y $h: P\times W\to P\otimes_R W$ la aplicación $h(p,w) = p\otimes w$ para todo $p\in P$ y todo $w\in W$. Como $h(0,w)=0$ para todo $w\in W$ deducimos que $h(p,w)=0$ para todo $p\in P$ y todo $w\in W$ ya que P es de torsión, por lo tanto $P\otimes_R W = 0$. $\square$

Proposición 7.4. *Sean ${}_{R'}P_R$ y ${}_{R'}Q_R$ dos (R', R)-bimódulos y sea $\varphi : P \to Q$ un homomorfismo de bimódulos. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathrm{Hom}_R(\varphi, C) : \mathrm{Hom}_R(Q_R, C_R) \to \mathrm{Hom}_R(P_R, C_R)$ *es un isomorfismo para todo* $C \in \mathsf{CMod}\text{-}R$.
2. $\varphi \otimes D : P \otimes_R D \to Q \otimes_R D$ *es un isomorfismo para todo* $D \in R\text{-}\mathsf{DMod}$.
3. $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *y* $\mathrm{Coker}(\varphi)$ *son* R*-módulos por la derecha de torsión.*

Demostración:
$(1 \Rightarrow 3)$. El núcleo de $\mathrm{Hom}_R(\varphi, C)$ es precisamente

$$\{f : Q \to C : f \circ \varphi = 0\} = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(\varphi), C)$$

por lo tanto $\mathrm{Hom}_R(\varphi, C)$ es un monomorfismo para todo C si y solo si $\mathrm{Coker}(\varphi)$ es un R-módulo por la derecha de torsión. Si es de torsión entonces $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(\varphi), C) = 0$ por ser C libre de torsión, y si no lo es, entonces $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(\varphi), \mathbf{C}\,(\mathrm{Coker}(\varphi))) \neq 0$.

Para ver que $\mathrm{Hom}_R(\varphi, C)$ es un epimorfismo consideremos un homomorfismo $f : P \to C$. Como $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es de torsión y $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(\varphi), C) = 0$ tenemos que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ y podemos definir $\overline{f} : P/\mathrm{Ker}(\varphi) \to C$ con $\overline{f}(p + \mathrm{Ker}(\varphi)) = f(p)$.

Como $\mathrm{Coker}(\varphi)$ es de torsión, utilizando que C es T-inyectivo, podemos encontrar un homomorfismo $g : Q \to C$ que tal que para todo $p \in P$, $g \circ \varphi = f$, lo que prueba que $\mathrm{Hom}_R(\varphi, C)$ es un epimorfismo para todo $C \in \mathsf{CMod}\text{-}R$.

$(3 \Rightarrow 1)$. Tal y como hemos visto en el apartado anterior, si $\mathbf{C}\,(\mathrm{Coker}(\varphi)) \neq 0$ entonces $\mathrm{Hom}_R(\varphi, -)$ no puede ser una equivalencia. Nos queda por probar que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ también es de torsión. Para ello supongamos por reducción al absurdo que no lo es, es decir, que $\mathbf{C}\,(\mathrm{Ker}(\varphi)) \neq 0$ y consideremos el homomorfismo $\iota_P : P \to \mathbf{C}\,(P)$. Por ser $\mathrm{Hom}_R(\varphi, \mathbf{C}\,(P))$ un epimorfismo, podremos encontrar un $g : Q \to \mathbf{C}\,(P)$ tal que $g \circ \varphi = \iota_P$. Entonces

$$\iota_P \circ \varphi^k = g \circ \varphi \circ \varphi^k = 0$$

por lo tanto $0 = \iota_P \circ \varphi^k = \iota_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \circ \mathbf{C}\left(\varphi^k\right)$. Como el funtor $\mathbf{C}$ es exacto y φ^k es un monomorfismo, deducimos que $\mathbf{C}\left(\varphi^k\right)$ es un monomorfismo y por lo tanto $\iota_{\mathrm{Ker}(\varphi)} = 0$, pero esto solo sucede si $\mathbf{C}\,(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 0$.

$(2 \Rightarrow 3)$. De la condición (2) deducimos que en particular $\varphi \otimes_R M$ ha de ser un isomorfismo para un generador M de la categoría $R\text{-}\mathsf{DMod}$, entonces aplicando el funtor $- \otimes_R M$ a la sucesión exacta

$$Q \to P \to \mathrm{Coker}(\varphi) \to 0$$

deducimos que $\mathrm{Coker}(\varphi) \otimes_R M = 0$ y aplicando el Lema 7.3 deducimos que $\mathrm{Coker}(\varphi)$ es un R-módulo por la derecha de torsión.

Sea X un conjunto y $\pi : X \to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R. Entonces $G =$

$\coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$ sabemos que es un generador de R-DMod que además es plano.

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to P \to \mathrm{Im}(\varphi) \to 0$$

Si a esta sucesión le aplicamos el funtor $-\otimes_R G$ obtenemos

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi)\otimes G \to P\otimes G \to \mathrm{Im}(\varphi)\otimes G \to 0.$$

Como $\varphi\otimes G$ es un isomorfismo, entonces

$$\varphi^{kc}\otimes G \circ \varphi^{ck}\otimes G$$

es un isomorfismo. Como $\varphi^{kc}\otimes G$ es un isomorfismo por ser $\mathrm{Coker}(\varphi)\otimes_R G = 0$, deducimos que $\varphi^{ck}\otimes G$ es un isomorfismo. Utilizando ésto con la sucesión exacta anterior deducimos que $\mathrm{Ker}(\varphi)\otimes_R G = 0$, pero eso implica que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un R-módulo por la derecha de torsión.

($3 \Rightarrow 2$). Sea de nuevo X un conjunto y $\pi : X \to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R. Denotemos también por $G = \coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$.

Consideremos la sucesión exacta

$$Q \to P \to \mathrm{Coker}(\varphi) \to 0.$$

Si le aplicamos el funtor $-\otimes_R G$ deducimos que

$$Q\otimes_R G \to P\otimes_R G \to \mathrm{Coker}(\varphi)\otimes_R G \to 0$$

es exacta y como $\mathrm{Coker}(\varphi)$ es de torsión, $\mathrm{Coker}(\varphi)\otimes_R G = 0$, por lo tanto $\varphi\otimes G$ es un epimorfismo.

Como $\mathrm{Coker}(\varphi)$ es de torsión, $\varphi^{kc}\otimes G$ es un isomorfismo. Para probar que $\varphi\otimes G$ es un isomorfismo solo necesitaríamos probar que

$$\varphi^{ck}\otimes G : P\otimes G \to \mathrm{Im}(\varphi)\otimes G$$

es un isomorfismo, pero esto es cierto ya que al aplicarle el funtor $-\otimes_R G$ a la sucesión

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to P \to \mathrm{Im}(\varphi) \to 0$$

teniendo en cuenta que $\mathrm{Ker}(\varphi)\otimes_R G = 0$ y que G es plano.

Una vez probado que $\varphi\otimes G$ es un isomorfismo, para probar que $\varphi\otimes N$ es un isomorfismo para todo $N \in R$-DMod utilizamos una sucesión exacta del tipo

$$G^{(J)} \to G^{(I)} \to N \to 0$$

Si le aplicamos $\varphi\otimes -$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P\otimes G^{(J)} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi\otimes G^{(J)}"'] & P\otimes G^{(I)} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi\otimes G^{(I)}"'] & P\otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi\otimes N"'] & 0 \\
Q\otimes G^{(J)} \arrow[r] & Q\otimes G^{(I)} \arrow[r] & Q\otimes N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $\varphi\otimes G$ es un isomorfismo, deducimos que $\varphi\otimes G^{(I)}$ también lo es para cualquier conjunto de índices I, por lo tanto las dos primeras columnas del diagrama son isomorfismos. Como las filas son exactas, de ahí podemos deducir que $\varphi \otimes N$ es un isomorfismo. □

PROPOSICIÓN 7.5. *Sea ${}_{R'}P_R$ un bimódulo, entonces son equivalentes*

1. $\mathrm{Hom}_R(P_R, -)$ *es un funtor entre* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{CMod}\text{-}R'$.
2. $P \otimes_R -$ *es un funtor entre* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *y* $R'\text{-}\mathsf{DMod}$.
3. P *es un* (R', R)*-bimódulo permeable por la derecha.*

Demostración:
La condición (1) es equivalente a que

$$\mathrm{Hom}_{R'}(R', \mathrm{Hom}_R(P, C)) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, C)$$

con el homomorfismo canónico. Pero también tenemos el isomorfismo canónico

$$\mathrm{Hom}_{R'}(R', \mathrm{Hom}_R(P, C)) \simeq \mathrm{Hom}_R(R' \otimes_R P, C)$$

La composición de los dos resulta

$$\mathrm{Hom}_{R'}(\phi_P, C) : \mathrm{Hom}_R(P, C) \to \mathrm{Hom}_R(R' \otimes_R P, C)$$

por lo tanto la condición (1) es equivalente a que ϕ_P tenga núcleo y conúcleo de torsión como consecuencia de la Proposición 7.4.

La condición (2) es equivalente a que para tod $D \in R\text{-}\mathsf{DMod}$,

$$\phi_P \otimes D : R' \otimes_{R'} P \otimes_R D \to P \otimes_R D$$

sea un isomorfismo, pero ésto de nuevo es equivalente a que $\mathrm{Ker}(\phi_P)$ y $\mathrm{Coker}(\phi_P)$ sean R-módulos por la derecha de torsión. □

PROPOSICIÓN 7.6. *Sea P un (R', R)-bimódulo permeable por la derecha. Entonces $\mathbf{C}(P)$ es también un (R', R)-bimódulo permeable por la derecha y $\mathrm{Hom}_R(\iota_P, -)$ es una equivalencia entre los funtores $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}(P), -)$ y $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ considerados como funtores enter $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $\mathsf{CMod}\text{-}R'$ y $-\otimes \iota_P : -\otimes_R P \to -\otimes_R \mathbf{C}(P)$ es también una equivalencia de funtores considerados como funtores entre $R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $R'\text{-}\mathsf{DMod}$.*

Por lo tanto, para todo (R', R)-bimódulo permeable por la derecha, su localización como R-módulo está en $\mathsf{Perm}\text{-}(R', R)$.

Demostración:
El R-módulo por la derecha $\mathbf{C}(P_R)$ tiene estructura de R'-módulo por la izquierda tal y como vimos en la Proposición 5.13, además, ι_P es un homomorfismo de bimódulos. Usando la Proposición deducimos que

$$\mathrm{Hom}_R(\iota_P, C) : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}(P), C) \to \mathrm{Hom}_R(P, C)$$

es un isomorfismo para todo $C \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, en particular $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}(P), C) \in \mathsf{CMod}\text{-}R'$ para todo $C \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, por lo tanto usando la Proposición 7.5 deducimos que $\mathbf{C}(P)$ es también (R', R)-permeable por la derecha.

Del hecho de que $\mathrm{Ker}(\iota_P)$ y $\mathrm{Coker}(\iota_P)$ deducimos las equivalencias de los funtores del enunciado. □

PROPOSICIÓN 7.7. *Sean* ${}_{R'}P_R, {}_{R'}Q_R \in \mathsf{Perm}\text{-}(R', R)$. *Sea también* $\varphi : P \to Q$ *un homomorfismo de bimódulos. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathrm{Hom}_R(\varphi, -) : \mathrm{Hom}_R(Q_R, -) \to \mathrm{Hom}_R(P_R, -)$ *es una equivalencia de funtores considerados* $\mathrm{Hom}_R(Q_R, -)$ *y* $\mathrm{Hom}_R(P_R, -)$ *como funtores entre* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{CMod}\text{-}R'$.
2. $\varphi \otimes - : P \otimes_R - \to Q \otimes_R -$ *es una equivalencia de funtores considerados* $P \otimes_R -$ *y* $Q \otimes_R -$ *como funtores entre* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *y* $R'\text{-}\mathsf{DMod}$.
3. φ *es un isomorfismo.*

Demostración:
Este resultado es una consecuencia directa de la Proposición 7.4.

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un submódulo de P_R que es libre de torsión por estar en $\mathsf{CMod}\text{-}R$, por lo tanto $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un módulo de torsión y libre de torsión, por lo tanto ha de ser 0.

Utilizando la Proposición 3.4 deducimos también que $\mathrm{Coker}(\varphi) = 0$.

□

En el tema anterior probamos que para todo $F \in \mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$, el funtor F era equivalente al funtor $\mathbb{C}(F) \otimes_R -$ entre las categorías $R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $R'\text{-}\mathsf{DMod}$. Ahora hemos vismo que cuando ésto sucede, el bimódulo $\mathbb{C}(F)$ es permeable por la derecha, pero además sabemos que con su estructura de R-módulo por la derecha, está en $\mathsf{CMod}\text{-}R$ por la Proposición 3.36. Por lo tanto $\mathbb{C}$ nos define un funtor

$$\mathbb{C} : \mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod}) \to \mathsf{Perm}\text{-}(R', R)\,.$$

En el otro sentido tenemos un funtor que podemos denotar

$$\mathbb{T} : \mathsf{Perm}\text{-}(R', R) \to \mathsf{LDFun}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$$

que para un cierto P se definiría como $\mathbb{T}(P) = P \otimes_R -$ y para un homomorfismo $f : P \to Q$, $\mathbb{T}(f) = f \otimes -$.

2. Funtores y Homomorfismos Permeables de Anillos

DEFINICIÓN 7.8. Sean R y R' dos anillos y $\alpha : R \to R'$ un homomorfismo de anillos[1].

Este homomorfismo induce una estructura de (R, R)-bimódulo en R' dada por

$$rr' := r^\alpha r', r'r := r'r^\alpha \quad \forall r \in R, r' \in R'.$$

Diremos que α es un homomorfismo permeable por la derecha de anillos si R' es un (R, R')-bimódulo permeable por la derecha. Simétricamente diremos que α es un homomorfismo permeable por la izquierda de anillos si R' es un (R', R)-bimódulo permeable por la izquierda.

[1]La definición de homomorfismo de anillos que se está utilizando es la Definición 1.2

EJERCICIO 7.1. Sean R y R' dos anillos con identidad y $\alpha : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Las siguientes condiciones son equivalentes

1. α es un homomorfismo permeable por la derecha de anillos.
2. α es un homomorfismo permeable por la izquierda de anillos.
3. $(1_R)^\alpha = 1_{R'}$.

Solución:
En el caso de los anillos con identidad, un R'-módulo $M_{R'}$ es de torsión si y solo si $m1_{R'} = 0$ para todo $m \in M$. Lo mismo sucede por la izquierda. Esto hace que las condiciones de ser un homomorfismo permeable por la derecha o de ser un homomorfismo permeable por la izquierda sean equivalentes a que $R' = R^\alpha R'$ y $R' = R'R^\alpha$. Ambas se cumplen trivialmente si $(1_R)^\alpha = 1_{R'}$.

Supongamos que $R' = R'R^\alpha$. Entonces para el elemento $1_{R'}$ podremos encontrar elementos $r'_i \in R'$ y $r_i \in R_i$ tales que $1_{R'} = \sum_i r'_i r_i^\alpha$, pero entonces

$$(1_R)^\alpha = 1_{R'}(1_R)^\alpha = \sum_i r'_i r_i^\alpha (1_R)^\alpha =$$

$$\sum_i r'_i (r_i 1_R)^\alpha = \sum_i r'_i r_i^\alpha = 1_{R'}.$$

Si $R' = R^\alpha R'$ la demostración es simétrica. □

EJERCICIO 7.2. Sean R y R' dos anillos, $\alpha : R \to R'$ un homomorfismo permeable por la derecha de anillos. Si X es un conjunto y $\pi : X \to R$ una aplicación tal que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R entonces $\alpha \circ \pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R'.

Solución:
Supongamos por reducción al absurdo que existe una sucesión de elementos de R', $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $r'_1 \cdots r'_n \notin \alpha \circ \pi(X)R'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $R'/R^\alpha R'$ es un R'-módulo por la derecha de torsión, podremos encontrar un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $r'_1 \cdots r'_{n_1} \in R^\alpha R'$, es decir, tal que existen $s_1, \cdots, s_k \in R$ y $s'_1, \cdots, s'_k \in R'$ tales que

$$r'_1 \cdots r'_{n_1} = \sum_{i=1}^{k} s_i^\alpha s'_i$$

además, como para todo $n \geq n_1$ se tiene que $r'_1 \cdots r'_n \notin \alpha \circ \pi(X)R'$ entonces existirá un $i \in \{1, \cdots, k\}$ tal que

$$s_i^\alpha s'_i r'_{n_1+1} \cdots r'_n \notin \alpha \circ \pi(X)R'$$

para todo $n \geq n_1$. Denotemos $r_1 = s_i$ para éste i, $\overline{r}'_1 = s'_i$. $\overline{r}'_t = r'_{n_1+t+1}$ para todo $t \geq 0$. Tenemos pues un $r_1 \in R$ y una sucesión $(\overline{r}'_t)_{r\in\mathbb{N}}$ tal que $r_1^\alpha \overline{r}'_1 \cdots \overline{r}'_t \notin \alpha \circ \pi(X)R'$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Utilizando una técnica similar a la anterior podemos encontrar un $r_2 \in R$ y unos elementos $(\tilde{r}'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en R' tales que $(r_1r_2)^\alpha\tilde{r}'_1\cdots\tilde{r}'_i \notin \alpha\circ\pi(X)R'$ para todo i.

De este modo podríamos encontrar una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $r_1\cdots r_n \notin \pi(X)R$, lo cual sería una contradicción con el hecho de que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R. □

Un homomorfismo de anillos $\alpha : R \to R'$ induce funtores que denotaremos

$$\mathsf{MOD}\text{-}\alpha : \mathsf{MOD}\text{-}R' \to \mathsf{MOD}\text{-}R \quad \alpha\text{-}\mathsf{MOD} : R'\text{-}\mathsf{MOD} \to R\text{-}\mathsf{MOD}$$

definidos para un R'-módulo M como el mismo grupo abeliano, dotado de una multiplicación por elementos de R dada a través de α de forma que primero se lleva el elemento de R a R' y posteriormente se multiplica. Vamos a ver que esta estructura tiene una interesante relación con los homomorfismos permeables de anillos.

Proposición 7.9. *Sean R y R' dos anillos, $\alpha : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El funtor inducido* $\mathsf{MOD}\text{-}R' \to \mathsf{MOD}\text{-}R$ *lleva los módulos de* $\mathsf{CMod}\text{-}R'$ *a módulos en* $\mathsf{CMod}\text{-}R$.
2. *El funtor inducido* $R'\text{-}\mathsf{MOD} \to R\text{-}\mathsf{MOD}$ *lleva los módulos de* $R'\text{-}\mathsf{DMod}$ *a módulos en* $R\text{-}\mathsf{DMod}$.
3. *El homomorfismo $\alpha : R \to R'$ es permeable por la derecha.*

Demostración:
$(3 \Rightarrow 2)$. Sea X un conjunto, $\pi : X \to R'$ una aplicación tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R'. Sea $G' = \coprod_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle$. Consideremos el homomorfismo $\phi_{R'} : R\otimes_R R' \to R'$, si factorizamos este homomorfismo tenemos

$$R\otimes_R R' \to \mathrm{Im}(\phi_{R'}) \to R'.$$

Como $\mathrm{Ker}(\phi_{R'})\otimes_{R'} G' = 0$ tenemos que

$$R\otimes_R R'\otimes_{R'} G' \to \mathrm{Im}(\phi_{R'})\otimes_{R'} G'$$

es un isomorfismo. Además teniendo que cuenta que G' es plano y que $\mathrm{Coker}(\phi_{R'})\otimes_{R'} G' = 0$ deducimos que

$$\mathrm{Im}(\phi_{R'})\otimes_{R'} G' \simeq R'\otimes_{R'} G'$$

por lo tanto tenemos un isomorfismo

$$R\otimes_R R'\otimes_{R'} G' \simeq R'\otimes_{R'} G'.$$

Como $R'\otimes_{R'} G' \simeq G'$ entonces deducimos que $R\otimes_R G' \simeq G'$ por lo tanto $G' \in R\text{-}\mathsf{DMod}$.

Sea ${}_{R'}M$ un módulo de $R'\text{-}\mathsf{DMod}$. Para este módulo podemos encontrar una sucesión exacta de la forma

$$G'^{(I)} \to G'^{(J)} \to M' \to 0$$

pero como $G' \in R$-DMod, deducimos que M' es cociente de un módulo de R-DMod módulo uno R-unitario, por lo tanto M' está en R-DMod.

($2 \Rightarrow 3$). Empecemos suponiendo que $\mathrm{Coker}(\phi_{R'})$ no es un R'-módulo por la derecha de torsión, sea X un conjunto, $\pi : X \to R'$ una aplicación tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R'.

Si $\mathrm{Coker}(\phi_{R'})$ no es de torsión, existirá una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\pi(x_1\cdots x_n) \notin RR'$ para todo n. Si consideramos el soporte $\sigma = (\!(x_n : n \in \mathbb{N})\!)$, el módulo asociado a él, será un módulo R-unitario, en particular

$$\langle \varnothing \rangle_\sigma \in R\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle$$

por lo que podremos encontrar $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{N}$ y $r_{k_1}, \cdots, r_{k_n} \in R$ tales que

$$\langle \varnothing \rangle_\sigma = \sum_{i=1}^{n} r_{k_i} \langle x_{k_i} \cdots x_1 \rangle_\sigma$$

por lo tanto si $k = \max\{k_1, \cdots, k_n\}$,

$$(\pi(x_1 \cdots x_k) - \sum_{i=1}^{n} r_{k_i} \pi(x_{k_i+1} \cdots x_k)) \langle x_k \cdots x_1 \rangle_\sigma$$

y de ahí deducimos que existe un $m \geq k$ tal que

$$\pi(x_1 \cdots x_m) = \sum_{i=1}^{n} r_{k_i} \pi(x_{k_i+1} \cdots x_m) \in RR'$$

lo cual contradice nuestra elección.

($3 \Rightarrow 1$). Sea $M_{R'} \in \mathsf{CMod}$-R', consideremos un conjunto X y una aplicación $\pi : X \to R$ tal que $\pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R, entonces $\alpha \circ \pi(X)$ es un conjunto T-generador por la derecha de R'. Si $m \in \mathbf{T}(M_R)$ entonces para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m\pi(x_1 \cdots x_{n_0}) = 0$, pero esto es lo mismo que decir que $m(\alpha \circ \pi)(x_1 \cdots x_{n_0}) = 0$ y por lo tanto $m \in \mathbf{T}(M_{R'}) = 0$. Hemos probado pues que M considerado como R-módulo es libre de torsión, o que $\mathrm{Ker}(\lambda_M) = 0$ siendo $\lambda_M : M \to \mathrm{Hom}_R(R, M)$ la multiplicación por elementos de R. Vamos ahora a ver que $\mathrm{Coker}(\lambda_M) = 0$. Consideremos un R-homomorfismo $h : R \to M$. A partir de este h vamos a definir $f : R \otimes_R R' \to M$ dado por $f(r \otimes r') = h(r)r'$. Éste es claramente un R'-homomorfismo.

Como $\mathrm{Ker}(\phi_{R'})$ es de torsión como R'-módulo, y M es libre de torsión, $\mathrm{Hom}_{R'}(\mathrm{Ker}(\phi_{R'}), M) = 0$ y podemos encontrar un R'-homomorfismo $g : RR' = \mathrm{Im}(\phi_{R'}) \to M$ tal que

$$f(r \otimes r') = g(rr') \quad \forall r \in R, r' \in R'$$

Utilizando ahora el hecho de que M es T-inyectivo como R'-módulo y que R'/RR' es de torsión como R'-módulo, podemos extender g a todo R' encontrando un $\overline{g} : R' \to M$ tal que $\overline{g}(rr') = g(rr')$ para todo $r \in R$,

$r' \in R'$. Pero ahora $\overline{g}$ es un R'-homomorfismo entre R' y M, por lo que podemos utilizar el hecho de que $M \in \mathsf{CMod}\text{-}R'$ y encontrar un elemento $m \in M$ tal que para todo $r' \in R'$, $\overline{g}(r') = mr'$. Entonces

$$h(r)r' = f(r \otimes r') = g(rr') = \overline{g}(rr') = mrr' \quad \forall r \in R, r' \in R'$$

pero como M es libre de torsión, $h(r) = mr$ para todo $r \in R$ y deducimos que $\mathrm{Coker}(\lambda_M) = 0$.

($1 \Rightarrow 3$). Sea $M_{R'} \in \mathsf{CMod}\text{-}R'$. Lo que tenemos que probar es que $\mathrm{Hom}_R(R, M) \simeq M$ con el homomorfismo λ_M. Como $M \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(R', M)$, la condición anterior es equivalente a que $\mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_{R'}(R', M)) \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(R', M)$, pero como $\mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_{R'}(R', M)) \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(R \otimes_R R', M)$ entonces nuestra condición es equivalente a que $\mathrm{Hom}_{R'}(\phi_{R'}, M)$ sea un isomorfismo. Utilizando la Proposición 7.4 deducimos que eso es equivalente a que $\phi_{R'}$ tenga núcleo y conúcleo de torsión como R'-módulo por la derecha, pero eso es precisamente lo que tenemos que probar para que α sea un homomorfismo permeable por la derecha de anillos. □

Definición 7.10. Sea $\alpha : R \to R'$ un homomorfismo permeable por la derecha de anillos. Vamos a denotar

$$\alpha\text{-}\mathsf{DMod} : R'\text{-}\mathsf{DMod} \to R\text{-}\mathsf{DMod} \quad \mathsf{CMod}\text{-}\alpha : \mathsf{CMod}\text{-}R' \to \mathsf{CMod}\text{-}R$$

a las restricciones de los correspondientes funtores inducidos por α.

Corolario 7.11. *Sean R,R' y R'' anillos, $\alpha : R \to R'$, $\alpha' : R' \to R''$ homomorfismos permeables por la derecha de anillos, entonces la composición $\alpha' \circ \alpha$ es un homomorfismo permeable por la derecha de anillos.*

Simétricamente, la composición de homomorfismos permeables por la izquierda de anillos es un homomorfismo permeable por la izquierda de anillos.

Demostración:
Sea $M \in R''\text{-}\mathsf{DMod}$. Si consideramos M como R'-módulo a través de α' obtenemos un módulo de $R'\text{-}\mathsf{DMod}$ por ser α' permeable por la derecha. Si consideramos ahora M como R-módulo a través de α obtenemos un módulo de $R\text{-}\mathsf{DMod}$ por ser α permeable por la derecha. Por lo tanto para todo módulo M de $R''\text{-}\mathsf{DMod}$, al considerarlo como R-módulo a través del homomorfismo de anillos $\alpha' \circ \alpha$ obtenemos un R-módulo que está en $R\text{-}\mathsf{DMod}$. Ésto prueba que $\alpha' \circ \alpha$ es permeable por la derecha. □

Éstos resultados nos permiten definir las categorías LPRng y RPRng que generalizan al caso de anillos sin uno la propiedad habitual de llevar el uno al uno en los homomorfismos entre anillos con identidad.

Definición 7.12.

1. Rng la categoría de anillos y homomorfismos entre ellos.

2. LPRng la categoría de anillos y homomorfismos permeable por la izquierda entre ellos.
3. RPRng la categoría de anillos y homomorfismos permeable por la derecha entre ellos.
4. Ring la categoría de anillos con identidad y los homomorfismos de anillos entre ellos que conservan la identidad.

NOTA 7.13. *Las categorías* LPRng *y* RPRng *son subcategorías de* Rng*, los correspondientes funtores de inclusión son fieles y representativos. La categoría* Ring *es una subcategoría plena y fiel de las categorías* LPRng *y* RPRng*.*

3. Teoría de Morita General

PROPOSICIÓN 7.14. *Sean R y R' dos anillos y sea $F : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R'$ una equivalencia de categorías. Consideremos un módulo $P_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ tal que $F(P) \simeq \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$. Entonces los funtores F y $\mathrm{Hom}_R(P_R, -)$ son equivalentes.*

Si $\beta : \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \to F(P_R)$ es el isomorfismo, denotaremos

$$K(\beta) : \mathrm{Hom}_R(P_R, -) \to F$$

a la equivalencia de funtores asociada.

El R-módulo por la derecha P_R tiene estructura de $\left(\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right), \mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right)\right)$-bimódulo. Esta estructura de $\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$-módulo por la izquierda induce una estructura de $\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$-módulo por la izquierda en $F(P_R)$ de forma que β es un isomorfismo de bimódulos.

Demostración:
Sea $C_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, entonces tenemos los siguientes isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_R(P_R, C_R) \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(F(P_R), F(C_R)) \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right), F(C_R)) \simeq F(C_R)$$

Vamos a ver cómo se definen cada uno de estos isomorfismos y a comprobar la naturalidad.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(P_R, C_R) & \to & \mathrm{Hom}_{R'}(F(P_R), F(C_R)) \\ h : P \to C & \mapsto & F(h) : F(P) \to F(C) \end{array}$$

Éste es claramente un isomorfismo por ser F una equivalencia de categorías.

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Hom}_{R'}(\beta, F(C)) : & \mathrm{Hom}_{R'}(F(P), F(C)) & \to & \mathrm{Hom}_{R'}(\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'\right), F(C)) \\ & g : F(P) \to F(C) & \mapsto & g \circ \beta \end{array}$$

Éste es un isomorfismo por ser β un isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{R'}(\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right), F(C_R)) & \to & F(C_R) \\ g : \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \to F(C_R) & \mapsto & g(1) \end{array}$$

Éste es un isomorfismo porque $F(C_R)$ es un $\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$-módulo unitario por propiedades generales de la localización.

La definición de $K(\beta)_C : \mathrm{Hom}_R(P_R, C_R) \to F(C_R)$ es pues $K(\beta)_C(h) = F(h)(\beta(1))$. Hemos visto que $K(\beta)_C$ es un isomorfismo, vamos a comprobar la naturalidad. Para ello supongamos que B_R y C_R son dos módulos de $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y que $g : B \to C$ es un R-homomorfismo entre ellos. Para comprobar la naturalidad tenemos que probar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(P_R, B_R) & \xrightarrow{K(\beta)_B} & F(B_R) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}_R(P_R,g)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle F(g)} \\
\mathrm{Hom}_R(P_R, C_R) & \xrightarrow[K(\beta)_C]{} & F(C_R)
\end{array}$$

Sea $h : P \to B$ un R-homomorfismo, entonces

$$F(g)(K(\beta)_B(h)) = F(g)(F(h)(\beta(1))) = F(g \circ h)(\beta(1)) =$$

$$K(\beta)_C(g \circ h) = K(\beta)_C(\mathrm{Hom}_R(P_R, g)(h)).$$

Para ver la estructura de bimódulo de P_R realmente es mejor empezar viendo la estructura de $F(P_R)$. Como β es un isomorfismo, podemos definir para todo $a' \in \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$ y todo $\overline{p} \in F(P_R)$, definiremos $a'\overline{p} = \beta(a'\beta^{-1}(\overline{p}))$. De esta forma β se convierte en un homomorfismo de módulos por la izquierda. Sean $a', b' \in \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$ y $\overline{p} \in F(P)$, entonces

$$(a'\overline{p})b' = \beta(a'\beta^{-1}(\overline{p}))b' =$$

$$\beta(a'\beta^{-1}(\overline{p}b')) = a'(\overline{p}b')$$

aplicando que β es un $\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$-homomorfismo de módulos por la derecha. Por lo tanto $F(P)$ es un bimódulo tal y como hemos afirmado anteriormente.

Para ver la estructura de $\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$-módulo por la izquierda de P, sea $a' \in \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$ y consideremos $L(a') : F(P_R) \to F(P_R)$ la multiplicación por la izquierda por a', entonces existe un único R-homomorfismo que denotaremos $\hat{L}(a') : P_R \to P_R$ tal que $F(\hat{L}(a')) = L(a')$. Entonces definiremos $a'p = \hat{L}(a')(p)$ para todo $p \in P$. Con esta estructura se comprueba sin dificultad que P es un bimódulo. $\square$

Proposición 7.15. *Sea $F : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R'$ una equivalencia de categorías y ${}_{R'}P_R$ un (R', R)-bimódulo tal que $P_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$. Entonces si existe una equivalencia de funtores $\alpha : \mathrm{Hom}_R(P_R, -) \to F$, tenemos un isomorfismo que denotaremos $K^{-1}(\alpha) : \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \to F(P_R)$. Éste isomorfismo es un isomorfismo de bimódulos.*

Además se cumple que $K(K^{-1}(\alpha)) = \alpha$ y para todo isomorfismo $\beta : \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \to F(P_R)$, $K^{-1}(K(\beta)) = \beta$.

Demostración:
Como F es una equivalencia de categorías, en particular es un funtor representativo, por lo que podremos encontrar un R-módulo $Q_R \in$ $\mathsf{CMod}\text{-}R$ tal que $\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \simeq F(Q_R)$. Denotaremos por $\gamma : \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \to$ $F(Q_R)$ a dicho isomorfismo.

Tenemos pues el siguiente isomorfismo

$$\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \xrightarrow{\ \gamma\ } F(Q_R) \xrightarrow{\alpha_Q^{-1}} \mathrm{Hom}_R(P_R, Q_R).$$

Tomemos $h = \alpha_Q^{-1}(\gamma(1)) : P \to Q$. Vamos a ver que h es un homomorfismo de bimódulos, para ello tomemos $a' \in \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$ y consideremos $L(a') : Q \to Q$ la multiplicación por la izquierda por a'. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(Q) & \xrightarrow{\alpha_Q^{-1}} & \mathrm{Hom}_R(P_R, Q_R) \\ {\scriptstyle F(L(a'))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_R(P, L(a'))} \\ F(Q) & \xrightarrow[\alpha_Q^{-1}]{} & \mathrm{Hom}_R(P_R, Q_R) \end{array}$$

Si aplicamos la conmutatividad de este diagrama a un elemento $\overline{q} \in$ $F(Q)$ tenemos

$$\alpha_Q(a'\overline{q}) = L(a') \circ \alpha_Q(\overline{q}) = a'\alpha_Q(\overline{q})$$

por lo tanto α_Q es un homomorfismo de bimódulos. En la Proposición 7.14 vimos que γ también es un homomorfismo de bimódulos, por lo tanto

$$h(a'p) = \alpha_Q^{-1}(\gamma(1))(a'p) = \alpha_Q^{-1}(\gamma(a'))(p) =$$
$$\alpha_Q^{-1}(a'\gamma(1))(p) = a'\alpha_Q^{-1}(a'\gamma(1))(p) = a'h(p)$$

para todo $p \in P$.

Vamos a probar que $\mathrm{Hom}_R(h, -)$ es una equivalencia entre los funtores $\mathrm{Hom}_R(Q_R, -)$ y $\mathrm{Hom}_R(P_R, -)$ viendo que es igual a $\alpha^{-1} \circ K(\gamma)$ que sabemos que es una equivalencia por ser composición de dos equivalencias.

Sea $C_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ y sea $g : Q_R \to C_R$, entonces

$$\alpha_C^{-1} \circ K(\gamma)_C(g) = (\alpha_C^{-1} \circ F(g))(\gamma(1)) = \text{Por la naturalidad de } \alpha^{-1}$$

$$(\mathrm{Hom}_R(P_R, g) \circ \alpha_Q^{-1})(\gamma(1)) = \mathrm{Hom}_R(P_R, g)(h) = g \circ h = \mathrm{Hom}_R(h, C)(g).$$

Una vez probado que $\mathrm{Hom}_R(h, C)$ es un isomorfismo para todo $C \in$ $\mathsf{CMod}\text{-}R$, podemos aplicar la Proposición 7.4 y deducir que h tiene núcleo y conúcleo de torsión, pero como P_R y Q_R están en $\mathsf{CMod}\text{-}R$, deducimos que h es un isomorfismo.

Si h es un isomorfismo, entonces $F(h) : F(P_R) \to F(Q_R)$ es un isomorfismo y por lo tanto $F(h)^{-1} \circ \gamma : \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \to F(P_R)$ es un isomorfismo. Además es un isomorfismo de bimódulos por ser h también un isomorfismo de bimódulos y ser la estructura de bimódulos compatible con el funtor F. Éste isomorfismo es precisamente el que denotaremos $K^{-1}(\alpha)$, es decir,

$$K^{-1}(\alpha) = F(\alpha_Q^{-1}(\gamma(1)))^{-1} \circ \gamma.$$

Vamos a probar que este isomorfismo es independiente de la elección de Q_R. Supongamos que tenemos otro módulo $\overline{Q}_R$ junto con un isomorfismo

$$\overline{\gamma} : \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \to F(\overline{Q}_R).$$

Entonces tenemos un isomorfismo $\overline{\gamma} \circ \gamma^{-1} : F(Q_R) \to F(\overline{Q}_R)$. Como F es una equivalencia, podemos tomar $\delta : Q_R \to \overline{Q}_R$ un isomorfismo tal que $F(\delta) = \overline{\gamma} \circ \gamma^{-1}$, por lo tanto tenemos que $\overline{\gamma} = F(\delta) \circ \gamma$.

La naturalidad de α^{-1} nos da la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(Q_R) & \xrightarrow{\alpha_Q^{-1}} & \mathrm{Hom}_R(P_R, Q_R) \\ {\scriptstyle F(\delta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_R(P_R,\delta)} \\ F(\overline{Q}_R) & \xrightarrow{\alpha_{\overline{Q}}^{-1}} & \mathrm{Hom}_R(P_R, \overline{Q}_R). \end{array}$$

Utilizando esta conmutatividad con el elemento $\gamma(1) \in F(Q_R)$ junto con la igualdad $\overline{\gamma} = F(\delta) \circ \gamma$ deducimos que

$$\alpha_{\overline{Q}}^{-1}(\overline{\gamma}(1)) = \delta \circ (\alpha_Q^{-1}(\gamma(1))).$$

Por lo tanto

$$F(\alpha_{\overline{Q}}^{-1}(\overline{\gamma}(1)))^{-1} \circ \overline{\gamma} = F(\alpha_Q^{-1}(\gamma(1)))^{-1} \circ F(\delta)^{-1} \circ \overline{\gamma} =$$

$$F(\alpha_Q^{-1}(\gamma(1)))^{-1} \circ F(\delta)^{-1} \circ F(\delta) \circ \gamma = F(\alpha_Q^{-1}(\gamma(1)))^{-1} \circ \gamma.$$

Lo que prueba la independencia de la elección de Q. Si aplicamos esta independencia y ponemos como módulo el propio P_R obtenemos la relación

$$K^{-1}(\alpha) = F(\alpha_P^{-1}(K^{-1}(\alpha)(1)))^{-1} \circ K^{-1}(\alpha)$$

por lo tanto $K^{-1}(\alpha)(1) = \alpha_P(\mathrm{id}_P)$.

Vamos por último a probar que K y K^{-1} son operaciones inversas la una de la otra. Sea $h : P_R \to C_R$ un homomorfismo en $\mathsf{CMod}\text{-}R$, entonces

$$K(K^{-1}(\alpha))_C(h) = F(h)(K^{-1}(\alpha)(1)) = F(h)(\alpha_P(\mathrm{id}_P)) == \alpha_C(h)$$

siendo esta última igualdad consecuencia de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(P_R, P_R) & \xrightarrow{\alpha_P} & F(P_R) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_R(P_R,h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(h)} \\ \mathrm{Hom}_R(P_R, C_R) & \xrightarrow{\alpha_P} & F(C_R). \end{array}$$

En el otro sentido, como $K(\beta)_P(\mathrm{id}_P) = F(\mathrm{id}_P)(\beta(1)) = \beta(1)$ entonces $K(\beta)_P^{-1}(\beta(1)) = \mathrm{id}_P$, por lo tanto

$$K^{-1}(K(\beta)) = F(K(\beta)_P^{-1}(\beta(1)))^{-1} \circ \beta = F(\mathrm{id}_P)^{-1} \circ \beta = \beta.$$

□

COROLARIO 7.16. *Sean R y R' anillos, $F : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R'$ una equivalencia de categorías y ${}_{R'}P_R$ y ${}_{R'}Q_R$ dos bimódulos tales que $P_R, Q_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ y tales que*

$$\mathrm{Hom}_R(P_R, -) \equiv F \equiv \mathrm{Hom}_R(Q_R, -)$$

entonces $P_R \simeq Q_R$.

Demostración:
Sabemos por la Proposición 7.15 que existe un isomorfismo entre $F(P_R)$ y $F(Q_R)$ (ambos son isomorfos a $\mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right)$, pero como F es una equivalencia, eso implica que P_R es isomorfo a Q_R).

Notemos que a lo largo de la Proposición 7.15, el isomorfismo que encontramos entre P_R y Q_R es precisamente $h = \alpha_Q^{-1}(\gamma(1))$ donde $\gamma : \mathbf{C}'\left({}^{\mathbb{Z}\times}R'_{R'}\right) \to F(Q_R)$ es el isomorfismo y $\alpha : \mathrm{Hom}_R(P_R, -) \to F$ es la equivalencia de funtores. □

PROPOSICIÓN 7.17. *Sean R y R' dos anillos y sea $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ una equivalencia tal que F es un funtor extensible, entonces existe un bimódulo ${}_{R'}P_R$ tal que $P_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, y una equivalencia de funtores $F \simeq P \otimes_R -$.*

Demostración:
No hay mas que tomar como P el bimódulo $\mathbb{C}\,(F)$ y aplicar los resultados del tema anterior. □

PROPOSICIÓN 7.18. *Sean R y R' dos anillos y sean ${}_{R'}P_R$ y ${}_{R'}Q_R$ dos (R', R)-bimódulos con $P_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ y $Q_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ y tales que $P_R \otimes_R -$ y $Q_R \otimes_R -$ son equivalencias entre $R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $R'\text{-}\mathsf{DMod}$ para las cuales existe una equivalencia de funtores $\alpha : P_R \otimes_R - \to Q_R \otimes_R -$, entonces P_R y Q_R son isomorfos.*

Demostración:
Los isomorfismos son los dados en el Corolario 6.50 y en la Proposición 6.30.

$$P_R \simeq \mathbf{C}\,(P_R) \simeq \mathbb{C}\,(P \otimes_R -) \simeq$$
$$\mathbb{C}\,(Q \otimes_R -) \simeq \mathbf{C}\,(Q_R) \simeq Q_R$$

□

DEFINICIÓN 7.19. Sean R y R' dos anillos. Una equivalencia $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ diremos que es extensible si F y F^{-1} son extensibles como funtores.

TEOREMA 7.20. *Sean R y R' dos anillos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Las categorías* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{CMod}\text{-}R'$ *son equivalentes.*
2. *Las categorías* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *y* $R'\text{-}\mathsf{DMod}$ *son equivalentes con una equivalencia extensible.*

Si se cumple alguna de las dos propiedades equivalentes anteriores existen bimódulos ${}_{R'}P_R$ y ${}_RQ_{R'}$ permeables por la derecha con sus correspondientes estructuras tales que los funtores que proporcionan las equivalencias son equivalentes a los siguientes

$$\mathrm{Hom}_R(P_R, -) : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R'$$
$$\mathrm{Hom}_{R'}(Q_{R'}, -) : \mathsf{CMod}\text{-}R' \to \mathsf{CMod}\text{-}R$$
$$P \otimes_R - : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$$
$$Q \otimes_{R'} - : R'\text{-}\mathsf{DMod} \to R\text{-}\mathsf{DMod}$$

Demostración:
$(1 \Rightarrow 2)$. Utilizando la Proposición 7.14 y la Proposición 7.5 podemos suponer que las equivalencias vienen dadas por funtores de la forma

$$\mathrm{Hom}_R(P_R, -) : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R'$$
$$\mathrm{Hom}_{R'}(Q_{R'}, -) : \mathsf{CMod}\text{-}R' \to \mathsf{CMod}\text{-}R$$

donde ${}_{R'}P_R$ es un (R', R)-bimódulo permeable por la derecha y ${}_RQ_{R'}$ es un (R, R')-bimódulo permeable por la derecha con $P_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ y $Q_{R'} \in \mathsf{CMod}\text{-}R'$. Entonces tenemos las siguientes equivalencias de funtores

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right), -) \simeq \mathrm{Id}_{\mathsf{CMod}\text{-}R} \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(Q_{R'}, \mathrm{Hom}_R(P_R, -))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_R(Q \otimes_{R'} P, -) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}\left(Q \otimes_{R'} P\right), -)$$

La última equivalencia se deduce de la Proposición 7.6.

Como $\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right)$ y $\mathbf{C}\left(Q \otimes_{R'} P\right)$ están en $\mathsf{CMod}\text{-}R$, utilizando el Corolario 7.16 deducimos que han de ser isomorfos.

Este isomorfismo induce una equivalencia entre los funtores

$$\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right) \otimes_R -, \mathbf{C}\left(Q \otimes_{R'} P\right) \otimes_R - : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R\text{-}\mathsf{DMod}$$

con lo cual, como funtores entre R-DMod y R-DMod tenemos las siguientes equivalencias de funtores

$$\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}} \simeq {}^{\mathbb{Z}\times}R \otimes_R - \simeq \mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right) \otimes_R - \simeq$$
$$\mathbf{C}\left(Q \otimes_{R'} P\right) \otimes_R - \simeq Q \otimes_{R'} P \otimes_R - \simeq (Q \otimes_{R'} -) \circ (P \otimes_R -)$$

Como Q y P son bimódulos permeables, $P \otimes_R -$ es un funtor entre R-DMod y R'-DMod y $Q \otimes_{R'} -$ es un funtor entre R'-DMod y R-DMod. Además hemos probado que $(Q \otimes_{R'} -) \circ (P \otimes_R -)$ es equivalente al funtor identidad de R-DMod.

De forma simétrica se prueba que $(P \otimes_R -) \circ (Q \otimes_{R'} -)$ es equivalente al funtor $\mathrm{Id}_{R'\text{-}\mathsf{DMod}}$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Utilizando el Teorema 6.44 y la Proposición 7.5 sabemos que las equivalencias vienen dadas por unos funtores de la forma

$$P \otimes_R - : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$$
$$Q \otimes_{R'} - : R'\text{-}\mathsf{DMod} \to R\text{-}\mathsf{DMod}$$

donde ${}_{R'}P_R$ es un (R', R)-bimódulo permeable por la derecha y ${}_RQ_{R'}$ es un (R, R')-bimódulo permeable por la derecha con $P_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$ y $Q_{R'} \in \mathsf{CMod}\text{-}R'$. Entonces tenemos las siguientes equivalencias de funtores

$$\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right) \otimes_R - \simeq {}^{\mathbb{Z}\times}R \otimes_R - \simeq \mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}} \simeq$$
$$(Q \otimes_{R'} -) \circ (P \otimes_R -) \simeq Q \otimes_{R'} P \otimes_R - \simeq \mathbf{C}\left(Q \otimes_{R'} P\right) \otimes_R -$$

y utilizando la Proposición 7.18, podemos asegurar que $\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right)$ y $\mathbf{C}\left(Q \otimes_{R'} P\right)$ son isomorfos, por lo tanto tenemos una equivalencia entre los funtores $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right), -)$ y $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}\left(Q \otimes_{R'} P\right), -)$ considerados como funtores entre $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $\mathsf{CMod}\text{-}R$. Por lo tanto

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{CMod}\text{-}R} \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}\left({}^{\mathbb{Z}\times}R_R\right), -) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}\left(Q \otimes_{R'} P\right), -) \simeq$$
$$\mathrm{Hom}_R(Q \otimes_{R'} P, -) \simeq \mathrm{Hom}_{R'}(Q_{R'}, \mathrm{Hom}_R(P_R, -)).$$

Simétricamente se prueba que

$$\mathrm{Hom}_R(P_R, -) \circ \mathrm{Hom}_{R'}(Q_{R'}, -) \simeq \mathrm{Id}_{\mathsf{CMod}\text{-}R'}$$

por lo tanto deducimos que los funtores $\mathrm{Hom}_R(P_R, -)$ y $\mathrm{Hom}_{R'}(Q_{R'}, -)$ nos inducen equivalencias de categorías entre $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $\mathsf{CMod}\text{-}R'$. □

Definición 7.21. Sean R y R' dos anillos. Denotaremos

$$\mathsf{Pic}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$$

la categoría de los funtores entre $R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $R'\text{-}\mathsf{DMod}$ que proporcionan equivalencias junto con las transformaciones naturales entre ellos. También denotaremos

$$\mathsf{Pic}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$$

a la subcategoría de la anterior formada por las equivalencias extensibles. Por último denotaremos

$$\mathsf{Pic}(\mathsf{CMod}\text{-}R, \mathsf{CMod}\text{-}R')$$

a la categoría de funtores entre $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $\mathsf{CMod}\text{-}R'$ que proporcionan equivalencias.

En términos de éstas categorías, el Teorema 7.20 nos dice que existe una equivalencia entre las categorías

$$\mathsf{Pic}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod}) \to \mathsf{Pic}(\mathsf{CMod}\text{-}R, \mathsf{CMod}\text{-}R')$$

pasando a través de la correspondiente subcategoría de $\mathsf{Perm}\text{-}\,(R', R)$

Extendiendo las definiciones que hemos hecho para las categorías por el otro lado podemos obtener un resultado simétrico al Teorema 7.20, lo cual nos permite obtener la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 7.22. *Sean R y R' anillos. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen equivalencias de categorías*

$$F : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R'$$

$$G : \mathsf{DMod}\text{-}R \to \mathsf{DMod}\text{-}R'$$

donde G es una equivalencia extensible.

2. *Existen equivalencias de categorías*

$$\overline{F} : R\text{-}\mathsf{CMod} \to R'\text{-}\mathsf{CMod}$$

$$\overline{G} : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$$

donde $\overline{G}$ es una equivalencia extensible.

Demostración:
($1 \Rightarrow 2$). De la equivalencia entre $\mathsf{CMod}\text{-}R$ y $\mathsf{CMod}\text{-}R'$ podemos deducir la existencia de una equivalencia extensible entre $R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $R'\text{-}\mathsf{DMod}$ por el teorema anterior. A partir de la equivalencia extensible entre $\mathsf{DMod}\text{-}R$ y $\mathsf{DMod}\text{-}R'$, utilizando un resultado simétrico al del teorema anterior, podemos deducir la equivalencia entre las categorías $R\text{-}\mathsf{CMod}$ y $R'\text{-}\mathsf{CMod}$.

($2 \Rightarrow 1$). Es simétrica de la implicación anterior. □

DEFINICIÓN 7.23. Sean R y R' dos anillos. Diremos que son Morita-equivalentes si se cumple alguna (y por tanto las dos) de las condiciones de la Proposición 7.22.

Esta definición de equivalencia de Morita generaliza la de equivalencia de Morita para anillos con identidad. Veremos mas adelante que también generaliza la definición de equivalencia de Morita para anillos idempotentes.

4. Anillos que Cumplen la Propiedad de la Equivalencia por la Derecha

Sea R un anillo y sea $M_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, entonces tenemos un homomorfismo canónico $\nu_M : \mathbf{I_D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C}(M_R) \to \mathbf{I_C}(M_R)$. Si aplicamos $\mathbf{C}$ obtenemos

$$\mathbf{C}\left(\nu_M\right) : \mathbf{C} \circ \mathbf{I_D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} M_R \to \mathbf{C} \circ \mathbf{I_C}(M_R)$$

pero como $M_R \in \mathsf{CMod}\text{-}R$, tenemos un isomorfismo natural entre M_R y $\mathbf{C} \circ \mathbf{I_C}(M_R)$ que si componemos con el anterior nos induce una transformación natural que denotaremos

$$\alpha : \mathbf{C} \circ \mathbf{I_D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \to \mathrm{Id}_{\mathsf{CMod}\text{-}R}$$

Similarmente, si partimos de un $N_R \in \mathsf{DMod}\text{-}R$, tenemos un homomorfismo canónico $\iota_N : \mathbf{I_D}(N_R) \to \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{I_D}(N_R)$. Si aplicamos el funtor $\mathbf{D}$ obtenemos

$$\mathbf{D}\left(\iota_N\right) : \mathbf{D} \circ \mathbf{I_D}(N_R) \to \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{I_D}(N_R)$$

y utilizando el isomorfismo natural entre N_R y $\mathbf{D} \circ \mathbf{I_D}(N_R)$ obtenemos una transformación natural

$$\beta : \mathrm{Id}_{\mathsf{DMod}\text{-}R} \to \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{I_D}.$$

Definición 7.24. Sea R un anillo. Diremos que R cumple la propiedad de la equivalencia por la derecha si las transformaciones naturales categorías R-DMod y R-CMod son equivalentes

$$\alpha : \mathbf{C} \circ \mathbf{I_D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \to \mathrm{Id}_{\mathsf{CMod}\text{-}R}$$

$$\beta : \mathrm{Id}_{\mathsf{DMod}\text{-}R} \to \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{I_D}.$$

son isomorfismos.

Ejemplo 7.25.

1. Si R es un anillo idempotente, entonces R cumple la propiedad de la equivalencia por los dos lados.
2. Si R es un anillo con un generador central, entonces R cumple la propiedad de la equivalencia por los dos lados.

Demostración:
Ésta demostración se puede ver en [**24**, Proposition 2.7] y [**24**, Proposition 2.9]. Para ver una demostración de (1) mas detallada, se puede ver [**25**, Theorem 2.45]. □

5. Anillos Tratables por la Derecha

Definición 7.26. Diremos que un anillo R es tratable por la derecha, si para todo anillo R', $\mathsf{Pic}_e(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod}) = \mathsf{Pic}(R\text{-}\mathsf{DMod}, R'\text{-}\mathsf{DMod})$.

Nota 7.27. *Sea R un anillo tal que para todo anillo con identidad A', cualquier funtor $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$ que conserve límites directos es extensible, entonces R es tratable por la derecha.*

Demostración:
Sea $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$ una equivalencia. Entonces F es un funtor extensible si y solo si $\mathbf{I'_D} \circ F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to {}^{\mathbb{Z}\times}R'\text{-}\mathsf{Mod}$ es un funtor extensible, pero como F conserva límites directos (por ser una equivalencia) y $\mathbf{I'_D}$ también lo hace, entonces $\mathbf{I'_D} \circ F$ es un funtor que conserva límites directos y por lo tanto es un funtor extensible. □

Ejemplo 7.28. Si existe un conjunto finito X junto con una aplicación $\pi : X \to R$ tal que $\pi(X)$ sea un conjunto T-generador por la derecha de R, entonces R cumple la condición de la Nota 7.27 y por lo tanto es tratable por la derecha.

Demostración:
Se vió en el Ejemplo 6.2. □

EJEMPLO 7.29. Sea R un anillo que cumple la propiedad de la equivalencia por la derecha con la Definición 7.24, entonces R cumple la consición de la Nota 7.27 y por lo tanto es tratable por la derecha.

Demostración:
Sea A' un anillo con identidad y sea $F : R\text{-}\mathsf{DMod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$ un funtor que conserve límites directos, entonces

$$F \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C} : R\text{-}\mathsf{MOD} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$$

conserva límites directos ya que $\mathbf{D} \circ \mathbf{I_C}$ es una equivalencia y $\mathbf{C}$ conserva límites directos porque tiene un adjunto por la izquierda. El funtor

$$F \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C} : {}^{\mathbb{Z}\times}R\text{-}\mathsf{Mod} \to A'\text{-}\mathsf{Mod}$$

es un funtor entre categorías de módulos unitarios para anillos con identidad que conserva límites directos, por lo tanto tenemos un (A', R)-bimódulo, ${}_{A'}P_R$, tal que

$$F \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C}(M) \simeq P \otimes_R M$$

para todo ${}_RM \in R\text{-}\mathsf{MOD}$.

Entonces para todo ${}_RM \in R\text{-}\mathsf{DMod}$ tenemos que

$$F({}_RM) \simeq {}^2 F \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{I_C} \circ \mathbf{C} \circ \mathbf{I_D}(M) \simeq P \otimes_R \mathbf{I_D}(M) = P \otimes_R M$$

por lo tanto F es un funtor extensible. $\square$

DEFINICIÓN 7.30. Sea R un anillo. Tal y como se define en [**10**], diremos que R es un anillo xst por la derecha, si todo submódulo de un R-módulo unitario por la derecha es unitario por la derecha. Diremos que es xst si lo es por ambos lados con la definición correspondiente.

PROPOSICIÓN 7.31. *Todos los anillos xst cumplen la condición de la Nota 7.27 y por lo tanto son tratables por la derecha. Como la condición es ser xst es simétrica, deducimos que también son tratables por la izquierda.*

Demostración:
Sea M_R un R-módulo unitario. Entonces $M_R \otimes_R R$ es unitario y por lo tanto $\mathrm{Ker}(\mu_M)$ es unitario por ser R xst por la derecha. Pero como $\mathrm{Ker}(\mu_M)R = 0$ deducimos que M_R está en R-DMod. Ésto prueba que R-DMod es precisamente la categoría de módulos unitarios. Para esta categoría, tal y como se prueba en [**10**, Proposition 7] existe un anillo idempotente $S \subseteq R$ tal que $R\text{-}\mathsf{DMod} = S\text{-}\mathsf{DMod}$ con la correspondiente identificación. Entonces como todo funtor entre S-DMod y A'-Mod que conserve límites directos es extensible por ser S idempotente, deducimos que también es cierta esta propiedad para los funtore entre R-DMod y A'-Mod que conserven límites directos. $\square$

[2] Por la equivalencia de categorías

6. Teoría de Morita para Anillos Tratables

Una vez que tenemos las condiciones de anillos tratables es fácil ver una teoría de Morita simétrica para este tipo de anillos:

TEOREMA 7.32. *Sean R y R' dos anillos tratables por la derecha. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Las categorías* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{CMod}\text{-}R'$ *son equivalentes.*
2. *Las categorías* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *y* $R'\text{-}\mathsf{DMod}$ *son equivalentes.*

Si se cumple alguna de las dos propiedades equivalentes anteriores existen bimódulos ${}_{R'}P_R$ y ${}_RQ_{R'}$ permeables por la derecha con sus correspondientes estructuras tales que los funtores que proporcionan las equivalencias son equivalentes a los siguientes

$$\mathrm{Hom}_R(P_R, -) : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R'$$

$$\mathrm{Hom}_{R'}(Q_{R'}, -) : \mathsf{CMod}\text{-}R' \to \mathsf{CMod}\text{-}R$$

$$P \otimes_R - : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}$$

$$Q \otimes_{R'} - : R'\text{-}\mathsf{DMod} \to R\text{-}\mathsf{DMod}$$

Demostración:
La demostración se sigue inmediatamente del Teorema 7.20 teniendo en cuenta que al ser R y R' dos anillos tratables por la derecha, todas las equivalencias entre las categorías R-DMod y R'-DMod son extensibles.
□

PROPOSICIÓN 7.33. *Sean R y R' anillos tratables por ambos lados. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen equivalencias de categorías*

$$F : \mathsf{CMod}\text{-}R \to \mathsf{CMod}\text{-}R'$$

$$G : \mathsf{DMod}\text{-}R \to \mathsf{DMod}\text{-}R'.$$

2. *Existen equivalencias de categorías*

$$\overline{F} : R\text{-}\mathsf{CMod} \to R'\text{-}\mathsf{CMod}$$

$$\overline{G} : R\text{-}\mathsf{DMod} \to R'\text{-}\mathsf{DMod}.$$

Demostración:
Se deduce inmediatamente de la Proposición 7.33. □

Tal y como vimos en la Definición 7.23, si dos anillos las condiciones de la Proposición 7.33, diremos que son Morita-equivalentes. El caso de los anillos idempotentes es un caso particular de éste ya que los anillos idempotentes, por cumplir la propiedad de la equivalencia tanto por la derecha como por la izquierda, son también tratables por ambos lados. Vamos a ver que para éste tipo de anillos podemos profundizar algo mas.

Proposición 7.34. *Sean R y R' dos anillos que cumplen la condición de la equivalencia por la derecha y por la izquierda, entonces son equivalentes:*

1. *R y R' son Morita-equivalentes.*
2. *Las categorías* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{CMod}\text{-}R'$ *son equivalentes.*
3. *Las categorías* $\mathsf{DMod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{DMod}\text{-}R'$ *son equivalentes.*
4. *Las categorías* $R\text{-}\mathsf{CMod}$ *y* $R'\text{-}\mathsf{CMod}$ *son equivalentes.*
5. *Las categorías* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *y* $R'\text{-}\mathsf{DMod}$ *son equivalentes.*

Demostración:
($2 \Leftrightarrow 3$) Se utiliza la equivalencia entre las categorías $\mathsf{CMod}\text{-}R \simeq \mathsf{DMod}\text{-}R$ y $\mathsf{CMod}\text{-}R' \simeq \mathsf{DMod}\text{-}R'$.

($2 \Leftrightarrow 4$) Se utiliza el Teorema 7.32.

($3 \Leftrightarrow 5$) Se utiliza el simétrico del Teorema 7.32.

($4 \Leftrightarrow 5$) Se utiliza la equivalencia entre las categorías $R\text{-}\mathsf{CMod} \simeq R\text{-}\mathsf{DMod}$ y $R'\text{-}\mathsf{CMod} \simeq R'\text{-}\mathsf{DMod}$.

La conexión con la condición (1) es trivial. □

Nota 7.35. *La demostración de la proposición anterior muestra que se puede simplificar levemente las hipótesis y decir que si R y R' cumplen la propiedad de la equivalencia por un lado y son tratables por el otro, entonces todas las condiciones de la proposición anterior son equivalentes.*

Si los anillos son idempotentes, se pueden poner dos nuevas condiciones equivalentes. Para ello recordemos la siguiente definición:

Definición 7.36. Sea R un anillo. Denotaremos $\mathsf{Mod}\text{-}R$ como la subcategoría plena de $\mathsf{MOD}\text{-}R$ formada por los módulos M tales que $MR = M$ y $\mathbf{t}\,(M_R) = 0$. Simétricamente denotaremos $R\text{-}\mathsf{Mod}$ como la subcategoría plena de $R\text{-}\mathsf{MOD}$ formada por los módulos M tales que $RM = M$ y $\mathbf{t}\,({}_RM) = 0$.

Nota 7.37. *Si R es un anillo idempotente, entonces las categorías* $\mathsf{CMod}\text{-}R$, $\mathsf{Mod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{DMod}\text{-}R$ *son equivalentes. También las categorías* $R\text{-}\mathsf{CMod}$, $R\text{-}\mathsf{Mod}$ *y* $R\text{-}\mathsf{DMod}$ *son equivalentes.*

Demostración:
Una demostración de este hecho se puede ver por ejemplo en [**24**, Proposition 2.7]. □

A partir de este hecho podemos deducir lo siguiente

Proposición 7.38. *Sean R y R' dos anillos idempotentes. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R y R' son Morita-equivalentes.*
2. *Las categorías* $\mathsf{CMod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{CMod}\text{-}R'$ *son equivalentes.*
3. *Las categorías* $\mathsf{Mod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{Mod}\text{-}R'$ *son equivalentes.*
4. *Las categorías* $\mathsf{DMod}\text{-}R$ *y* $\mathsf{DMod}\text{-}R'$ *son equivalentes.*
5. *Las categorías* $R\text{-}\mathsf{CMod}$ *y* $R'\text{-}\mathsf{CMod}$ *son equivalentes.*

6. *Las categorías* R-Mod *y* R'-Mod *son equivalentes.*
7. *Las categorías* R-DMod *y* R'-DMod *son equivalentes.*

Demostración:
Se deduce inmediatamente de la Proposición 7.34 y de la nota anterior.

□

TEMA 8

Casos Particulares y Contraejemplos

1. Contraejemplos Sobre el Funtor D

En esta sección vamos a estudiar el caso particular del anillo $2\mathbb{Z}$ de los números enteros pares. A pesar de su simplicidad, éste anillo nos va a proporcionar un ejemplo de un anillo R para el cual la categoría $\mathsf{DMod}\text{-}R$ no es coGiraud. También nos proporcionará un contraejemplo relativo a la construcción del funtor $\mathbf{D}$.

Definición 8.1. Denotaremos

$$\mathbb{Q}_2 = \{r/s \in \mathbb{Q} : s = 2^t \text{ con } t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Dentro de este $2\mathbb{Z}$-módulo podemos considerar a $2\mathbb{Z}$ con la identificación $2z = 2z/2^0 \in \mathbb{Q}_2$. Denotaremos

$$M = \mathbb{Q}_2/2\mathbb{Z}.$$

Denotaremos por último

$$L = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_2/2^n\mathbb{Z}$$

donde éste límite inverso está calculado con los homomorfismos canónicos

$$\begin{array}{cccc} \phi_{mn}: & \mathbb{Q}_2/2^m\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q}_2/2^n\mathbb{Z} \\ & r/s + 2^m\mathbb{Z} & \mapsto & r/s + 2^n\mathbb{Z} \end{array}$$

para todo $m \geq n$.

Vamos a ver una forma especial de ver los elementos de $\mathbb{Q}_2/2^n\mathbb{Z}$. Sea $r/2^k + 2^n\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}_2/2^n\mathbb{Z}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r \geq 0$ ya que si no podemos sumar a $r/2^k$ un elemento apropidado de $2^n\mathbb{Z}$ con el que obtengamos un número positivo. El número r lo vamos a escribir en base 2 como

$$r = \epsilon_0 + \epsilon_1 2 + \cdots + \epsilon_t 2^t$$

por lo tanto $r/2^k$ se puede escribir como

$$r/2^k = \sum_{i=-k}^{t-k} \epsilon_{i+k} 2^i$$

con $\epsilon_j \in \{0, 1\}$. Vamos a denotar

$$\mathbb{E} = \{(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \lim_{t\to-\infty} \epsilon_t = 0\}$$

o dicho con otras palabras, las sucesiones de ceros y unos sobre el conjunto de índices de los números enteros tales que eventualmente se hacen constantemente cero cuando se tiende hacia $-\infty$.

Tal y como acabamos de probar, para todo elemento de $\mathbb{Q}_2/2^n\mathbb{Z}$ existe un $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$ tal que dicho elemento se puede escribir como

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z}$$

teniendo en cuenta que esta suma es eventualemente finita ya que para todo $t \geq n$ se tiene que $\epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z} = 0$ y $\lim_{t\to-\infty} \epsilon_t = 0$.

Supongamos que tenemos dos representaciones $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}, (\delta_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$ del mismo elemento de $\mathbb{Q}_2/2^n\mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} (\epsilon_t - \delta_t)2^t + 2^n\mathbb{Z} = 0.$$

Como $\epsilon_t - \delta_t \in \{-1, 0, 1\}$ para todo t entonces deducimos que para todo $t < n$, $\epsilon_t = \delta_t$.

Proposición 8.2. *Sea $l \in L$, entonces existe un único $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, la proyección de l en $\mathbb{Q}_2/2^n\mathbb{Z}$ que denotaremos l_n, se tiene que*

$$l_n = \sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z}.$$

Demostración:
Para cada $l_n \in \mathbb{Q}_2/2^n\mathbb{Z}$ podemos encontrar una sucesión

$$(\delta_t^n)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$$

tal que $l_n = \sum_{t\in\mathbb{Z}} \delta_t^n 2^t + 2^n\mathbb{Z}$, vamos a definir

$$\epsilon_t = \begin{cases} \delta_t^1 & \text{si } t \leq 1 \\ \delta_t^t & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Como para todo $m \geq n$ se tiene que $\phi_{mn}(l_m) = l_n$ por lo tanto

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} \delta_t^m 2^t + 2^n\mathbb{Z} = \sum_{t\in\mathbb{Z}} \delta_t^n 2^t + 2^n\mathbb{Z}$$

de donde deducimos que

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall n, m \in \mathbb{N}, t \leq n \leq m \Rightarrow \delta_t^m = \delta_t^n.$$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z} = \sum_{t<n} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z} =$$

$$\sum_{t<1} \delta_t^1 2^t + \sum_{1\leq t<n} \delta_t^t 2^t + 2^n\mathbb{Z} = \sum_{t<1} \delta_t^n 2^t + \sum_{1\leq t<n} \delta_t^n 2^t + 2^n\mathbb{Z} =$$

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} \delta_t^n 2^t + 2^n\mathbb{Z} = l_n.$$

Vamos a probar la unicidad, supongamos que existe $(\mu_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z} = \sum_{t\in\mathbb{Z}} \mu_t 2^t + 2^n\mathbb{Z}.$$

por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $t < n$, $\epsilon_t = \mu_t$, de donde concluimos que $\epsilon_t = \mu_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. $\square$

Nota 8.3. *Todos los elementos de $\mathbb{E}$ representan uno de L con la aplicación*

$$(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \mapsto \left(\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in L$$

que por la proposición anterior resulta ser una biyección. Podemos por lo tanto identificar los elementos de L con sus correspondientes representaciones en $\mathbb{E}$.

Vamos a ver ahora cómo se comporta esta descripción de los elementos con la multiplicación por 2. Sea $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$, entonces

$$\left(\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z}\right)_{n\in\mathbb{N}} 2 = \left(\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^{t+1} + 2^n\mathbb{Z}\right)_{n\in\mathbb{N}} =$$

$$\left(\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_{t-1} 2^t + 2^n\mathbb{Z}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Proposición 8.4. *Sea N un $2\mathbb{Z}$-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *N está en* $\mathsf{DMod}\text{-}2\mathbb{Z}$.
2. *N está en* $\mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Q}_2$.
3. *Para todo $n \in N$ existe $n' \in N$ tal que $n = n'2$ y para todo $n \in N$, si $n2 = 0$ entonces $n = 0$.*

Demostración:
$(1 \Rightarrow 3)$. Sea $n \in N$. Como $N = N2\mathbb{Z}$, podemos encontrar $n' \in N$ tal que $n = n'2$. Sea $n \in N$ tal que $n2 = 0$, entonces $n \otimes 2 = 0 \in N \otimes_{2\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}$. Utilizando la Proposición 1.58 podemos encontrar una cantidad finita $w_1 \cdots w_t \in N$ y unos $a_1 \cdots a_t \in {}^{\mathbb{Z}\times}2\mathbb{Z}$ tales que $2a_i = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$ y $n = a_i w_i$. Para cada w_i podemos encontrar un v_i tal que $w_i = 2v_i$, entonces $n = 2a_i v_i = 0$.

$(3 \Rightarrow 2)$. Para todo $n \in N$ existe un único $n' \in N$ tal que $n'2 = n$. Vamos a definir $n(1/2) = n'$ y de ésta forma extendemos la definición a todos los elementos de $\mathbb{Q}_2$ ya que todos los elementos de este anillo se pueden poner de la forma $r/2^k$ con $r \in 2\mathbb{Z}$. Es inmediato comprobar que con ésta estructura N es un $\mathbb{Q}_2$-módulo unitario.

$(2 \Rightarrow 1)$. Sea $n \in N$, claramente $n = (n(1/2))2$ por lo tanto N es un $2\mathbb{Z}$-módulo untitario. Supongamos que $n2 = 0$, entonces $n =$

$(n2)(1/2) = 0$ y por lo tanto $n \otimes 2 = 0$. Ésto prueba que $N \in \mathsf{DMod}\text{-}2\mathbb{Z}$.
$\square$

Corolario 8.5. *$\mathbb{Q}_2$ es un generador de la categoría* $\mathsf{DMod}\text{-}2\mathbb{Z}$.

Demostración:
Puesto que es un generador de $\mathsf{Mod}\text{-}\mathbb{Q}_2$, y esta categoría es la misma que $\mathsf{DMod}\text{-}2\mathbb{Z}$, deducimos que es un generador de esta última categoría.
$\square$

Proposición 8.6. *El módulo L está en la categoría* $\mathsf{DMod}\text{-}2\mathbb{Z}$.

Demostración:
Sea $l \in L$, para este elemento podemos encontrar un $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$ tal que

$$l_n = \sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z}.$$

Sea l' el elemento representado por la sucesión $(\epsilon_{t+1})_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$, entoces

$$l'_n 2 = \left(\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_{t+1} 2^t + 2^n\mathbb{Z} \right) 2 =$$

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_{t+1} 2^{t+1} + 2^n\mathbb{Z} = \sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2^n\mathbb{Z} = l_n.$$

Por lo tanto $l'2 = l$. Por otro lado si $l2 = 0$ entonces $\epsilon_{t-1} = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ por lo que $l = 0$. De ahí deducimos utilizando la Proposición 8.4 que $L \in \mathsf{DMod}\text{-}2\mathbb{Z}$. $\square$

Recordemos que estamos denotando $M = \mathbb{Q}_2/2\mathbb{Z}$. Vamos a definir los siguientes homomorfismos

$$\begin{array}{rccc} P: & L & \to & M \\ & (\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \sum_{t\in\mathbb{Z}} \epsilon_t 2^t + 2\mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{Q}_2 & \to & M \\ & r/s & \mapsto & r/s + 2\mathbb{Z} \end{array}$$

Proposición 8.7. $\mathrm{Ker}(p)$ *y* $\mathrm{Ker}(P)$ *son evanescentes como $2\mathbb{Z}$-módulos.*

Demostración:
Por una parte tenemos que $\mathrm{Ker}(p) = 2\mathbb{Z}$. Si existiera un $2\mathbb{Z}$-submódulo de $2\mathbb{Z}$ unitario, éste tendía que estar contenido en $\cap_{n\in\mathbb{N}} 2^n\mathbb{Z} = 0$ por lo que ha de ser el módulo 0.

Supongamos que tenemos un elemento l^0 en $\mathbf{U}(\mathrm{Ker}(P))$, entonces podemos encontrar $l^n \in \mathbf{U}(\mathrm{Ker}(P)) \subseteq \mathrm{Ker}(P)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $l^n 2 = l^{n-1}$. Para cada uno de éstos elementos l^n vamos a encontar una sucesión $(\epsilon^n_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$ que represente éste elemento. Por estar $l^n \in \mathrm{Ker}(P)$ sabemos que $\epsilon^n_t = 0$ para todo $t \leq 0$, pero también sabemos que por ser $l^n 2^k = l^{n-k}$ que $\epsilon^n_{t-k} = \epsilon^{n-k}_t$ para todo t y todo $0 \le k \le n$, por lo tanto

$$\epsilon^n_t = \epsilon^{n-n}_{t-n} = \epsilon^0_{t-n}$$

de donde deducimos que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $\epsilon^0_k = 0$ si $k < 0$ y si $k \ge 0$ entonces $\epsilon^0_k = \epsilon^{k+1}_{-1} = 0$. Por lo tanto $l = 0$. $\square$

Proposición 8.8. *Sea $W \in$ DMod-$2\mathbb{Z}$ para el cual existe un epimorfismo $f : W \to M$. Entonces existe un $\overline{f} : W \to L$ tal que $P \circ \overline{f} = f$.*

Demostración:
Sea $w \in W$, para el podemos encontrar una sucesión $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de W tales que $w_0 = w$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2w_{n-1}$. Esta forma de elección es única por estar $W \in$ DMod-$2\mathbb{Z}$.

Para cada w_n vamos a encontrar unos elementos $r_n \in \mathbb{Z}$ y $\alpha_n \ge 2$ tales que

$$f(w_n) = 2r_n/2^{\alpha_n} + 2\mathbb{Z} \in M$$

y cumpliendo las siguientes propiedades adicionales:

1. $0 \le r_n < 2^{\alpha_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. 2 no divide a r_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a ver las condiciones adicionales que van a cumplir estos elementos.

Como $4r_n/2^{\alpha_n} + 2\mathbb{Z} = 2r_{n-1}/2^{\alpha_{n-1}} + 2\mathbb{Z}$, podremos encontrar un elemento $t_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$4r_n/2^{\alpha_n} = 2r_{n-1}/2^{\alpha_{n-1}} + 2t_n$$

por lo tanto

$$\frac{r_n}{2^{\alpha_n - 2}} = \frac{r_{n-1} + 2^{\alpha}_{n-1} t_n}{2^{\alpha_{n-1}-1}}$$

Como 2 no divide ni a r_{n-1} ni a r_n, la única posibilidad para que estas fracciones sean iguales es que $\alpha_{n-1} = \alpha_n - 1$ y que $r_{n-1} + 2^{\alpha_n - 1} t_n = r_n$. Pero haciendo uso ahora de que $0 \le r_n < 2^{\alpha_n}$ concluimos que t_n solo puede ser 0 ó 1.

Vamos a tomar

$$\overline{f}(w) = \left(\frac{2r_0 + \sum_{k=1}^n t_k 2^k}{2^{\alpha_0}} + 2^n\mathbb{Z}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in L.$$

La unicidad del levantamiento se deduce inmediatamente del hecho de que $\mathrm{Ker}(P)$ sea evanescente. $\square$

Corolario 8.9. *Con las notaciones anteriores, $L = \mathbf{D}(M)$.*

Demostración:
Desde $\mathbf{D}(M)$ hasta M tenemos un epimorfismo ν_M. Utilizando la proposición anterior, este epimorfismo puede ser levantado a un morfismo $\overline{\nu}_M : \mathbf{D}(M) \to L$. En el otro sentido, el homomorfismo P también puede ser levantado a un morfismo $\overline{P} : L \to \mathbf{D}(M)$ utilizando

$\mathbf{D}(P)$ y el isomorfismo $L \simeq \mathbf{D}(L)$. Utilizando que tanto $\mathrm{Ker}(P)$ como $\mathrm{Ker}(\nu_M)$ son evanescentes, podemos deducir que ambos levantamientos son inversos el uno del otro y por lo tanto $L \simeq \mathbf{D}(M)$. □

Contraejemplo 8.10. Sea R un anillo, ${}_RM$ un generador de la categoría R-DMod y ${}_RN \in R$-MOD. Sea $H(N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Entonces tenemos un homomorfismo canónico

$$\eta_N : M^{(H(N))} \to N$$

tal que $\mathrm{Im}(\eta_N) = \mathbf{U}(N)$ y $\mathbf{D}(N)$ se define como $M^{(H(N))}/\mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\eta_N))$. Sin embargo, podría ser posible que tuvieramos un subconjunto $I(N) \subsetneq H(N)$ con el cual pudieramos igualmente definir un homomorfismo

$$\overline{\eta}_N : M^{(I(N))} \to N$$

con $\mathrm{Im}(\overline{\eta}_N) = \mathbf{U}(N)$, pero que sin embargo $\mathbf{D}(N) \neq M^{(I(N))}/\mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\overline{\eta}_N))$.

Demostración:
Consideremos el anillo $2\mathbb{Z}$. El módulo $\mathbb{Q}_2$ es un generador de la categoría $2\mathbb{Z}$-DMod y tenemos un epimorfismo

$$p : \mathbb{Q}_2 \to M$$

sin embargo $\mathbf{D}(M) \neq \mathbb{Q}_2$ (el núcleo de p es evanescente, por lo tanto $\mathbb{Q}_2/\mathbf{U}(\mathrm{Ker}(p)) = \mathbb{Q}_2$).

El epimorfismo $\mathbb{Q}_2 \to M$ se puede levantar a un homomorfismo $\overline{p} : \mathbb{Q}_2 \to L$, pero si nos fijamos en la construcción que se hace de este levantamiento, $\mathrm{Im}(\overline{p})$ es precisamente el conjunto de elementos de L que vienen representados por sucesiones $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}$ tales que $\lim_{t\in+\infty} \epsilon_t \in \{0, 1\}$, es decir, sucesiones eventualmente constantes (tienden a 0 si representan números positivos y a 1 si representan a números negativos). Como en $\mathbb{E}$ se pueden tomar sucesiones que no son eventualmente constantes, por ejemplo, del tipo

$$(\cdots 000010101010101 \cdots)$$

deducimos que $\mathrm{Im}(\overline{p}) \neq L$ y por lo tanto $\mathbb{Q}_2 \neq L$. □

Contraejemplo 8.11. La categoría R-DMod no es en general una categoría coGiraud de la categoría R-MOD, es decir, en general el funtor

$$\mathbf{D} : R\text{-}\mathsf{MOD} \to R\text{-}\mathsf{DMod}$$

no conserva epimorfismos.

Demostración:
El epimorfismo $p : \mathbb{Q}_2 \to M$, al aplicarle el funtor $\mathbf{D}$ va a un morfismo $\mathbf{D}(p) : \mathbf{D}(\mathbb{Q}_2) \to \mathbf{D}(M) = L$. Este morfismo es precisamente el resultado de componer el isomorfismo $\mathbf{D}(\mathbb{Q}_2) \to \mathbb{Q}_2$ ($\mathbb{Q}_2 \in 2\mathbb{Z}$-$\mathsf{DMod}$) con el levantamiento $\overline{p} : \mathbb{Q}_2 \to L$, pero este no puede ser un epimorfismo ya que $\mathrm{Im}(\overline{p}) \neq L$ tal y como hemos visto en el contraejemplo anterior.
□

Para la demostración de que la categoría CMod-R es Grothendieck, se utiliza de forma fundamental el hecho de que CMod-R sea una categoría de Giraud de MOD-R, resultado debido a que CMod-R es una subcategoría localizante. La categoría DMod-R por contra no puede ser estudiada tan fácilmente y es preciso desarrollar nuevas técnicas *ad hoc* para este caso. A lo largo de ésta memoria hemos encontrado muchos resultados duales entre las categorías R-DMod y CMod-R a pesar de que no hemos podido utilizar las propiedades de las categorías de coGiraud. Un problema que sin embargo ha permanecido abierto es el de si la categoría R-DMod es una categoría abeliana en general. Nosotros hemos probado que es una categoría abeliana por la derecha , hecho que nos ha sido necesario para poder hablar de sucesiones exactas por la derecha, requisito fundamental en la prueba de los teoremas de Morita para anillos sin identidad.

A pesar de que la categoría R-DMod no es de coGiraud en general, no hemos podido encontrar ni una demostración, ni un contraejemplo en el que R-DMod no sea una categoría abeliana (la categoría $2\mathbb{Z}$-DMod es claramente abeliana porque es la misma categoría que $\mathbb{Q}_2$-Mod). Puesto que la categoría R-DMod es una categoría abeliana por la derecha, el único problema está en ver la condición que diferencia a las categorías abelianas por la derecha de las categorías abelianas, concretamente la propiedad de ser una categoría normal, e.d., que todo monomorfismo sea un núcleo. Para centrar el problema, vamos a caracterizar ambos tipos de morfismos de forma general:

PROPOSICIÓN 8.12. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo en R-DMod. Entonces*

1. *f es un monomorfismo si y solo si $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))$ es un módulo evanescente en R-MOD.*
2. *f es un núcleo si y solo si $X = \mathbf{D}\left(\mathrm{Im}(f)\right)$.*

Demostración:
(1). Empecemos suponiendo que f es un monomorfismo, entonces como la composición de los morfismos

$$\mathbf{D}\left(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))\right) \to \mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f)) \to X \to Y$$

es 0 y el morfismo $\mathbf{D}\left(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))\right) \to X$ está en R-DMod, dedudimos que $\mathbf{D}\left(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))\right) \to \mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f)) \to X$ es 0, pero como $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f)) \to X$ es un monomorfismo en R-MOD, la única posibilidad es que $\mathbf{D}\left(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))\right) = 0$ y esto sucede cuanto $\mathbf{U}\left(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))\right) = 0$, es decir, cuando $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))$ es evanescente.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))$ es evanescente. Entonces si existe un morfismo $h : Z \to X$ tal que $h * f = 0$, entonces $\mathbf{I_D}(h)$ factorizaría a través del núcleo de $\mathbf{I_D}(f)$ que es evanescente y por lo tanto $\mathbf{I_D}(h) = 0$ con lo que concluimos que $h = 0$.

(2). Vimos que en categorías abelianas por la derecha, todo núcleo es el núcleo de su conúcleo, por lo tanto, un morfismo f es un núcleo si y solo si es el núcleo de su conúcleo. El conúcleo de f es el morfismo $f^c : Y \to Y/\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))$ (recordemos que como $\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))$ es unitario, $Y/\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))$ está en R-DMod). El núcleo de este conúcleo es $\mathbf{D}\left(\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f^c))\right)$, es decir, $\mathbf{D}\left(\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))\right)$, por lo tanto f es un núcleo si y solo si $X = \mathbf{D}\left(\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))\right)$. $\square$

Proposición 8.13. *Sea R un anillo, la categoría R-DMod es abeliana si y solo si para todo morfismo $f : X \to Y$ en R-DMod con $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))$ evanescente, $\mathbf{D}\left(\mathbf{I_D}(f)^{ck}\right)$ es un epimorfismo.*

Demostración:
Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f^{ck}} & \mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f)) \\ \Vert & & \Big\uparrow \nu_{\mathbf{I_D}(\mathrm{Im}(f))} \\ \mathbf{D}(X) & \xrightarrow[\mathbf{D}\left(f^{ck}\right)]{} & \mathbf{D}\left(\mathrm{Im}(\mathbf{I_D}(f))\right) \end{array}$$

La condición de ser abeliana es equivalente a que $\mathbf{D}\left(f^{ck}\right)$ sea un isomorfismo para todo f, pero vamos a ver que si es un epimorfismo, entonces también es un monomorfismo, esto es porque si es un epimorfiso, su núcleo considerado en R-MOD es unitario, pero este núcleo unitario está contenido en $\mathrm{Ker}(\mathbf{I_D}(f))$ que es evanescente, por lo que ha de ser 0. $\square$

Si $\mathbf{D}$ conservara epimorfismos, deduciríamos inmediatamente que R-DMod es una categoría abeliana, pero nosotros conocemos ejemplos, $p : \mathbb{Q}_2 \to M$, de epimorfismos que no son conservados por $\mathbf{D}$. La razón por la que aún en el contraejemplo conocido la categoría permanece abeliana, es porque el epimorfismo $p : \mathbb{Q}_2 \to M$ no se el conúcleo del núcleo de ningún morfismo en R-DMod.

2. Contraejemplos de Equivalencias

Ejemplo 8.14. Existen anillos para los cuales las categorías CMod-R y DMod-R no pueden ser equivalentes independientemente de los funtores que utilicemos. El ejemplo es el de un anillo que sea T-nilpotente por un lado pero no por el otro. Este ejemplo se puede ver en detalle junto con su demostración en [**24**].

Vamos a ver en esta sección que existen anillos T-finitamente generados por ambos lados que no cumplen la propiedad de equivalencia por ningún lado. Para ver estos ejemplos vamos a hacer algunas consideraciones generales sobre un tipo de anillos muy particular.

Proposición 8.15. *Sea X un conjunto no vacío, $A = \mathbb{Z}\langle X\rangle$ el anillo libre sobre el conjunto X con anillo base el anillo de los enteros, y sea $R = (A \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$ que es un subanillo de A. Entonces*

1. *A es isomorfa como anillo a la extensión de Dorroh de R.*

2. *X es un conjunto de generadores de R como A-módulo por ambos lados, en particular es un conjunto T-generador por ambos lados de R.*
3. *Un R-módulo M_R de MOD-R está en CMod-R si y solo si el homomorfismo de grupos abelianos*

$$\begin{array}{ccc} M & \to & M^X \\ m & \mapsto & (mx)_{x\in X} \end{array}$$

es un isomorfismo.
4. *Un R-módulo M_R de MOD-R está en DMod-R si y solo si, el homomorfismo de grupos abelianos*

$$\begin{array}{ccc} M^{(X)} & \to & M \\ (m_x)_{x\in X} & \mapsto & \sum_{x\in X} m_x x \end{array}$$

es un isomorfismo.

Demostración:

1. Vamos únicamente a dar el isomorfismo, la comprobación de que es efectivamente un isomorfismo de anillos es un mero cálculo.

$$\begin{array}{ccc} {}^{\mathbb{Z}\times}R & \to & A \\ (z,r) & \mapsto & z+r \end{array}$$

2. Esto es consecuencia de que $R = \sum_{x\in X} Ax = \sum_{x\in X} xA$.
3. ($\Rightarrow$). Supongamos que existe un m tal que $mx = 0$ para todo $x \in X$, entonces $mr = 0$ para todo $r \in R$ ya que $R = \sum_{x\in X} xA$, pero de ahí deducimos que $m \in \mathbf{t}(M_R) = 0$.

Por otro lado consideremos $(m_x)_{x\in X} \in M^X$, vamos a definir el R-homomorfismo

$$\begin{array}{cccc} f: & R & \to & M \\ & x & \mapsto & m_x \end{array}$$

y extendiendo f para el resto de los valores por linealidad. Es fácil ver que f está bien definido por ser los elementos de X libres. Puesto que $M \in \mathsf{CMod}$-R podemos encontrar un $m \in M$ tal que $f(r) = mr$ para todo $r \in R$, por lo tanto $m_x = mx$ para todo $x \in X$.

($\Leftarrow$). Supongamos que existe $m \in \mathbf{t}(M_R)$, entonces para todo $x \in X$ tendremos que $mx = 0$, pero esto supone que $(mx)_{x\in X} = (0x)_{x\in X}$ y por lo tanto $m = 0$. Ésto prueba que $\mathrm{Ker}(\lambda_M) = 0$. Para ver que λ_M es suprayectiva supongamos que tenemos $f : R \to M$ un R-homomorfismo. Si consideramos el elemento $(f(x))_{x\in X} \in M^X$ podemos encontrar un $m \in M$ tal que $mx = f(x)$ para todo $x \in X$, como f por ser un R-homomorfismo, también es un A-homomorfismo, entonces para todo $r \in R$ tenemos que $r \in \sum_{x\in X} xA$ por lo tanto podremos encontrar valores $a_x \in A$ para todo x, casi todos nulos, tales que $r = \sum_{x\in X} xa_x$ pero de ahí deducimos que

$$f(r) = \sum_{x\in X} f(x)a_x = \sum_{x\in X} mxa_x = mr$$

por lo tanto $\lambda_M(m) = f$.

4. ($\Rightarrow$). Si M está en $\mathsf{DMod}\text{-}R$, en particular, M es unitario, por lo tanto $M = MR = \sum_{x\in X} MAx = \sum_{x\in X} Mx$ por lo tanto para todo $m \in M$ podemos encontrar elementos $(m_x)_{x\in X}$ casi todos nulos tales que $m = \sum_{x\in X} m_x x$. Por otro lado, supongamos que tenemos una familia de elementos $(m_x)_{x\in X} \in M^{(X)}$ tales que $\sum_{x\in X} m_x x = 0$, entonces $\sum_{x\in X} m_x \otimes x = 0 \in M \otimes_A R$ por lo tanto, utilizando la Proposición 1.58 podemos encontrar elementos $m_1, \cdots, m_k \in M$ y $a_{ix} \in A$ con $i \in \{1, \cdots, k\}$, $x \in X$ casi todos nulos tales que

$$\sum_{x\in X} a_{ix}x = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\}$$

$$\sum_{i=1}^{k} m_i a_{ix} = m_x \quad \forall x \in X$$

pero por definición de A, si $\sum_{x\in X} a_{ix}x = 0$ entonces $a_{ix} = 0$ para todo par (i, x) y de ahí deducimos que $m_x = 0$ para todo $x \in X$.

($\Leftarrow$). Para todo $m \in M$ podemos encontrar $(m_x)_{x\in X} \in M^{(X)}$ tal que $\sum_{x\in X} m_x x = m$ por lo tanto $m \in MR$, de ahí deducimos que $M = MR$ y que $\mu_M : M \otimes_R R \to M$ es un epimorfismo. Para ver que también es un monomorfismo consideremos un elemento genérico de $\mathrm{Ker}(\mu_M)$. Por construcción de R sabemos que un elemento de este núcleo se puede escribir como $\sum_{x\in X} m_x \otimes x$ con $(m_x)_{x\in X} \in M^{(X)}$, pero por estar este elemento en $\mathrm{Ker}(\mu_M)$ sabemos que $\sum_{x\in X} m_x x = 0$ de donde deducimos que $m_x = 0$ para todo $x \in X$ y por lo tanto $\sum_{x\in X} m_x \otimes x = 0$.

□

Lema 8.16. *Sea X un conjunto, $A = \mathbb{Z}\langle X\rangle$, $R = (A \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$, y M_R un R-módulo unitario, entonces si $\sum_{x\in X} m_x \otimes x = 0$ en $M \otimes_A R$, entonces $m_x = 0$ para todo $x \in X$.*

Demostración:
Realmente es esto lo que se prueba en el punto 4 de la proposición anterior utilizando la Proposición 1.58. □

Proposición 8.17. *Sea X un conjunto finito, $A = \mathbb{Z}\langle X\rangle$, $R = (A \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$, entonces*

1. *Si M_R es un R-módulo libre de torsión entonces $\mathbf{C}(M_R) = M\langle X^*\rangle$ donde $X^* = \{x^* : x \in X\}$, siendo los elementos de*

$M\langle X^*\rangle$ sumas finitas de elementos de la forma $mx_1^*\cdots x_k^*$ con $x_i^*\in X^*$ y definiendo las siguientes operaciones para todo $y\in X$,

$$mx_1^*\cdots x_k^*y=\begin{cases}0 & si\ k\geq 1\ y\ x_k\neq y\\ mx_1^*\cdots x_{k-1}^* & si\ k\geq 1\ y\ x_k=y\\ my & si\ k=0\end{cases}$$

y extendiendo por linealidad para obtener todos los demás productos.

2. *Si M_R es un R-módulo unitario, entonces*

$$\mathbf{D}\left(M_R\right)=\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M\otimes_R \underbrace{R\otimes_R\cdots\otimes_R R}_{n\ veces}$$

Demostración:

1. Empecemos viendo que $M\langle X^*\rangle$ con la definición dada en el enunciado está en CMod-R. Para ello vamos a utilizar la proposición anterior y vamos a comprobar que el homomorfismo de grupos abelianos
$$\begin{array}{ccc}M\langle X^*\rangle & \to & M\langle X^*\rangle^X\\ \hat{m} & \mapsto & (\hat{m}x)_{x\in X}\end{array}$$
es un isomorfismo viendo que tiene un inverso, el inverso es precisamente el que viene dado por
$$\begin{array}{ccc}M\langle X^*\rangle^X & \to & M\langle X^*\rangle\\ (\hat{m}_x)_{x\in X} & \mapsto & \sum_{x\in X}\hat{m}_x x^*\end{array}$$
Notemos que como X es un conjunto finito por hipótesis, la suma que estamos tomando es finita. La definición de $\hat{m}_x x^*$ es la siguiente: si $\hat{m}_x=\sum_{(x_1\cdots x_t)\in\cup_{k\in\mathbb{N}}X^k} m_(x_1\cdots x_t)x_1^*\cdots x_t^*$ entonces $\hat{m}_x x^*=\sum_{(x_1\cdots x_t)\in\cup_{k\in\mathbb{N}}X^k} m_(x_1\cdots x_t)x_1^*\cdots x_t^*x^*$.

   Para probar que efectivamente $\mathbf{C}\left(M_R\right)$ es precisamente este módulo, tenemos que probar que $M\langle X^*\rangle/M$ es un R-módulo de torsión, pero esto está claro ya que todos los elementos de $M\langle X^*\rangle$ son sumas finitas de la forma $mx_1^*\cdots x_k^*$ y $mx_1^*\cdots x_k^*X^k=0$.
2. Consideremos el conjunto X y la aplicación $\pi: X\to R$ dada por $\pi(x)=x$. Como X es un conjunto finito podemos considerar el soporte $\sigma=\Sigma(X)$.

   Utilizando el lema anterior, sabemos que todos los elementos de $M\otimes_A R$ se pueden escribir de modo único como $\sum_{x\in X} m_x\otimes x$, utilizando ésto repetidamente podemos deducir que los elementos de
$$M\otimes_R \underbrace{R\otimes_R\cdots\otimes_R R}_{n\text{ veces}}$$
pueden expresarse de modo único como sumas de los elementos de la forma $m_{\overline{x}}\otimes x_{\lambda(\overline{x})}\otimes\cdots x_1$ con $\lambda(\overline{x})=n$.

Si consideramos un elemento de

$$L := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M \otimes_R \underbrace{R \otimes_R \cdots \otimes_R R}_{n \text{ veces}}$$

éste vendrá representado por una familia de elementos $m_{\overline{x}}$ con $\overline{x} \in \sigma$ tales que $\sum_{y\in X} m_{\overline{x}y} y = m_{\overline{x}}$.

De esta forma se ve que para todo elemento l de L existe un homomorfismo $f : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to M$ tal que l viene representado por los elementos

$$(f({}_\sigma\langle \overline{x} \rangle))_{\overline{x}\in\sigma}.$$

Además esta representación es única por ser única en cada uno de los $M \otimes_R R \cdots \otimes_R R$. Esto nos establece una biyección entre L y $\mathrm{Hom}_R(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle, M)$. Denotemos a esta biyección por $\varphi : \mathrm{Hom}_R(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle, M) \to L$. De esta forma, para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle, M)$, se tiene que $\varphi(f) = \sum_{x\in X} \varphi(f \circ \pi^{\Delta}(\overline{x})_\sigma) x$ (notemos que $\Delta_{\underline{x}}\sigma = \sigma$ para todo $x \in X$). Esto nos prueba que L es unitario. Además, la unicidad de estos elementos en cada una de las componentes $M \otimes_R R \otimes_R \cdots \otimes_R R$ nos hace que $L \in \mathsf{DMod}\text{-}R$.

Sea $f \in \mathrm{Hom}_R(\langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle, M)$, y sea $\overline{x} \in \sigma$. Consideremos el elemento $l_{\overline{x}}$ dado por $\varphi(f \circ \pi^{\Delta}(\overline{x})_\sigma)$. Entonces denotaremos $\overline{f} : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to L$ el homomorfismo que sobre cada ${}_\sigma\langle \overline{x} \rangle$ está definido como $l_{\overline{x}}$. De esta forma podemos levantar todos los homomorfismos $f : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to M$ a homomorfismos $\overline{f} : \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \to L$.

Utilizando estos levantamientos, es posible ver que $L = \mathbf{D}(M)$ de forma similar a como se hace en el Corolario 8.9.

□

CONTRAEJEMPLO 8.18. El anillo $R = \mathbb{Z}\langle x_0, x_1 \rangle \setminus \mathbb{Z} \cup \{0\}$ no cumple la propiedad de la equivalencia por la derecha ni por la izquierda.

Demostración:
Consideremos el módulo $M = \mathbb{Z}[x_0] \setminus \mathbb{Z} \cup \{0\}$ con la multiplicación por x_1 dada por $mx_1 = 0$ para todo x_1 y la multiplicación por x_0 dada de la forma natural. Este módulo es libre de torsión puesto que $mx_0^n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $m \in M \setminus \{0\}$.

Podemos pues calcular $\mathbf{C}(M)$ que es $N = M\langle x_0^*, x_1^* \rangle$. El módulo N es unitario ya que $n = nx_0^* x_0$ para todo $n \in N$. Si R cumpliera la propiedad de la equivalencia por la derecha, el núcleo de ν_N debería ser un módulo de torsión. Lo que vamos a probar precisamente es que este módulo no es de torsión. Pero esto es cierto porque el elemento $l \in \varprojlim N \otimes_R R \otimes_R \cdots \otimes_R R$ dado por la sucesión

$$(0, x_0 \otimes x_1, x_0 x_0^* \otimes x_0 \otimes x_1, \cdots, x_0 (x_0^*)^k \otimes \underbrace{x_0 \otimes \cdots \otimes x_0}_{k \text{ veces}} \otimes x_1, \cdots)$$

está claramente en este núcleo y para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $lx_1^k \neq 0$.

□

Bibliografía

[1] Abrams, G.D.: "Morita equivalence for rings with local units", *Communications in Algebra*, 11(8), p. 801-837, 1983.

[2] Abrams, G.D.; Ánh, P.N.; Márki,L.: "A topological approach to Morita equivalences for rings with local units", *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 22(2) , p. 405-416, 1992.

[3] Anderson, F.W.; Fuller, K.R.: *Rings and categories of modules*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag Inc., 1992

[4] Ánh, P.N.; Loi, N.V.; Thanh, D.V.: "Perfect rings without identity". *Communications in Algebra*, 19(4), p. 1069-1082, 1991.

[5] Ánh,P.N.; and Márki,L. Morita equivalences for rings without identity. *Tsukuba J. Math.*, 11:1–16, 1987.

[6] Faith,C.: *Algebra: Rings, Modules and Categories I*, Springer-Verlag Inc., 1973

[7] Fuller, K.R.: "Density and Equivalence". *Journal of Algebra*, 29, p. 528-550, 1974.

[8] Gabriel,P.: "Des Catégories Abéliennes", *Bull. Soc. math. France*, 90, p.323-448, 1962.

[9] García,J.L.; Marín,L. An extension of a theorem on endomorphism rings and equivalences. *Journal of Algebra*, 181:962–966, 1996.

[10] García,J.L.; Marín,L. Rings having a Morita-like equivalence. To appear.

[11] García,J.L.;Saorín,M. Endomorphism rings and category equivalences. *Journal of Algebra*, 127:182–205, 1989.

[12] García,J.L.;Simón,J.J. Morita equivalences for idempotent rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 76:39–56, 1991.

[13] García Hernández,J.L.;Gómez Pardo,J.L.;Martínez Hernández,J. Semiperfect modules relative to a torsion theory. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 43:145–172, 1986.

[14] Gentle, R.: "T.T.F. theories for left and right exact sequences". *Journal of Pure and Applied Algebra*, 75, p. 237-258, 1991.

[15] Gregorio, E.: "Classical Morita equivalence and linear topologies; applications to quasi-dualities", *Communications in Algebra*, 18(4), p. 1137-1146, 1990.

[16] Hilton, P.J.; Stammbach, U.: *A Course in Homological Algebra*, 2nd. ed. New York: Springer-Verlag Inc., 1996

[17] Hutchinson, J.J.; Fenrick, M.H.: "Primary descompositions and Morita contexts". *Communication in Algebra*, 6(13), p. 1359-1368, 1978.

[18] Kashu, A.I.: *Functors and Torsions in Categories of Modules*, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Moldava, 1997, en ruso.

[19] Kato, T.; Ohtake, K.: "Morita contexts and equivalences", *Journal of Algebra*, 61, p. 360-366, 1979.

[20] Kato, T.: "Morita contexts and equivalences II", *Proceedings of the* 20^{th} *symposium on ring theory*, p. 31-36, 1987.

[21] Komatsu, H.: "The category of s-unital modules", *Mathematical Journal of Okayama University*, 29, p. 65-91, 1987.

[22] Kyuno, S.: "Equivalence of module categories", *Mathematical Journal of Okayama University*, 28, p. 147-150, 1986.

[23] Kyuno, S.; Smith, M.B.; Nobusawa, N.: "Closed ideals in non-unital matrix rings", *Mathematical Journal of Okayama University*, 29, p. 147-152, 1987.

[24] Marín, L.: "Morita equivalence based on contexts for various categories of modules over associative rings", *to appear in Journal of Pure and Applied Algebra*.

[25] Marín, L.: *Categories of Modules for Idempotent Rings and Morita Equivalences* (M.Sc. Thesis). University of Glasgow (Scotland-U.K.), 1997.

[26] Marín, L.: *Equivalencias de Morita para Anillos Asociativos* Publicaciones del Departamento de Matemáticas, 20, Murcia, 1997.

[27] McCoy, N.H.: *The Theory of Rings*, The McMillan Company, New York, 1964.

[28] Menini, C.: "Jacobson's Conjecture, Morita Duality and Related Questions", *Journal of Algebra*, 103, p. 638-655, 1986.

[29] Müller, B.J.: "The quotient category of a Morita context", *Journal of Algebra*, 28, p. 389-407, 1974.

[30] Nauman, S.K.: "Intersecting Subcategories of Static Modules, Stable Clifford Theory and Colocalization-Localization", *Journal of Algebra*, 170, p. 400-421, 1994.

[31] Nobusawa, N.: "On Duality in Γ-rings". *Mathematical Journal of Okayama University*, 25, p. 69-73, 1983.

[32] Nobusawa, N.: "Γ-rings and Morita equivalence of rings". *Mathematical Journal of Okayama University*, 26, p. 151-156, 1984.

[33] Nobusawa, N.: "On Morita pairs of rings". *Mathematical Journal of Okayama University*, 29, p. 153-158, 1987.

[34] Nobusawa, N.: "Correspondences of modules over a Morita ring". *Mathematical Journal of Okayama University*, 30, p. 63-70, 1988.

[35] Ohtake, K.: "Equivalence between colocalization and localization in abelian categories with applications to the theory of modules", *Journal of Algebra*, 79, p. 169-205, 1982.

[36] Parvathi, M.; Rajendran, P.A.: "Gamma-rings and Morita equivalence", *Communications in Algebra*, 12(14), p. 1781-1786, 1984.

[37] Quillen, D.: *Module theory over nonunital rings*, Preprint.

[38] Rotman, J.J.: *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press Inc., New York, 1977.

[39] Rowen, L.H.: *Ring Theory.* Academic Press Inc., New York, 1988.

[40] Simón Pinero, J.J.: *El problema de la caracterización y de la unicidad* (Tesis Doctoral). Murcia: Universidad, Departamento de Matemáticas, 1992.

[41] Simón Pinero, J.J.: "Morita-Equivalent Row-Finite Matrix Rings Are Isomorphic", *Journal of Algebra*, 173, p. 390-393, 1995.

[42] Stenström, B.: *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[43] Tominaga, H.: "On s-unital rings", *Mathematical Journal of Okayama University*, 18, p. 117-134, 1976.

[44] Tachikawa, H.; Ohtake, H.: "Colocalization and localization in Abelian Categories", *Journal of Algebra*, 56, p. 1-23, 1979.

[45] Wisbauer, R.: *Grundlagen der Modul- und Ringtheorie*, Verlag Reinhard Fischer, München, 1988.

[46] Xu,Y.H.; Shum,K.P. and Turner-Smith,R.F.: "Morita-like equivalence for infinite matrix subrings", *Journal of Algebra*, 159, p. 425-435.

[47] Zhengping, Z.: "Equivalence and Duality of Quotient Categories", *Journal of Algebra*, 143, p. 144-155, 1991.

Índice de Materias

Formulario

$$((\overline{x})) = \{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{y} \leq \overline{x}\}$$

$$\nabla_{\overline{x}}\zeta = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \zeta = \varnothing \\ \{\overline{xy} \in \Sigma(X) : \overline{y} \in \zeta\} \cup ((\overline{x})) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Delta_{\underline{x}}\zeta = \{\overline{y} \in \Sigma(X) : \overline{xy} \in \zeta\}$$

$$\Delta_{\underline{x}}\zeta \cap X = \{y \in X : \overline{x}y \in \zeta\}$$

$$\nabla_{\overline{x}} \cup_{i\in I} \zeta_i = \cup_{i\in I} \nabla_{\overline{x}}\zeta_i \quad \Delta_{\underline{x}} \cup_{i\in I} \zeta_i = \cup_{i\in I} \Delta_{\underline{x}}\zeta_i$$

$$\nabla_{\overline{x}} \cap_{i\in I} \zeta_i = \cap_{i\in I} \nabla_{\overline{x}}\zeta_i \quad \Delta_{\underline{x}} \cap_{i\in I} \zeta_i = \cap_{i\in I} \Delta_{\underline{x}}\zeta_i$$

$$\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{x}}\zeta = \zeta$$

$$\nabla_{\overline{x}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \nabla_{\overline{xy}}\zeta \quad \Delta_{\underline{x}}\Delta_{\underline{y}}\zeta = \Delta_{\underline{xy}}\zeta$$

$$\Delta_{\underline{x}}\nabla_{\overline{y}}\zeta = \begin{cases} \nabla_{\overline{x}^{-1}\overline{y}}\zeta & \text{si } \overline{x} \leq \overline{y} \\ \Delta_{\underline{x}\,\underline{y}^{-1}}\zeta & \text{si } \overline{y} \leq \overline{x} \\ \varnothing & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(\underline{x})\zeta = \nabla_{\overline{x}}\Delta_{\underline{x}}\zeta \quad (\underline{xy})\zeta \subseteq (\underline{y})\zeta$$

$$(\underline{x})\zeta = \begin{cases} \{\overline{y} \in \zeta : \overline{x} \leq \overline{y}\} \cup ((\overline{x})) & \text{si } \overline{x} \in \zeta \\ \varnothing & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(\underline{x})(\underline{y})\zeta = \begin{cases} (\underline{y})\zeta & \text{si } \overline{x} \leq \overline{y} \\ (\underline{x})\zeta & \text{si } \overline{y} \leq \overline{x} \\ \varnothing & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mathrm{Seq}(\zeta) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : (x_1 \cdots x_n) \in \zeta \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$\partial\zeta = \begin{cases} \{\varnothing\} & \text{si } \zeta = \varnothing \\ \{\overline{x} \in \Sigma(X) \setminus \zeta : \forall \overline{y} < \overline{x}, \overline{y} \in \zeta\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\sigma \cap \xi \text{ es finito } \forall \sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X), \xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$$

$$\sigma = \bigcup_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} (\underline{x})\sigma \quad \forall \sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X), \xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$$

$$\lambda_M : M_R \to \mathrm{Hom}_R(R_R, M_R) \quad \lambda_M(m)(r) = mr$$

$$\mu_M : M \otimes_R R \to M \quad \mu_M(m \otimes r) = mr$$

$$\Phi_{\tau\sigma} * \Phi_{\sigma\rho} = \Phi_{\tau\rho} \quad \rho \subseteq \sigma \subseteq \tau$$

$$\begin{array}{rccc} \pi^{\Delta}(\underline{x})_\sigma : & \langle\!\langle \Delta_{\underline{x}}\sigma \rangle\!\rangle & \to & \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \\ & \langle \underline{y} \rangle_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} & \mapsto & \langle \underline{yx} \rangle_\sigma \end{array} \quad \begin{array}{rccc} \pi^{\nabla}(\overline{x})_\sigma : & \langle\!\langle \nabla_{\overline{x}}\sigma \rangle\!\rangle & \to & \langle\!\langle \sigma \rangle\!\rangle \\ & \langle \underline{yx} \rangle_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} & \mapsto & \langle \underline{y} \rangle_\sigma \end{array}$$

$$\pi^{\nabla}(\overline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{xy})_{\sigma} \quad \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\Delta_{\underline{y}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{y})_{\sigma} = \pi^{\Delta}(\underline{xy})_{\sigma}$$

$$\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma} = \mathrm{id}_{\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle} \quad \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{x}}\sigma} = \mathrm{id}_{\langle\!\langle\nabla_{\overline{x}}\sigma\rangle\!\rangle}$$

$$\pi^{\Delta}(\underline{x})_{\nabla_{\overline{y}}\sigma} * \pi^{\nabla}(\overline{y})_{\sigma} = \begin{cases} \pi^{\nabla}(\overline{z})_{\sigma} & \text{si } \overline{xz} = \overline{y} \\ \pi^{\Delta}(\underline{z})_{\sigma} & \text{si } \overline{yz} = \overline{x} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} = \pi^{\nabla}(\overline{x})_{\Delta_{\underline{x}}\sigma} * \pi^{\Delta}(\underline{x})_{\sigma}$$

$$\Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * \Phi_{\sigma,(\underline{y})\sigma} = \begin{cases} \Gamma_{(\underline{x})(\underline{y})\sigma,(\underline{y})\sigma} & \text{si } \overline{y} \leq \overline{x} \\ \Phi_{(\underline{x})\sigma,(\underline{y})\sigma} & \text{si } \overline{x} \leq \overline{y} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \simeq \coprod_{\overline{x}\in\partial\xi\cap\sigma} \langle\!\langle(\underline{x})\sigma\rangle\!\rangle \quad \forall\sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X), \xi \in \Xi_{\mathbf{T}}(X)$$

$$\Gamma_{\rho,\sigma} * \Gamma_{\sigma,\tau} = \Gamma_{\rho,\tau} \quad \rho \subseteq_{\oplus} \sigma \subseteq_{\oplus} \tau$$

$$\langle\!\langle\tau\rangle\!\rangle \simeq \coprod_{i=1}^{n} \langle\!\langle\sigma_i\rangle\!\rangle \text{ si } \biguplus_{i=1}^{n} \sigma_i = \tau \quad \mathrm{Ker}(\Phi_{\tau,\sigma}) \simeq \coprod_{\overline{x}\in\partial\sigma\cap\tau} \langle\!\langle(\underline{x})\tau\rangle\!\rangle$$

$$\chi(f) = \{\overline{x} \in \sigma : \Gamma_{(\underline{x})\sigma,\sigma} * f \neq 0\} \quad f : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to M$$

$$\mathbf{T}^{\mathrm{op}}(M_R) = M/\mathbf{T}(M)$$

$$\begin{array}{cccc} \eta_M : & G^{(H(M))} & \to & M \\ & (g_h)_{h\in H(M)} & \mapsto & \sum_{h\in H(M)}(g_h)h \end{array}$$

$$\mathbf{D}(M_R) = G^{(H(M))}/\mathbf{U}(\mathrm{Ker}(\eta_M))$$

$$\iota_M : M_R \to \mathbf{C}(M_R) \quad \nu_M : \mathbf{D}(M_R) \to M_R$$

$$\Omega(F) = \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \varinjlim_{\sigma'\in\Xi_{\mathbf{U}}(X')} \mathrm{Hom}_{R'}(\langle\!\langle\sigma'\rangle\!\rangle, F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle))$$

$$\pi^{\Delta}(\underline{x}), \pi^{\nabla}(\overline{x}) \in \Omega(\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathsf{DMod}})$$

$$(w^3 \circ w^2) \circ w^1 = w^3 \circ (w^2 \circ w^1) \ \forall w^i \in \Omega(F^i), i = 1,2,3$$

$$(w^2 + v^2) \circ w^1 = w^2 \circ w^1 + v^2 \circ w^1 \ \forall w^2, v^2 \in \Omega(F^2), w^1 \in \Omega(F^1)$$

$$w^2 \circ (w^1 + v^1) = w^2 \circ w^1 + w^2 \circ v^1 \ \forall w^1 \in \Omega(F^2), w^1, v^1 \in \Omega(F^1)$$

$$\Omega(\alpha * \beta) = \Omega(\alpha) * \Omega(\beta)$$

$$\mathbf{C}(F) = \mathrm{Hom}_E(M, F(M)) \quad {}_RM \text{ generador de } R\text{-}\mathsf{DMod} \quad E = \mathrm{End}({}_RM)$$

$$\varsigma : \mathbf{C}(F) \otimes_R - \to F$$

$$(c \otimes n)\varsigma_N = (c(m))F(g) \quad \text{si } (m)g = n$$

$$\mathbb{A}_{\zeta}(\sigma) = \{h : \langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \to G : \forall\overline{x} \in \sigma, \overline{x} \notin \xi, (\langle\underline{x}\rangle_{\sigma})h = 0\}$$

$$\zeta \subseteq \xi \Rightarrow \mathbb{A}_{\xi}(\sigma) \subseteq \mathbb{A}_{\zeta}(\sigma)$$

$$c_{\sigma} = (c((\langle\varnothing\rangle_{\sigma})q_{\sigma}))F(p_{\sigma}) \in F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle) \quad c \in \mathbf{C}(F), \sigma \in \Xi_{\mathbf{U}}(X)$$

$$\epsilon(c) = (c_{\sigma})_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} \in \varprojlim_{\sigma\in\Xi_{\mathbf{U}}(X)} F(\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle) \quad c \in \mathbf{C}(F)$$

$$\epsilon(c) \circ \pi^{\nabla}(\overline{x}) = \epsilon(c\pi(\overline{x}))$$

$$\mathbf{C}(P_R) \simeq \mathbf{C}(P \otimes_R -)$$