Historial Académico, Docente e Investigador,

y Proyecto de Investigación[1]

Matías Raja

22/07/2021

[1]Para optar a la plaza 11575 de Catedrático de Universidad en el Área de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia.

Índice general

Presentación

En este documento se puede encontrar:

1. Un breve resumen de mi historial académico desde que entré como estudiante de licenciatura en la Universidad de Murcia.

2. La lista de materias (no por asignaturas o cursos, que se puede consultar en el documento expedido por el Vicerrectorado de Profesorado) que he impartido como profesor en la Universidad de Murcia.

3. Un panorama de mi investigación, agrupada por temas, destacando los resultados más representativos.

4. Un proyecto de investigación para desarrollar los próximos años.

5. Un listado de mi producción científica con las citas más relevantes.

Tanto en la descripción de mi investigación como en el proyecto, mis artículos son denotados entre paréntesis cuadrados con el año y, eventualmente, una letra (e.g. [1999a]) si es que hubo varios ese año. Estos artículos deben ser consultados en el capítulo de producción científica, mientras que los otros pueden encontrarse en la bibliografía al final de esta memoria.

Capítulo 1

Historial Académico

A finales de 1988, mientras cursaba COU, quedé en primer puesto en la fase regional de la Olimpiada Matemática, obteniendo una beca de la RSME renovable anualmente para estudiar Matemáticas.

Realicé los estudios de Licenciado en Matemáticas en la Universidad de Murcia 1989/94, obteniendo el Premio Extraordinario de Fin de Carrera.

Disfruté de una beca de colaboración durante 5^o curso. Posteriormente he disfrutado dos becas del Programa Intercampus/E.AL: *Universidad Nacional de Asunción* (Paraguay, 1994); y *Universidad Nacional de Piura* (Perú, 1995).

En 1995 obtuve una beca FPI de la Consejería de Cultura y Educación de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, con Gabriel Vera como tutor, que disfruté hasta finales de 1997 cuando pasé a Ayudante de Facultad y ETS.

En 1995 realicé una estancia de dos meses en *University College Londo*n bajo la tutela de John Jayne con una beca de la Fundación Esteban Romero.

En 1996 defendí en la Universidad de Murcia mi Tesina de Licenciatura, dirigida por Gabriel Vera, con el título "Medibilidad en el Espacio de Banach".

Durante el curso 96/97 estuve en la *Université Bordeaux I* (Francia) bajo la dirección de Robert Deville. Regresé a Burdeos durante el segundo semestre de 1998 para completar la tesis.

En 1997 comencé como profesor ayudante de facultad, renunciando a la beca FPI. Como curiosidad, dicha plaza se creó a resultas de la jubilación del recordado catedrático J. A. Fernández Viña.

En 1998 defendí en Burdeos mi tesis doctoral con el título "Measurabilité de Borel et Renormages dans les Espaces de Banach" realizada bajo la dirección de Robert Deville y Gabriel Vera. Al año siguiente, 1999 defendí nuevamente la tesis, ligeramente ampliada y mejorada, en Murcia con el título "Borel Measurability and Renormings in Banach Spaces", que obtuvo la Mención Europea.

En 2002, completado mi periodo como ayudante de facultad, pasé a titular de universidad, puesto que he mantenido de forma ininterrumpida hasta ahora.

También, en 2002 obtuve una ayuda postdoctoral para ir a la *Universidad Hebrea de Jerusalem* (Israel) bajo la tutela de Joram Lindenstrauss. Aunque no completé el tiempo previsto de estancia, me sirvió para incorporar otras líneas de investigación.

He realizado estancias cortas en varias universidades europeas (Praga, Burdeos, Besançon, París, Milán. . .) pero la estancia larga más significativa, por ser asimilable a un periodo sabático, ha sido en 2018 en la *Université Franche-Comté* en Besançon (Francia).

He realizado dos estancias breves en Bobo-Diulasso (Burkina Faso) financiadas por la *Agence Universitaire de la Francophonie*. Actualmente coordino los programas Erasmus+ con esta universidad y la de Kharkiv (Ucrania).

He evaluado solicitudes de proyectos de investigación españoles y europeos. No obstante, la experiencia más interesante en este sentido fue formar parte de un panel evaluador de la *National Science Foundation*, que me llevó durante tres días en 2019 a su sede en Virginia (USA).

Aparezco como miembro en comités de varios congresos y reuniones, pero la responsabilidad completa de la organización de las actividades ha caído sobre mí en la organización del ALEL y Workshop on Functional Analysis (Cartagena 2016), y los XVI Encuentros de Murcia–Valencia (Murcia 2018) en memoria de Bernardo Cascales.

En cuanto a gestión, he sido Secretario del Departamento de Matemáticas durante casi cuatro años entre 2009 y 2012. Incluyo aquí también como gestión el haber sido IP en dos proyectos MINECO.

He codirigido las tesis de Simone Ferrari (con José Orihuela) y Luis Carlos García Lirola (con Bernardo Cascales). Actualmente dirijo la tesis de Guillaume Grelier. También he tutorizado varios TFG's y TFM's.

Finalmente, he sido elegido "Padrino de la Promoción de Matemáticas" por los estudiantes en dos ocasiones.

Capítulo 2

Carrera Docente

En octubre de 1997 comienzo mi carrera docente en la Universidad de Murcia como Profesor Ayudante de Facultad y ETS, pasando a Profesor Titular Interino en junio de 2002, y finalmente Profesor Titular (funcionario) en noviembre de ese mismo año.

Desde entonces he impartido clase en las siguientes titulaciones, algunas ya extintas:

- Licenciado en Matemáticas
- Licenciado en Química
- Licenciado en Física
- Ingeniero Químico
- Grado en Matemáticas (y PCEO)
- Grado en Química
- Grado en Bioquímica
- Máster Universitario en Matemática Avanzada (y Profesional)
- Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria
- Máster Universitario en Arqueología Aplicada (posteriormente, en Historia y Patrimonio Histórico)
- Cursos de Doctorado en Matemáticas

Sería prolijo dar en detalle las asignaturas cubiertas en dichas titulaciones (esa información está en la Certificación Docente emitida por el Vicerrectorado de Profesorado), así que las agruparé por temas de manera coherente aunque de tamaño desigual:

- Cálculo de varias variables y Algebra Lineal (primeros cursos de Ciencias)
- Análisis Matemático de una y varias variables (para Matemáticas)
- Análisis Complejo (para Matemáticas y Física)
- Medida e Integración (antigua Licenciatura y Máster)
- Análisis Funcional (último curso Matemáticas y Máster)
- Métodos Numéricos (Licenciatura)
- Historia de las Matemáticas (optativa y Máster de Educación)
- Ecuaciones Diferenciales (para Química)
- Topología General (en cursos de Doctorado y Máster)
- Mecánica Analítica (para optativa en Licenciatura)
- Estadística (Máster de Arqueología)

Siendo bastante completo el plan de estudios que cursé en su momento, algunas de las asignaturas arriba mencionadas no tuve la fortuna de estudiarlas de manera reglada o, al menos, en la profundidad aconsejable. Eso me ha permitido enmendar algunas carencias de mi propia formación así como desarrollar una opinión sobre qué se debe enseñar en los estudios de Matemáticas.

Capítulo 3

Trayectoria en Investigación

Presentaré mi investigación pasada clasificada por temas, cada uno con su propio desarrollo. De esta manera, se podrá seguir mejor la evolución de los resultados de forma coherente a lo largo de estos años. Debido a la interacción entre distintas materias, algunos artículos serán vinculados en varios apartados. Los resultados más destacados serán presentados como "Teorema" independientemente de como se indicaran en el trabajo original.

3.1. Renormamientos

Se entiende por renormamiento de un espacio de Banach dar una norma equivalente con cierta propiedad adicional, que puede ser mejor, en el sentido que es una propiedad presente en el espacio de Hilbert (e.g convexidad estricta), pero también podría ser "peor" (e.g. poliedral). En los espacios de la misma dimensión finita todas las normas son equivalentes, así que la teoría hace referencia a espacios infinito-dimensionales. Por lo general, para hacer un renormamiento se precisa de información sobre la estructura del espacio de Banach y, en ocasiones, es una cierta propiedad isomorfa la que caracteriza la existencia de un tipo de renormamientos. La "Renorming Theory" fue un área muy activa en los años 90 y comienzos de este siglo con la participación de un buen número de matemáticos de prestigio. Se puede decir que el libro [13] tuvo un poderoso efecto catalizador y la actividad posterior ha dejado obsoletos varios de sus capítulos.

3.1.1. Kadec

Una norma se dice Kadec cuando la topología débil y la de la norma coinciden sobre la esfera unidad. Esta propiedad puede generalizarse a otras topologías vectoriales τ que podrían considerarse en el espacio hablando, en este caso de τ-Kadec. Este tipo de normas toma el nombre de Mikhail Kadec que las utilizó para demostrar su célebre teorema sobre la equivalencia homeomórfica de todos los espacios de Banach separables infinito-dimensionales [3].

Mi contribución [1999b] a este tema ha consistido en proporcionar la una caracterización de los renormamientos τ-Kadec, y en particular Kadec, para los que no había nada hecho en este sentido. Con pequeñas variaciones, la técnica de demostración empleada aquí, es la que me ha permitido abordar otros tipos de normas que discutiremos en los siguientes epígrafes.

Teorema 1.1.A *Sea X un espacio de Banach y τ una topología vectorial sobre X tal que $\overline{B_X}^{\tau}$ es acotado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X admite una norma equivalente τ-Kadec;*

ii) *existe una sucesión (A_n) de subconjuntos convexos de X tal que para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y un τ-abierto U tales que $x \in A_n \cap U$ y $diam(A_n \cap U) < \varepsilon$.*

En los años 90 la propiedad conocida como σ-fragmentabilidad era bastante popular entre los investigadores en Banach no separables [37, 38]. Una versión más fuerte de la σ-fragmentabilidad es la llamada "to have a countable cover by sets of small local diameter" (abreviadamente JNR por las iniciales de Jayne, Namioka y Rogers). La propiedad JNR se caracteriza completamente en términos de la topología débil [55] y coincide con que el espacio sea descriptivo para ésta [34].

Teorema 1.1.B *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X tiene la propiedad JNR;*

ii) *existe una sucesión (A_n) de subconjuntos de X tal que para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y un abierto débil U tales que $x \in A_n \cap U$ y $diam(A_n \cap U) < \varepsilon$;*

iii) *existe una funcion homogenea débilmente inferiormente semicontinua $F : X \to [0, \infty)$ con $\|.\| \leq F \leq 3\|.\|$ tal que la topología de la norma y la topología débil coinciden sobre el conjunto*

$$S = \{x \in X : \ F(x) = 1\}.$$

Muy posteriormente, con Simone Ferrari, Luis Oncina y José Orihuela [2016c] hemos regresado a este tipo de construcciones, demostrando, entre otras cosas, que la función F arriba se puede hacer continua para la norma.

3.1.2. LUR

Una norma se dice localmente uniformemente convexa (LUR) si las relaciones $\|x_n\| \to \|x\|$ y $\|x_n + x\| \to 2\|x\|$ implican que $\|x_n - x\| \to 0$. En el libro [13] se le dedica bastante atención a estas normas porque todos los espacios de Banach con una estructura razonable admiten un renormamiento LUR: reflexivos, duales de los Asplund, $C(K)$'s para varias clases de compactos… Por contra, ℓ_∞ no admite una norma LUR. Históricamente han sido importantes parta entender la estructura de los débil compactos convexos: son la envoltura convexa cerrada de sus puntos fuertemente expuestos.

Uno de los resultados más notables probado por Stanimir Troyanski establece que un espacio que es renormable Kadec y renormable estrictamente convexo es renormable LUR. La prueba original utiliza complicados argumentos probabilísticos (martingalas) y además se pierde la posibilidad de controlar la semicontinuidad de la norma equivalente respecto a topologías dadas por un subconjunto normante del dual. Del mismo problema adolece la caracterización del renormamiento LUR obtenida por Moltó, Orihuela y Troyanski en 1997 [50] (comparable al punto *iii*) en el siguiente teorema). El método geométrico que desarrollé en mi tesis y publicado en [1999c] evita esas dificultades.

Teorema 1.2.A *Sea X un espacio de Banach y sea $Z \subset X^*$ un subespacio normante. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X admite una norma equivalente a la vez LUR y $\sigma(X,Z)$-semicontinua inferiormente;*

ii) *X admite una norma equivalente estrictamente convexa y también admite otra norma equivalente $\sigma(X,Z)$-Kadec;*

iii) *existe una sucesión (A_n) de subconjuntos de X tal que para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y semiespacio $\sigma(X,Z)$-abierto H tales que $x \in A_n \cap H$ y $diam(A_n \cap H) < \varepsilon$.*

Este resultado tiene aplicaciones inmediatas a duales (lo ampliaremos en el siguiente epígrafe) y a espacios de $C(K)$ con la topología de convergencia puntual. La mayor aportación es la caractrización *iii*), que permite también, por ejemplo, demostrar que un espacio WCD posee una norma equivalente LUR inferiormente semicontinua para la topología de convergencia sobre cualquier subespacio normante prefijado. En cuanto a la prueba, con las mismas ideas escribí una más directa del clásico de Troyanski

"Kadec + rotund = renormable LUR"

que aparece ahora como ejercicio en [19, 20]. La adaptación de mi prueba al caso separable también es muy distinta de la original de Kadec, ver [3].

Tras "eliminar" las martingalas en el los resultados sobre renormamiento LUR mencionados, aún quedaba otro teorema del propio Troyanski más sofisticado en términos de medidas de no compacidad y qué abordé y generalicé con métodos geométricos, también más sofisticados, en [2007]. La consecuencia más entendible del resultado de Troyanski se formulaba en términos de la medida de no compacidad de Kuratowski. El mío usa una especie de medida de no super-reflexividad. Para $A \subset X$, sea $\beta_{æ}(A)$ el ínfimo de no los números $\varepsilon > 0$ tal que existe una cota común a la longitud de todas las martingalas $(M_n)_{0\leq n\leq N} \subset L_1([0,1], X)$ con valores en A que satisfacen $\|M_n - M_{n-1}\| \geq \varepsilon$ en casi todo punto (realmente $\beta_{æ}(A) = \mu_5(A)$ del Teorema 3.4.C).

Teorema 1.2.B *Sea X un espacio de Banach tal que para cada $x \in S_X$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un semiespacio H conteniendo x y tal que $\beta_{æ}(B_X \cap H) < \varepsilon$. Entonces X admite una norma equivalente LUR.*

De hecho, se obtiene que el proceso de dentabilidad (ver más adelante en le epígrafe sobre índices ordinales) para cualquier $\varepsilon > 0$ acaba con los puntos de la esfera en ω pasos.

3.1.3. Dual LUR

La compacidad débil* de la bola dual proporciona una ayuda inestimable para mejorar el resultado del epígrafe anterior en ese caso particular, obteniendo así unas caracterizaciones asombrosas, [1999c, 2002a], ya que todas las propiedades que aparecen en el teorema siguiente han sido consideradas por distintos autores desde un punto de vista isomorfo sin saber que eran lo mismo.

Teorema 1.3.A *Sea X^* un espacio de Banach dual. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) X^* *admite una norma dual equivalente LUR;*

ii) X^* *admite una norma equivalente w^*-Kadec;*

iii) X^* *admite una norma dual equivalente tal que las topologías débil y débil* coinciden sobre la esfera unidad;*

iv) X^* *tiene la propiedad JNR*.*

En el caso particular de los espacios $C(K)$, si el dual es LUR necesariamente K es disperso. Robert Deville [12] probó que si $K^{(\omega_1)} = \emptyset$ es posible dicho renormamiento. Nuestro resultado en [2002a] lo caracteriza completamente.

Teorema 1.3.B *Sea K un compacto. Son equivalentes:*

i) $C(K)^*$ *admite una norma dual LUR;*

ii) K *es unión, a lo sumo numerable, de conjuntos relativamente discretos.*

En [2012a] observé que la unión en *ii)* es finita si y sólo si $K^{(\omega)} = \emptyset$.

3.1.4. W*LUR

Una norma se dice τ-localmente uniformemente convexa (τ-LUR) si es τ-inferiormente semicontinua y las relaciones $\|x_n\| \to \|x\|$ y $\|x_n + x\| \to 2\|x\|$ implican que τ-$\lim_n x_n = x$. Cuando τ es la topología débil, la norma se denota WLUR. Moltó, Orihuela, Valdivia y Troyanski [51] demostraron que un espacio WLUR puede ser renormado LUR. Las ideas topológicas de su prueba me pusieron en la pista para tratar las normas W*LUR, es decir cuando τ es la topología débil. La definición clave es la de compacto descriptivo (en sentido de Hansell) que en este caso es lo mismo que decir que la topología posee una network σ-aislada (ver el epígrafe correspondiente).

Este resultado de [2003a] constituye la primera caracterización, sin hipótesis de separabilidad, de un tipo remormamiento por una propiedad exclusivamente topológica, en este caso, la topología débil*.

Teorema 1.4.A *Sea X^* un espacio de Banach dual. Entonces*

a) X^* admite una norma dual equivalente W*LUR si y sólo si (B_{X^*}, w^*) es un compacto descriptivo;

b) $C(K)^*$ admite una norma equivalente W*LUR si y sólo si K es un compacto descriptivo.

Estos espacios volvieron a aparecer en la investigación sobre la metrizabilidad de la esfera respecto a topologías de convergencia sobre un normante que llevamos a cabo con Ferrari y Orihuela con motivo de la tesis del primero. Estos resultados se materializan en los artículos [2016b, 2019], pero sólo hablaré del caso dual donde los resultados son extraordinariamente satisfactorios. La necesaria batería de definiciones topológicas se omite [7, 30].

Teorema 1.4.B *Sea X^* un espacio de Banach dual. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X^* admite una norma dual equivalente W*LUR;

(ii) X^* admite una norma dual equivalente tal que (S_{X^*}, w^*) es un espacio de Moore;

(iii) X^* admite una norma dual equivalente tal que (S_{X^*}, w^*) se (si)metriza por una simétrica ρ con la propiedad de que cada $x^* \in S_{X^*}$ tiene w^*-entornos con ρ-diámetro arbitrariamente pequeño;

(iv) X^* admite una norma dual equivalente tal que (S_{X^*}, w^*) es metrizable;

(v) (B_{X^*}, w^*) es un compacto descriptivo.

3.1.5. Dual estrictamente convexo

En relación con el último resultado del epígrafe anterior, con Ferrari y Orihuela [2019] estudiamos propiedades topológicas de cubrimiento de la esfera unidad próximas a la metrizabilidad pero más débiles. Esto fue abordado para topologías de convergencia sobre un normante, pero nuevamente los resultados más redondos se obtienen para espacios duales. No merece la pena detallar las definiciones que aparecen. Sólo decir que la llamada propiedad llamada parcamente $(*)$ fue introducida por Orihuela, Smith y Troyanski [56] para caracterizar la renormabilidad estrictamente convexa.

Teorema 1.5 *Sea X^* un espacio de Banach dual. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X^* admite una norma dual equivalente estrictamente convexa;*

(ii) *X^* admite una norma dual equivalente tal que (S_{X^*}, w^*) tiene $\mathcal{G}_\delta$-diagonal;*

(iii) *X^* admite una norma dual equivalente tal que sobre (S_{X^*}, w^*) existe una simétrica ρ tal que cada $x^* \in S_{X^*}$ tiene w^*-entornos con ρ-diámetro arbitrariamente pequeño;*

(iv) *X^* admite una norma dual equivalente tal que (S_{X^*}, w^*) tiene $(*)$ con una familia de conjuntos $(\mathcal{U}_n)_{\in\mathbb{N}}$ tal que cada $\mathcal{U}_n$ es un cubrimiento de S_{X^*};*

(v) *(B_{X^*}, w^*) tiene $(*)$ con slices.*

Obsérvese la sutil diferencia entre Teorema 1.4.B *iii*) y Teorema 1.5 *iii*).

3.1.6. ANP

La "asymptotic norming property" fue introducida (en tres variantes) por James y Ho [36] como una propiedad geométrica de la norma que implica la RNP. El problema de saber si un espacio con la RNP puede renormarse con la ANP fue resuelto por Ghoussoub y Maurey para espacios separables [27]. Daré las definiciones pertinentes antes de seguir adelante. Consideremos un conjunto normante $\Phi \subset B_{X^*}$. Decimos que una sucesión en la esfera $(x_n) \subset S_X$ está asintóticamente normada si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x^* \in \Phi$ y $N \in \mathbb{N}$, tales que $x^*(x_n) > 1 - \varepsilon$ para cada $n \geq N$. Decimos que el espacio de Banach X tiene la Φ-ANP si $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{conv}^{\|\cdot\|}(\{x_m : m \geq n\}) \neq \emptyset$ para cada sucesión (x_n) asintóticamente normada por Φ. Finalmente, diremos que X tiene la ANP si tiene la Φ-ANP para algún subconjunto normante $\Phi \subset B_{X^*}$.

Esta caracterización del renormamiento ANP la obtuve en [2003c].

Teorema 1.6.A *Un espacio de Banach X puede renormarse para tener la ANP si y sólo si $X^{**} \backslash X$ es un subconjunto strong $(\mathcal{C} \backslash \mathcal{C})_\sigma$ de X^{**} en la topología débil*.*

La definición de $(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C})_\sigma$ está inspirada en la $\mathcal{H}_\delta$ de Ghoussoub y Maurey, ver [28], de los que hablaré en otra sección, y permite abordar la falta de metrizabilidad de la topología débil*, particularmente en el bidual. En un espacio localmente convexo X diremos que un conjunto E es $(\mathcal{C}\setminus\mathcal{C})_\sigma$ si existen conjuntos convexos cerrados $(A_n), (B_n) \subset X$ tales que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n).$$

Esta noción la aplicaremos en el caso de las topologías débil y débil* en cuyo caso diremos que E es strong $(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C})_\sigma$ si los conjuntos $(A_n), (B_n)$ se pueden tomar con la propiedad adicional de que $d(E, A_n \setminus B_n) > 0$. Con ayuda de dicha definición tenemos estos resultados, también en [2003c].

Teorema 1.6.B *Un espacio de Banach separable X tiene la RNP si y solo si $X^{**} \setminus X$ es un subconjunto $(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C})_\sigma$ de (X^{**}, w^*).*

Teorema 1.6.C *Un espacio de Banach X tiene una norma equivalente LUR si y solo si cada abierto de X es $(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C})_\sigma$.*

Estos resultados ponen de manifiesto lo fértil que resulta mezclar Geometría con Topología Descriptiva en el contexto infinito-dimensional.

3.1.7. UKK*

Cuando se tiene un espacio X con una norma Kadec y una sucesión $(x_n) \subset B_X$ que converge débilmente a cierto $x \in X$, se deduce que si $\|x_n - x\| \geq \varepsilon$, para cierto $\varepsilon > 0$, necesariamente $\|x\| < 1$. Si fijado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq 1 - \delta$ se dice que la norma es uniformemente Kadec-Klee (UKK). Obviamente, el mejor δ que se pueda tomar define el módulo UKK. Esto mismo aplicado en duales un con la topología débil* da lugar a las normas UKK*, a las que le han prestado atención Prus, Odell, Schlumprecht, Godefroy, Kalton y Lancien, entre otros. La ventaja de trabajar en duales es que la medida de no compacidad de Kuratowski juega un papel similar al diámetro con el renormamiento LUR. Las normas UKK son llamadas hoy día AUC (asymptotic uniformly convex).

La caracterización que obtuve en [2010] del renormamiento UKK* se hace por medio del índice de Szlenk, del que hablaré en otra sección más ampliamente.

Teorema 1.7 *Sea X un espacio de Banach tal que $Sz(X) \leq \omega$. Entonces X puede renormarse para que su dual sea UKK* con módulo "power type".*

Este teorema se conocía en el caso separable [43], demostrado posteriormente con significativas mejoras cuantitativas en [25]. Mi intención en aquella época era abordar simultáneamente los renormamientos uniformes: UR y UKK* con las técnicas que había usado en LUR y Kadec. El trabajo con UKK* fue consumado en primer lugar porque la medida de Kuratowski es más agradable de manejar que el diámetro, pero las ideas clave en ambos trabajos son las mismas. Incidentalmente, mi resultado prescindía de la hipótesis de separabilidad, por lo que ahora es citado junto a los otros cuando se quiere enfatizar el caso no separable. Sin embargo, el resultado es posible demostrarlo con una reducción al caso separable, y de hecho, con Luis Carlos García Lirola lo hacemos así en [2021a] para el caso reflexivo porque necesitamos la fina estimación de [25] para otros propósitos.

3.1.8. AUS

Los espacios de Banach asintóticamente uniformemente suaves (AUS) son exactamente los que tienen dual UKK*, pero pueden ser definidos de manera directa como sigue. El módulo de suavidad asintótica se define para $\varepsilon > 0$ como

$$\overline{\rho}_X(\varepsilon) = \sup_{\|x\|=1} \operatorname*{inf}_{\mathcal{D}(X/Y)<\infty} \sup_{y\in Y,\, \|y\|\leq\varepsilon} (\|x+y\|-1),$$

siendo $\mathcal{D}$ la dimension, de manera que Y recorre los subespacios de codimensión finita. El espacio se dice AUS si $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}\overline{\rho}_X(\varepsilon) = 0$.

En mi artículo [2013] observé que podía construir este tipo de normas directamente en X sin pasar por la dualidad. Para ellos se emplea un tipo de derivación y su índice asociado, $Gz(B_X, \varepsilon)$, de los que hablaré en otra sección. La aproximación directa a este tipo de normas, además de recuperar el "power type' por otro camino, me permitió refinar un resultado Johnson, Lindenstrauss, Preiss y Schechtman [40].

Teorema 1.8 *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X tiene una norma equivalente AUS;*

ii) *X tiene una norma equivalente AUS cuyo módulo satisface $\overline{\rho}_X(\varepsilon) = O(\varepsilon^p)$ para algún $p > 1$;*

iii) *X tiene una norma equivalente tal que $\overline{\rho}_X(\varepsilon) < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$;*

iv) *existen $c > 0$, $p > 1$ tales que $Gz(B_X, \varepsilon) > c\,\varepsilon^{-p}$ para cada $\varepsilon \in (0, 1)$;*

v) *existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que $Gz(B_X, \varepsilon) > \varepsilon^{-1} + 1$.*

Este resultado implica en particular que si un espacio X no es renormable AUS para cualquier norma equivalente cumple que $\overline{\rho}_X(\varepsilon) = \varepsilon$.

3.1.9. UR

Las normas uniformemente convexas (UR), junto con sus duales las uniformemente suaves, han recibido mucha atención desde que Clarkson las introdujera en 1936. En relación con ellas aparecen las nociones de tipo y cotipo. Y por supuesto, la noción de súper-reflexividad debida a James que identifica isomórficamente la renormabilidad UR gracias a los teoremas de Enflo y Pisier. Sobre el primero, he aportado dos pruebas alternativas, una en [2015a] y otra en colaboración con Guillaume Grelier en [2021b] bastante más natural. Para la comprender como aparecen los módulos de tipo potencia, Lancien utilizó los índices de dentabildad y de Szlenk. Éste último es submultiplicativo de manera natural y aplicado al $L^2(X)$ proporciona una cota del de dentabilidad, pudiendo trasladar esta información al módulo de convexidad del renormamiento. Sin embargo, es obvio que la fórmula de Lancien no es óptima.

Durante bastante tiempo estuve intentado mejorar la estimación del módulo de Lancien, para obtener el "power type" optimo del teorema de Pisier, pero me ha resultado imposible hacerlo con el índice de dentabilidad. Así que usé otro índice, que podría llamarse de "adelgazamiento de slices", que describe perfectamente lo mejor que se puede esperar de un renormamiento UR [2015a].

Teorema 1.9.A *Sea X un espacio súper-reflexivo. Existe una función $\mathfrak{N}_X$ decreciente submultiplicativa definida en $(0,1]$ tal que $\mathfrak{N}_X(t)^{-1}$ es el supremo, salvo equivalencia, en el orden asintótico $\preceq$ del conjunto*

$$\{\delta_{|||\cdot|||}(t) : |||\cdot||| \text{ es una norma equivalente en } X\}.$$

Este resultado fue comentado por Pisier en [59]. Posteriormente, con García Lirola [2021a] obtuvimos una expresión explícita para el supremo de los módulos de convexidad, que resulta ser la misma función que usó Lancien como cota del índice de dentabildad.

Teorema 1.9.B *Para todo espacio X súper-reflexivo se tiene*

$$\mathfrak{N}_X(t) \sim \mathrm{Sz}(B_{L^2(X)}, t).$$

Esto deja todavía abierta la pregunta de si el índice de dentabilidad es una función equivalente. Por otra parte, el supremo de los módulos no siempre es un máximo, como un inoportuno ejemplo de Figiel [23] pone de manifiesto. No obstante, modificaciones de $\mathfrak{N}_X(t)$ (mutiplicando por un logaritmo) si son mejorables por un módulo. Otra cosa, es reconocer que funciones son mejorables por un módulo. Sabemos que los módulos de convexidad son cotipos generalizados en sentido de Figiel [24]. Una función positiva no decreciente ϕ es un *cotipo generalizado* de X si existen constantes $a, b > 0$ de manera que $\sum_{k=1}^{n} \phi(\|x_k\|) \leq b$

si los puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ satisfacen

$$\int_0^1 \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \| \, dt \leq a$$

siendo $(r_k(t))$ las funciones de Rademacher. Las siglas UMD se refieren a un tipo particular de espacios súper-reflexivos (unconditional martingale difference), ver [59]. El siguiente resultado de [2021a] está en el espíritu de lo que Figiel demostró para espacios con base incondicional.

Teorema 1.9.C *Sea X un espacio de Banach UMD y sea ϕ un cotipo generalizado. Entonces existe una norma equivalente $|||\ |||$ en X tal que $\delta_{|||\ |||}(t) \geq c\,\phi(t)$ para algún $c > 0$.*

3.1.10. Algunos tipos de diferenciabilidad

Renormar duales con distintos tipos de rotundidad tiene como consecuencia distintos tipos de diferenciabilidad en el predual. En general, una norma dual estrictamente convexa se corresponde con una diferenciable Gâteaux y una dual LUR se corresponde con una norma diferenciable Fréchet. Incidentalmente se puede conseguir versiones un poco más complicadas de diferenciabildad, como ésta de [2003a].

Teorema 1.10.A *Sea X un espacio de Banach tal que (B_{X^*}, w^+) es un compacto descriptivo. Para cada conjunto de Asplund $M \subset X$ existe una norma equivalente en X que es uniformemente diferenciable según las direcciones de M en cada punto (excepto 0).*

De los espacios con norma strong UG se sabe que se ubican entre los espacios Hilbert generados y los subespacios de los mismos. El siguiente resultado de [2016a] los caracteriza completamente.

Teorema 1.10.B *Un espacio de Banach X admite una norma equivalente fuertemente uniformemente Gâteaux si y sólo si existe un súper débil compacto $K \subset X$ que genera un subespacio denso.*

3.2. Índices ordinales y estructura de conjuntos convexos

Las técnicas que desarrollamos en relación con el renormamiento LUR nos permitieron obtener una prueba alternativa del resultado de Gilles Lancien [47] que afirma que un espacio de Banach dual con índice de Szlenk numerable admite una norma equivalente dual LUR. La prueba original usaba una relación entre el índice de Szlenk y el de dentabilidad que tiene un interés independiente. Por otra parte, la posibilidad de encontrar puntos de continuidad o dentabilidad se relaciona con la RNP y propiedades del conjunto de puntos extremos [6].

3.2.1. Índices de Szlenk y dentabilidad

Los índices ordinales se definen a partir de una "set-derivation": a un conjunto no vacío (de cierta clase) se le asigna un subconjunto propio (en la misma clase), ver [45]. El índice asociado es el ordinal que es preciso iterar la derivación para llegar al conjunto vacío. La derivación asociada a la propiedad del punto de continuidad produce el índice de Szlenk, mientras que la asociada a la dentabilidad (RNP) produce el índice homónimo, que es mayor por ser la derivación con dentabilidad más lenta que con punto de continuidad. Lancien [47] demostró que si el si el índice de Szlenk de un espacio de Asplund es numerable entonces el de dentabilidad también lo es, aplicando para ello una conexión profunda con la Topología Descriptiva descubierta por Bossard [4] y el teorema de Kunen-Martin que implica la existencia de cierta función creciente $\psi : \omega_1 \to \omega_1$. Empecé a investigar la cuestión con el ánimo de entender esto en términos puramente geométricos. Así la primera cota explícita de la acotación entre índices la obtuve en [2007].

Teorema 2.1.A *Para un espacio de Asplund X se tiene $Dz(X) \leq \omega^{Sz(X)}$.*

El resultado fue recogido en [31]. Es necesario decir que no buscaba una cota óptima en ese momento, por lo que la exponencial de ordinales me pareció la función más adecuada para "tragarse" los ordinales menores que aparecían en la inducción transfinita. La prueba también usaba, entre otras cosas, el siguiente resultado (reformulado para cubrimientos en [2019]) cuya consecuencia más inmediata es que el índice de dentabilidad y el índice de Szlenk convexo avanzan a la misma "velocidad".

Teorema 2.1.B *Sea X localmente convexo. Sean $\langle\cdot\rangle'_\varepsilon$ $[\cdot]'_\varepsilon$ las derivaciones con entornos y semiespacios (slices) respectivamente respecto a alguna métrica. Entonces, para cada compacto convexo $C \subset X$ se tiene $ext([C]^\omega_\varepsilon) \subset \langle C\rangle'_\varepsilon$.*

La comparación entre los índices de dentabilidad y de Szlenk fue mejorada posteriormente por Hajek y Schlumprecht que demostraron que ambos índices son iguales si el de Szlenk es mayor que ω^ω. El resultado óptimo entre los índices de Szlenk convexo y Szlenk para ordinales hasta ω^ω lo obtuve con Lancien y Prochazka en [2017a], para un débil* compacto convexo cualquiera. Al final, $Dz(X) = Sz(X) \cdot \omega$ hasta ω^ω, siendo después $Dz(X) = Sz(X)$.

3.2.2. Índice "goal"

Con la intención de estimar con mayor precisión los índices de Szlenk de algunos espacios busqué una derivación que fuese más rápida, o dicho de otra manera, la de Szlenk no la pudiera "adelantar". La idea es medir los entornos que se detraen “por dentro” tomando el supremo de los radios de las bolas de codimensión finita contenidas en ellos. El índice asociado a esta derivación lo llamé *goal* por la similitud con encajar balones y está controlado por abajo por los módulos AUS de normas equivalentes. En [2012a], donde comencé a desarrollar estas ideas, pruebo el siguiente criterio de compacidad.

Teorema 2.2 *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $Sz(\overline{T(B_X)}, \varepsilon) < Gz(B_X, n\varepsilon)$, entonces T es compacto.*

Este resultado implica el clásico de Pitt de compacidad para operadores de ℓ_{p_1} en ℓ_{p_2} si $p_1 > p_2$ al crecer más rápidamente el índice Gz del dominio que el Sz de la imagen. Pero también se puede aplicar con índices infinitos. Por ejemplo, si T es el espacio de Tsirelson, se tiene que $Gz(T^*) = \omega^\omega$ [2013]. Se deduce que cualquier operador de un espacio AUS en T va a ser compacto, lo que es un resultado más fuerte que no contener copias de ℓ_p reflexivo. Como hemos dicho más arriba, el renormamiento AUS se caracteriza por cierto comportamiento de los índices $Gz(X, \varepsilon)$.

3.2.3. Conjuntos $\mathcal{H}_\delta$

Un conjunto acotado C de un dual X^* se dice que es débil*-$\mathcal{H}_\delta$ si $\overline{C}^{w^*} \setminus C$ es una unión numerable de conjuntos débil*-compactos. La definición fue introducida por Ghoussoub y Maurey [26] que la usaron como marco donde algunas de las caracterizaciones de la RNP para conjuntos convexos débil*-compactos siguen funcionando. Sus resultados usaron fuertemente la separabilidad y las martingalas, por lo que decidí entrar en el tema con mi propio punto de vista y el maravilloso teorema de Choquet.

Teorema 2.3 *Sea $C \subset X^*$ un subconjunto convexo cerrado y débil*-$\mathcal{H}_\delta$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) C es (hereditariamente) débil*-dentable;

ii) los subconjuntos débil*-compactos de C son débil*-fragmentables;

iii) C no contiene árboles diádicos;

iv) C tiene la RNP.

Es sabido que la ausencia de árboles diádicos no implica la RNP [5]. En el artículo doy un ejemplo sencillo de un subconjunto con la RNP de un dual que no es débil*-dentable. Lamentablemente los sencillos argumentos de este artículo no he podido adaptarlos a complementarios de conjuntos $(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C})_\sigma$ en la débil*.

3.2.4. Puntos de continuidad y expuestos

Estoy particularmente orgullos de resultado de [2009] porque utiliza definiciones elementales (nivel Licenciado en Matemáticas, de un graduado no podría decir lo mismo lamentablemente). Me gusta verlo como una mezcla de Krein-Milman y el la categoría de Baire.

Teorema 2.4.A *Sea K un conjunto compacto convexo en un espacio localmente convexo y $f : K \to \mathbb{R}$ una función convexa inferiormente semicontinua acotada. Entonces* ext$K$ *f contiene un conjunto denso de puntos de continuidad de f.*

Un resultado clásico de Hervé dice que si un compacto convexo admite una función continua estrictamente convexa es metrizable. El estudio de lo que ocurre si se debilita la condición a solo semicontinuidad inferior, comenzado en [2009] fue profundizado en [2017c] en colaboración con García-Lirola y Orihuela de donde viene la afirmación *b*) de este teorema.

Teorema 2.4.B *Sea K un subconjunto compacto convexo de un espacio localmente convexo. Supongamos que existe una función estrictamente convexa e inferiormente semicontinua definida sobre K.*

a) *Entonces,* ext$K$ *contiene un subconjunto denso que es $\mathcal{G}_\delta$ en K y completamente metrizable.*

b) *K es la envoltura convexa cerrada de sus puntos afínmente expuestos y es linealmente homeomorfo a un débil* compacto de un dual estrictamente convexo.*

Sigo trabajando en el problema de aislar la propiedad topológica de K, si es que la hay, que caracterice el ser K la envoltura convexa cerrada de sus puntos afínmente expuestos.

3.3. Topologías débiles y cuantificación

Cuando comencé la tesina, Gabriel Vera y Bernardo Cascales estaban trabajando en un proyecto cuyo nombre no recuerdo pero podría haberse llamado sin problema "topologías más débiles que la topología débil" (de hecho, el título de uno de los artículos suyos). Diferentes asuntos relativos a la topología débil, débil*, sobre un normante o una boundary, en espacios no separables (WCG, K-analítico, WCD, WLD...), Lindelöf, angelicidad, integral de Pettis, selectores de USCO's... Creo que el contexto queda más o menos descrito, y si hubiera que elegir un lema sería este *"no separable, no metrizable"*. No es de extrañar, por lo tanto, que la mayor parte de estos temas los haya desarrollado con Bernardo.

3.3.1. Distancia a las funciones continuas

La cuantificación de la compacidad débil había sido recientemente estudiada en [21, 29]. Con Bernardo Cascales y Witold Marciszewski abordamos en [2006] el problema relacionado de estudiar cuánto se aleja (uniformemente) de $C(K)$ la clausura en la topología puntual de un conjunto $H \subset C(K)$. Nuestra aproximación al problema usaba la diferencia entre límites iterados como cuantificación de la compacidad puntual. La estimación para la distancia de la envoltura convexa contiene el factor 5 como el el caso de un Banach con la topología débil. El resultado seleccionado es propio del contexto $C(K)$. Supongamos que K es un compacto de un espacio localmente convexo. Denotaremos por $\mathcal{A}(K)$ el conjunto de las funciones afines sobre K y sea $\mathcal{A}^C(K) = \mathcal{A}(K) \cap C(K)$.

Teorema 3.1 *Para cada $f \in \mathcal{A}(K)$ se tiene que $d(f, C(K)) = d(f, \mathcal{A}^C(K))$.*

3.3.2. Bounded tightness

A partir de una sencilla construcción en un espacio normado infinito dimensional de un conjunto que tiene a 0 como punto de acumulación, pero 0 no pertenece a la clausura de ninguno de sus subconjuntos acotados, Bernardo Cascales y yo hacemos un recorrido en [2004b] por distintas propiedades de los espacios localmente convexos que guardan alguna relación con ese hecho. Destaco el siguiente resultado del artículo.

Teorema 3.2 *Sea X un espacio localmente convexo metrizable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) X es linealmente y topólogicamente equivalente a un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;

ii) para cada $A \subset X$ y cada $x \subset \overline{A}^w$ existe $B \subset A$ acotado tal que $x \subset \overline{B}^w$.

3.3.3. Cuantificación de la RNP

La RNP posee un buen número de caracterizaciones de diferente naturaleza: derivación de medidas vectoriales, representación de operadores, dentabilidad, fragmentabilidad en el caso de duales... Siguiendo la tendencia "cuantificadora" junto con Bernardo Cascales y Antonio Pérez abordamos en [2014a] como cuantificar un puñado de estas propiedades. Siendo bastante técnicos la mayor parte de los resultados de este artículo, sólo mencionaré uno de ellos que es bastante significativo. Denotemos con $\gamma(A)$ la medida de no compacidad débil consistente en medir lo que se alejan los puntos de $\overline{A}^{w^*}$ de X. Por otra parte, $\Delta(A)$ el supremo de los números $\varepsilon > 0$ tal que todo subconjunto no vacío de A tiene un slice no vacío contenido en una bola de radio ε. Obviamente Δ es una medida no no RNP.

Teorema 3.3 *Para cada conjunto convexo $A \subset X$ se tiene que $\Delta(A) \leq \gamma(A)$.*

En particular, se recupera este resultado clásico: los conjuntos convexos débil compactos tienen la RNP.

3.3.4. Super compacidad débil

Motivado por un resultado de Cepedello [10], intenté encontrar una forma de localizar la súper-reflexividad en un subconjunto de un espacio de Banach.

Usando la dentabilidad finita, mi definición sólo podía funcionar con conjuntos convexos. Posteriormente, Cheng, Cheng, Wang y Zhang [11] introdujeron la noción de conjunto súper débilmente compacto que permite una tratamiento consistente del caso no convexo. Las investigaciones del caso convexo han dado lugar a varias caracterizaciones, algunas mías, otras en colaboración con Lancien [2021c], y por supuesto, del equipo de L. Cheng.

Teorema 3.4.A *Sea $C \subset X$ un conjunto convexo acotado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *dado $\varepsilon > 0$ no es posible encontrar sucesiones $x_1, \dots, x_n \in C$ arbitrariamente largas tales que*

$$\mathrm{d}(\mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_k\}, \mathrm{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_n\}) \geq \varepsilon$$

para todo $k = 1, \dots, n-1$;

(2) *dado $\varepsilon > 0$, C no contiene árboles ε-separados arbitrariamente altos;*

(3) *$C^{\mathcal{U}}$ es relativamente débil compacto en $X^{\mathcal{U}}$, para $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$;*

(4) *$C^{\mathcal{U}}$ es dentable en $X^{\mathcal{U}}$, para $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$;*

(5) *C es finitamente dentable;*

(6) *C es el soporte de una función acotada uniformemente convexa;*

(7) *hay una norma equivalente $|||\cdot|||$ en X tal que $x \to |||x|||^2$ es uniformemente convexa sobre C;*

(8) *cada función uniformemente continua definida sobre C puede aproximarse uniformemente por diferencia de funciones convexas Lipschitz;*

(9) *Existe un espacio de Banach reflexivo Z y un operador super débilmente compacto $T : Z \to X$ tal que $C \subset T(B_X)$.*

Las cuatro primeras son de Cheng et al. [11] aunque la forma de (3) con ultrafiltros la propuse en [2016a]. Ellos llegan también hasta una extraña versión de función uniformemente convexa que es la que permite conectar con (5)–(9). En cuanto al caso no convexo, un resultado de Tu permite aplicar todo lo anterior a la envoltura convexa cerrada. Por lo que los conjuntos súper débilmente compactos, son entre otras cosas, uniformes Eberlein y Banach-Saks.

Hemos estudiado también en [2016a] los espacios que son generados o fuertemente generados por un subconjunto (convexo) súper débilmente compacto. Por ejemplo, para estos últimos se tiene el siguiente resultado que no hemos incluido en la sección de renormamientos por su carácter mixto.

Teorema 3.4.B *Sea X un espacio fuertemente generado por un conjunto súper débilmente compacto. Existe una norma equivalente en X cuya restricción a* *cada subespacio reflexivo es simultáneamente uniformemente convexa y uniformemente Fréchet.*

A pesar de la "exótica" hipótesis, este tipo de espacios incluye a $L^1(\mu)$ y $L^1(\mu, X)$ para X súper-reflexivo, y alguno más incluso que hubo que construir a petición del referee del artículo para demostrar que el resultado es estrictamente más general que los precedentes.

Posteriormente, en [2021b] con Grelier hemos trabajado en una version cuantitativa de la súper compacidad débil. El siguiente resultado sigue la enumeración del Teorema 3.4.A, excepto las tres últimas condiciones que no considero muy estéticas en este caso

Teorema 3.4.C *Sea $C \subset X$ un conjunto convexo acotado. Considere los siguientes números:*

(μ_1) *el supremo de los $\varepsilon > 0$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_1, \ldots, x_n \in C$ tales que $\mathrm{d}(\mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}, \mathrm{conv}\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}) \geq \varepsilon$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$;*

(μ_2) *el supremo de los $\varepsilon > 0$ tales que para existen árboles ε-separados de altura arbitraria;*

(μ_3) $= \Delta(C^{\mathcal{U}})$*, para $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$;*

(μ_4) $= \gamma(C^{\mathcal{U}})$*, para $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$;*

(μ_5) *el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ tales que $\mathrm{Dz}(C, \varepsilon) < \omega$;*

(μ_6) *el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ tales que C soporta una función ε-uniformemente convexa.*

Entonces $\mu_1 \leq \mu_2 \leq 2\mu_3 \leq 2\mu_4 \leq 2\mu_1$ y $\mu_4 \leq 2\mu_5 \leq 2\mu_6 \leq 2\mu_2$.

Diremos también aquí que hemos obtenido la versión cuantificada del paso a la envoltura convexa utilizando la cantidad μ_4, que es la que mejor funciona en ausencia de convexidad.

3.4. Topología General y Descriptiva

Las propiedades de las topologías débiles en espacios de Banach generales, sobre todo no separables, son motivo de que desde esta teoría se le preste especial atención a la Topología General (o conjuntista). Por ejemplo, saber en qué condiciones la topología débil es normal, o la bola del dual sucesionalmente compacta. El estudio de la complejidad de los conjuntos en un espacio topológico se conoce como Topología Descriptiva.

3.4.1. Espacios Borel absolutos

El estudio de las ideas tras los teoremas de Edgar y Schachermayer [16, 17] sobre conjuntos de Borel débiles en espacios con norma Kadec me condujo al estudio de los espacios Borel absolutos en el marco no metrizable. Un espacio topológico se dice Borel absoluto si es un subconjunto de Borel en cualquier espacio mayor para el que admita una inmersión. Un resultado clásico de Lavrentiev, ver [44], implica que los subconjuntos de Borel de un espacio métrico completo son Borel absolutos. Fuera del caso metrizable no se había hecho nada. De hecho, tuve incluso que introducir un clasificación de los conjuntos de Borel en espacios topológicos generales. Por ejemplo, la *primera clase aditiva* son los conjuntos de tipo $(\mathcal{G} \wedge \mathcal{F})_\sigma$, es decir, uniones numerables de intersecciones de abiertos y cerrados.

Teorema 4.1.A *Sea (X, τ) un espacio topológico regular. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

i) *(X, τ) es un espacio Borel absoluto;*

ii) *$(A, \tau|_A)$ es Borel absoluto para cada $A \in Borel(X, \tau)$;*

iii) *existe una topología Čech-completa δ sobre X más fina que τ y una sucesión (A_n) de subconjuntos τ-Borel de X tal que para cada $x \in X$ y cada $V \in \delta$ con $x \in V$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $U \in \tau$ tales que $x \in A_n \cap U \subset V$;*

iv) *existe una métrica completa d sobre X más fina que τ y una sucesión (A_n) de subconjuntos τ-Borel de X tal que para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $U \in \tau$ tales que $x \in A_n \cap U$ y $diam(A_n \cap U) < \varepsilon$.*

Entonces, iv) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i). Si además (X, τ) es completamente regular, entonces i), ii) y iii) son equivalentes. Si además (X, τ) es metrizable, entonces todos las afirmaciones son equivalentes.

En relación con esto, también introduje una clase de aplicaciones borelianas que evitan algunos de los problemas que presenta la medibilidad Borel en el ámbito no metrizable y no separable (aquí hay precedentes de Hansell [32, 33], pero en espacios métricos). No entraré en detalles, sólo decir que uno de los usos más relevantes que encontré se explica en el siguiente epígrafe. Una curiosidad, las técnicas desarrolladas en relación con la ANP me permitieron probar esta curiosidad.

Teorema 4.1.B *Sea X un espacio de Banach que es isomorfo a un dual con una norma w^*-Kadec. Entonces X es un $(\mathcal{G} \vee \mathcal{F})_\delta$ en (X^{**}, w^*).*

En general un espacio isomorfo un espacio con una norma Kadec es un $(\mathcal{G} \wedge \mathcal{F})_{\sigma\delta}$, ver Edgar [16, 17].

3.4.2. Medibilidad Borel de inversos de operadores

Saint-Raymond [60] encontró en 1976 que la clase de Borel del inverso (como aplicación) de un operador inyectivo $T : X \to Y$ entre espacios de Banach separables, que es un ordinal numerable α, es exactamente el número de veces que hay que iterar el cierre sucesional (en la topología débil*) de $T^*(Y^*)$ para obtener X^*. Mencionemos que el cierre sucesional de un subespacio débil*-denso de X^* alcanzará a todo X^* después de una cierta cantidad numerable de iteraciones es un resultado clásico de Banach.

La extensión al marco no separable del resultado de Saint-Raymond requirió de varias modificaciones: cambiar las sucesiones por redes acotadas (esto no es preciso si el dual es angélico) y requerir una hipótesis técnica ya utilizada por Hansell en su estudio de las aplicaciones borelianas entre espacios métricos no separables. No daré la definición, que es muy técnica, pero sí decir que se cumple automáticamente en espacios WCD.

Teorema 4.2.A *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal acotado inyectivo entre espacios de Banach. Supongamos que T es co-σ-discreto. Entonces T^{-1} es medible Borel si y solo si el bn-order de T^*Y^* es numerable, y en tal caso, éste coincide con la clase de Borel de T^{-1}.*

Las técnicas desarrolladas en el artículo permiten obtener este criterio.

Teorema 4.2.B *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal acotado inyectivo entre espacios de Banach que es también co-σ-discreto. Entonces T^{-1} es medible Borel de clase α si se cumplen algunas de estas condiciones:*

(a) existe un conjunto abierto acotado no vacío $B \subset X$ tal que TB es de clase aditiva α en TX;

(b) para cada subespacio separable $E \subset X$, la restricción $T|_E$ tiene inversa con clase de Borel a lo sumo α.

3.4.3. Selectores medibles

Bernardo Cascales y yo estudiamos en [2003b] en problema de saber si dado un subespacio proximinal (no separable) $Y \subset X$ es cierto que $L^p(Y)$ es proximinal en $L^p(X)$ para $1 \leq p \leq +\infty$. Un momento de reflexión muestra que la dificultad está en construir una función medible en $L^p(Y)$ que para casi todo punto es la mejor aproximación de una función dada de $L^p(X)$.

Teorema 4.3.A *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad completo, X un espacio de Banach, $Y \subset X$ un subespacio WCD y $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces, $L^p(Y)$ es proximinal en $L^p(X)$ si y sólo si, Y es proximinal en X.*

Parte de la dificultad de conseguir la función medible es saber como de buenos son, en sentido descriptivo, los son los conjuntos para los que se resuelve un problema extremal. Demostramos en [2003b] un resultado muy general al respecto, pero aquí pondré una de las consecuencias más significativas.

Teorema 4.3.B *Sea X un espacio de Banach WCD. Entonces el conjunto de Bishop-Phelps (o "norm attaining")*

$$\mathcal{NA} = \{x^* \in X^* : \exists x \in B_X, x^*(x) = \|x^*\|\}$$

es Čech-analítico en (X^*, w^*).

Otros aspectos de las funciones medible vector-valuadas ha sido abordado con José Rodríguez es [2012b] que me propuso explotar una idea de mi tesina.

3.4.4. Compactos de Namioka-Phelps

En 1975 Namioka y Phelps [53] descubrieron que si el dual de un espacio de Banach X tiene una norma LUR, entonces X es Asplund. Por este motivo llamé en mi tesis compactos de Namioka-Phelps a los que son homeomorfos a un débil* compacto de un dual LUR e inicié un estudio siguiendo como modelo el que Namioka hizo de los compactos de Radon-Nikodym [52]. Los compactos NP pueden caracterizarse internamente y resultan tener muchas propiedades de estabilidad, pero es posible que su imagen continua no conserve la propiedad al igual que ocurre con los de RN. Sería conveniente revisar el ejemplo de Avilés y Koszmider [1] para ver si proporciona una respuesta negativa.

Teorema 4.4 *Sea K un compacto. Son equivalentes:*

i) K es Namioka-Phelps;

ii) K es Radon-Nikodym y descriptivo (tiene una network σ-aislada);

iii) Existe una métrica d inferiormente semicontinua en K y una sucesión (A_n) de subconjuntos de K tal que para cada $x \in K$ y cada $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y un entorno U de x tales que $x \in A_n \cap U$ y $diam(A_n \cap U) < \varepsilon$.

Haydon demostró [35] que $C(K)$ es renormable LUR para K compacto NP, lo que es el resultado más importante que involucra mi definición hasta la fecha.

3.4.5. Compactos descriptivos

Mencionados en relación el renormamiento W*LUR, los compactos descriptivos son a los compactos fragmentables lo que los compactos NP son a los RN. Recordemos que la definición de descriptivo se debe a Hansell y en su forma original resulta muy extraña. En mi tesis demostré que descriptivo en sentido de Hansell equivale a Čech-analítico con network σ-aislada, lo que permite en el caso compacto preocuparse únicamente de la network. Los compactos descriptivos incluyen a los NP, a los de Gul'ko y a los definidos por medio de familias casi disjuntas de subconjuntos de $\mathbb{N}$ (lo que incluye un interesante ejemplo de Argyros y Mercourakis, ver [18]). A su vez, los compactos descriptivos son fragmentables, y como las métricas fragmentantes no tienen que ser semicontinuas hay bastante disponibilidad de ellas.

Teorema 4.5 *Un compacto K es descriptivo si y sólo si existe una métrica fragmentante en K para la cual el índice de Szlenk es a lo sumo ω.*

Las propiedades de los compactos descriptivos han sido estudiadas en detalle con Luis Oncina en [2004c]. Son sin duda uno de los objetos topológicos más interesantes con los que he trabajado y en cada conferencia que me ha sido posible he tratado de llamar la atención de los topólogos generales sobre los interesantes problemas abiertos que quedan en relación con ellos, como caracterizarlos entre los compactos de Corson.

3.5. Análisis Funcional no Lineal

Este tópico alude realmente a una espacie de "cajón de sastre" que incluye el estudio de ciertas aplicaciones no lineales, Análisis Convexo e, incluso, algo de clasificación no lineal de espacios de Banach.

3.5.1. Aplicaciones dentables

Las aplicaciones dentables la introduje en [2008] inspirado por la RNP y las funciones de la primera clase de Baire. Sin embargo, allí sólo me ocupé de las que son finitamente dentables, cuyo desarrollo utiliza un renormamiento uniformemente convexo "adaptado". El desarrollo de la teoría de aplicaciones dentables lo acometí con García Lirola en [2018b] como parte de su tesis doctoral. Una función $f : C \to M$ definida sobre un conjunto convexo cerrado con valores en un espacio métrico se dice dentable si para cada $A \subset C$ acotado no vacío y $\varepsilon > 0$ existe H semiespacio abierto tal que $A \cap H \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(f(A \cap H)) < \varepsilon$. El conjunto de la funciones dentables uniformemente continuas sobre subconjuntos acotados de C en M será denotado $\mathcal{D}_U(C, M)$. Entre los numerosos resultados obtenidos, este de dentabilidad simultánea es uno de los más significativos.

Teorema 5.1 *Sea $C \subset X$ un subconjunto convexo cerrado acotado. Dadas funciones $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{D}_U(C, \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, existe un semiespacio abierto H tal que $C \cap H \neq \emptyset$ y*

$$\max\{\operatorname{diam}(f_1(C \cap H)), \ldots, \operatorname{diam}(f_n(C \cap H))\} < \varepsilon.$$

3.5.2. Diferencias de funciones convexas

En [2003c] y [2008] he dado versiones localizadas de resultados de Cepedello [10], pero no es hasta [2018b] con García Lirola y mejores "herramientas" que obtenemos el siguiente resultado que se puede decir óptimo.

Teorema 5.2 *Sea $f\colon C \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua definida en un conjunto cerrado convexo acotado. Considere las siguientes afirmaciones:*

(i) f es límite uniforme de funciones $\mathcal{DC}$-acotadas;

(ii) f es finitamente dentable;

(iii) f es límite uniforme de funciones de funciones $\mathcal{DC}$-Lipschitz;

(iv) f es numerablemente dentable;

(v) f es $(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C})_\sigma$-medible;

(vi) f es límite puntual de una sucesión de funciones $\mathcal{DC}$-Lipschitz.

Entonces $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \not\Rightarrow (v) \not\Rightarrow (iv) \not\Rightarrow (iii)$.

3.5.3. Funciones uniformemente convexas

Estas funciones han sido mencionadas en relación con la súper compacidad débil. Pongamos explícitamente la definición. Sea $\varepsilon > 0$. Una función propia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice ε-uniformemente convexa si existe $\delta > 0$ tal que si $\|x-y\| \geq \varepsilon$, entonces

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \delta.$$

La función se dice uniformemente convexa si es ε-uniformemente convexa para cada $\varepsilon > 0$. Notemos que la definición está formulada en términos de puntos medios, por lo que una función uniformemente convexa requerirá cierta regularidad para ser convexa. Más insalvable el caso de una función ε-uniformemente convexa que no tiene por qué cumplir la desigualdad de convexidad para puntos a distancia menor que ε. Sin embargo, con Grelier [2021b] hemos demostrado lo siguiente.

Teorema 5.3 *Sea $\varepsilon > 0$ y sea f una función propia ε-uniformemente convexa tal que su envoltura convexa inferiormente semicontinua* $\operatorname{conv}(f)$ *es propia. Entonces* $\operatorname{conv}(f)$ *es ε'-uniformemente convexa para todo $\varepsilon' > \varepsilon$.*

3.5.4. Coarse embeddings

Gracias a la colaboración con Gilles Lancien en [2018c] he podido adentrarme un poco en la clasificación no lineal de espacios de Banach. El siguiente resultado muestra un fenómeno de "concentración" para los grafos entrelazados de Kalton G_k. En el siguiente resultado I_k denota los pares de elementos estrictamente entrelazados.

Teorema 5.4 *Sea $p \in (0, +\infty)$ y X un espacio de Banach quasi-reflexivo p-AUS. Existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, cualquier subconjunto infinito $\mathbb{M}$ de $\mathbb{N}$, cualquier función $f : (G_k(\mathbb{M})) \to X^{**}$ Lipschitz y cualquier $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto infinito $\mathbb{M}'$ de $\mathbb{M}$ tale que*

$$\forall(\overline{n}, \overline{m}) \in I_k(\mathbb{M}') \qquad \|f(\overline{n} - f(\overline{m})\| \leq C\, Lip\, k^{1/p} + \varepsilon.$$

Estos resultados extienden los de Kalton y Randrianarivony [42] para el caso reflexivo y se aplican a la estabilidad de propiedades tipo Banach-Saks por inmersiones *coarse Lipschitz*.

3.5.5. Bases greedy

Gustavo Garrigós y Eugenio Hernández me invitaron a colaborar en un proyecto, al que después se sumaron Fernando Albiac y José Luis Ansorena, que quedó materializado en [2015b]. Dada una base de Schauder seminormalizada en un espacio de Banach X, algoritmo *greedy* consiste en sumar la serie asociada a un elemento $x \in X$ en orden decreciente de los valores absolutos (o módulos) de sus coeficientes. Como el orden depende de cada elemento, las "proyecciones" asociadas $\{\mathcal{G}_n\}$ no son lineales. Las bases se clasifican de acuerdo con la calidad de la convergencia del algoritmo. En particular, una base es *quasi-greedy* si existe $c > 0$ tal que $\|\mathcal{G}_n(x)\| \leq c\|x\|$ para cada $x \in X$. Para $A \subset \mathbb{N}$ finito, denotemos por S_A la proyección sobre el subespacio generado por $\{e_n\}_{n\in A}$ y sea $k_N = \sup_{|A|\leq N} \|S_A\|$. Con estas definiciones se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.5 *Sea X un espacio de Banach súper-reflexivo y sea $\mathcal{B} = \{e_m\}_{n=1}^{\infty}$ una base quasi-greedy. Entonces existe una constante $\epsilon \in (0, 1)$, que depende de $\mathcal{B}$, tal que $k_N(\mathcal{B}) = O(\log N)^{1-\epsilon}$.*

Esto supone una cierta mejora sobre la estimación $k_N(\mathcal{B}) = O(\log N)$ de [14] en espacios de Banach generales.

3.6. Miscelánea en Banach

En ocasiones, pensando en temas muy específicos se encuentran resultados que aluden a conceptos básicos en espacios de Banach.

3.6.1. Un espacio universal

Sea K un compacto y $H \subset K$ un subconjunto cerrado. El operador de restricción $|_H : C(K) \to C(H)$ está definido por $f \to f|_H$ para $f \in C(K)$ Los espacios de Banach separables pueden indexarse con los subconjuntos cerrados del intervalo $[0,1]$ de esta peculiar manera probada en [2014b].

Teorema 6.1 *Existe un subespacio cerrado $W \subset C[0,1]$ con la siguiente propiedad: para cada espacio de Banach separable X existe un subconjunto cerrado $H \subset [0,1]$ tal que X es isométrico a $W|_H$.*

El misterioso espacio W resulta ser una copia de ℓ_1 con un renormamiento adecuado. La indexación es, por supuesto, redundante y no todo subconjunto cerrado de $[0,1]$ conduce a un espacio de Banach. Sin embargo, la familia de subconjuntos H de $[0,1]$ para los que $W|_H$ es Banach es un $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ en la topología de Vietoris.

3.6.2. Caracterización de los espacios que contienen a c_0

El siguiente resultado lo obtuve con Antonio Pérez en [2017b] donde se pueden ver algunas versiones cuantitativas del mismo.

Teorema 6.2 *Un espacio de Banach X no contiene a c_0 si y sólo si para cada conjunto no vacío $C \subset X$ y $\varepsilon > 0$ existen puntos $x_1, \ldots, x_n \subset C$ tales que $\bigcap_{k=1}^n (C - x_k)$ tiene diámetro menor que ε.*

3.6.3. Asplund es lo mismo que no contener ℓ_1

Obviamente no lo es, si se pide que la copia de ℓ_1 esté en el propio espacio. Por otra parte, si K no es disperso entonces $C(K)$ es universal para los separables. El resultado que probé en [2005a] dice lo siguiente.

Teorema 6.3 *Para un espacio de Banach X son equivalentes:*

i) *X no es Asplund;*

ii) *$C(B_{X^*})$ contiene una copia isomorfa de ℓ_1 compuesta de funciones Lipschitz respecto a la norma.*

En el mismo artículo hay resultados para $C(K)$ con K fragmentable que generalizan hechos conocidos cuando K es disperso, porque un compacto es disperso si y sólo si es fragmentable con respecto a la métrica discreta, que, a su vez, hace Lipschitz todas las funciones definidas sobre K.

3.6.4. Copias Lipschitz de espacios clásicos en $C(K)$

El resultado anterior motivó un pequeño proyecto consistente en la investigación de cuando un espacio $C(K)$ contiene copias de ciertos espacios hechas de funciones Lipschitz. Es bien conocido que si el compacto es metrizable y la propiedad de Lipschitz se refiere a la propia métrica, no puede contener subespacios infinito-dimensionales compuestos de funciones Lipschitz. Con Natalia Jonard-Pérez obtuve en [2016d] una versión precisa de hasta que dimensión se puede meter isométricamente el espacio euclídeo en un $C(K)$.

Teorema 6.4.A *Sea (K,d) un compacto métrico no numerable y $n \in \mathbb{N}$. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(i) *existe una sobreyección Lipschitz $\phi : K \to \mathbb{I}^n$;*

(ii) *$C(K)$ contiene una copia isométrica de cada espacio de Banach $(n+1)$-dimensional compuesta de funciones Lipschitz;*

(iii) *$C(K)$ contiene una copia del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_2)$ compuesta de funciones Lipschitz.*

Además, si K es una variedad Lipschitz, las condiciones (i), (ii) y (iii) son también equivalentes a

(iv) *la dimension de K el al menos n.*

Si se quiere, seguir por esta línea, debemos hacer como en el Teorema 6.3 y usar una métrica d semicontinua inferiormente más fina que la topología. En esas condiciones, $C(K)$ contiene siempre una copia Lipschitz de c_0. Para espacios de tipo ℓ_p con $1 < p < +\infty$ tenemos que limitarnos a un tipo particular de compactos, bolas de espacios $\ell_{p'}$, para obtener resultados precisos. Los primeros resultados para contenidos isomorfos los incluí en [2012a], pero para contenido isométrico [2014b] dan una caracterización precisa.

Teorema 6.4.B *Sea $p \geq 1$ y consideremos la bola B_{ℓ_p} con la topología de convergencia puntual, que la hace compacta, y consideremos también en ella la métrica inducida por la norma. Entonces $C(B_{\ell_p})$ contiene una copia isométrica de ℓ_q compuesta de funciones Lipschitz si y sólo si $\frac{p}{p-1} \leq q < \infty$.*

Capítulo 4

Proyecto de Investigación

En el capítulo anterior se han expuesto varias líneas que he seguido a lo largo de estos años, siendo muy coherentes algunas de ellas en cuanto a técnicas. Eso nos invita a pensar que un trabajo de revisión y reelaboración, podría dar lugar a *surveys* sobre teoría de renormamientos, compacidad en espacios de Banach y aplicaciones de la Topología descriptiva a Banach, por decir algunos. Esta es una posibilidad atractiva y que quizás acometamos más adelante, porque, entre otras cosas, serviría para presentar de manera clara el estado de los resultados, métodos y problemas a futuros estudiantes.

A continuación presentaremos algunas líneas de trabajo que esperamos desarrollar en los próximos años. Ciertamente, en alguna hemos comenzado ya a trabajar, pues de lo contrario todo esto quedaría en un mero brindis al sol. La presentación será escueta porque, en su mayor parte, el contexto de trabajo ya ha sido tratado en el capítulo anterior.

4.1. Sobre los viejos problemas

Los problemas en los que he estado trabajando durante más años siguen siguen estando presentes, aunque en una forma más "destilada", y son siempre una fuente de inspiración. Me quedaré con estos tres bloques del capítulo anterior:

1. Renormamientos
2. Topología Descriptiva en Localmente Convexos
3. Topología General en Banach

Destacaré algunos problemas que tengo presentes en cada uno de estos temas.

Hay numerosos problemas que siguen abiertos en renormamiento, como si RNP implica renormabilidad LUR o si los espacios reflexivos están caracterizados por la $2R$ en general [54]. Mi principal interés es encontrar los argumentos correctos para trabajar con super-reflexividad. En [2021b] hemos encontrado la manera más sencilla de entender el teorema de Enflo, en [2021a] hemos trazado un "puente" entre Pisier [57] y Godefroy-Kalton-Lancien [25], pero la forma sencilla de entender el teorema de Pisier todavía se me escapa. El índice de adelgazamiento para X súper-reflexivo que encontré en [2015a] es realmente el índice de Szlenk de $L^2(X)$. La prueba original de Pisier, así como las ideas de Lancien [47], pasan por la súper-reflexividad de $L^2(X)$ a la que se puede llegar por dos caminos: el renormamiento, es decir probar primero Enflo en X y transferir la norma UR a $L^2(X)$, o bien usar la J-convexidad de James, que no es mucho más fácil. Parece ser que los *spreading models* arrojan un poco de luz sobre la J-convexidad, así que seguiremos por esa línea.

En cuanto a Topología Descriptiva en Localmente Convexos, me interesan la condiciones de tipo descriptivo (o descriptivo-geométrico) que permiten que un conjunto convexo disfrute de propiedades similares a un compacto: puntos extremos, teoremas de representación... Esto está motivado, oviamente, por las propiedades de los conjuntos $\mathcal{H}_\delta$, pero también por la búsqueda de los argumentos adecuados en el famoso resultado de Schachermayer [61]

$$\text{KMP} + \text{CPCP} = \text{RNP}$$

dónde sigue abierto el problema de si realmente es necesaria la PCP.

En cuanto a Topología General vinculada a espacios de Banach, el propósito vagamente podría llamarse "entender por qué los débil compactos son descriptivos". En efecto, esto es así en última instancia por el resultado de Amir-Lindenstrauss, pero otra forma de entender este mecanismo arrojaría luz sobre otros problemas, como entender la propiedad Eberlein uniforme. Por ejemplo, construir una inmersión de un súper débilmente compacto en un Hilbert, aunque no sea lineal, o probar una versión "continua" de resultado de Bell y Marciszewski [2]: un compacto Eberlein scattered de altura a lo sumo ω es uniforme Eberlein.

4.2. Problemas nuevos

Estos son aquellos en los que he comenzado a trabajar recientemente, por lo que tengo una intuición de qué tipo de resultados cabe esperar y cómo podría desarrollarlos. En estos problemas, al contrario que la mayor parte de los problemas "antiguos", la separabilidad no es una hipótesis simplificadora.

4.2.1. Súper compacidad

Aunque empecé a trabajar hace unos años [2008, 2016a] el tema había estado bloqueado por el problema de la envoltura convexa, resuelto afirmativamente por Kun Tu [63]. El hecho de que los (relativamente) SWC sean estables por esta operación muestra que son muy distintos de los conjuntos con la Banach-Saks [49] con los que están emparentados por contenido.

El objetivo básico es obtener una versión local de cualquier resultado cierto en espacios súper-reflexivos, y se puede considerar que el programa está bastante avanzado [2016a, 2021b, 2021c]. Hay que recordar que para operadores ya estaba definido ser súper débilmente compacto, y que para estos operadores no hay propiedad de factorización, lo cual puede mostrarse de una forma sencilla usando el índice de dentabilidad, ver [2016a]. Me gustaría poder encontrar un resultado en sentido contrario, es decir, cuándo es posible la factorización de un operador a través de un súper-reflexivo. Este problema enlaza con los ya clásicos resultados de factorización de Pisier, a través de un Hilbert, o con los de Pietsch, y en términos de conjuntos equivale a las condiciones que debe cumplir un espacio métrico para admitir un isomorfismo dentro de un espacio súper-reflexivo.

4.2.2. Súper compacidad asintótica

El resultado de Dilworth, Kutzarova, Lancien y Randrianarivony [15] eleva la propiedad (β) de Rolewicz a "hermana asintótica" de la súper-reflexividad. En principio, se espera que los resultados positivos para conjuntos emulen los que hay para espacios, tanto en términos de índice de Szlenk, embebimiento de árboles numerablemente ramificados y renormamiento del espacio ambiente. La correspondiente teoría de operadores ha sido desarrollada por Causey y Dilworth [9], y al igual que con los operadores súper débilmente compactos, se podría abordar una clasificación fina de operadores.

Para funciones con valores reales se puede definir una propiedad cercana a la UKK* siguiendo el esquema de nuestro desarrollo de las funciones discretamente uniformemente convexas [2021b]. Si esto se pudiera llevar a cabo de una forma razonable, proporcionaría argumentos más sencillos alternativos a los de [25] para la obtención de los resultados principales sobre UKK*.

También la propiedad de Banach-Saks está relacionada con estas propiedades asintóticas uniformes de la norma. Más concretamente, versiones uniformes de la propiedad de Banach-Saks inspiradas por el teorema de Kakutani. Hemos comenzado ya con G. Grelier a aislar estas propiedades y relacionarlas entre si.

4.2.3. UMD

En cuanto a los espacios UMD, hay dos resultados fundamentales que motivan mi interés: la caracterización de Burkholder, expuesta por él mismo en el survey contenido en [39] y la caracterización probada por Kalton, Konyagin y Vesely en [41]. Creo que los espacios UMD son el marco donde podrían ocurrir propiedades interesantes que no son ciertas en los súper-reflexivos en general, como la existencia de módulos óptimos. Mi propósito es continuar el estudio geométrico de la propiedad UMD. Para empezar, un "ejercicio" que parece factible es estudiar las funciones de Orlicz ϕ para las cuales las diferencias de martingalas convergen incondicionalmente el $L^{\phi}(X)$ donde X es UMD.

Otra vía, dado X un espacio UMD, sería estudiar el *espacio cotipo* de Figiel y Maurey [24] adaptado a las diferencias de martingalas en L^2. Es un fenómeno curioso que las diferencias de una martingala acotada en un espacio UMD X resulten incondicionalmente convergentes en todos los espacios $L^p(X)$ con $1 < p < +\infty$, y entenderlo bien arrojaría luz sobre los espacios UMD.

4.2.4. Convexidad en dimensión alta

Un enunciado relacionado con el teorema del punto fijo de Brouwer, el llamado teorema de Lusternik–Schnirelmann dice que en cada partición de $\mathbb{S}^n$ en $n+1$ trozos, hay alguno que contiene dos puntos antipodales. Formulado de otra forma, el resultado nos dice que si la bola de $\mathbb{R}^n$ es cubierta por no más de n conjuntos convexos, entonces alguno de ellos contiene la bola unidad de dimensión 1. Visto de esa manera, una posible generalización sería saber si, fijado k y aumentando la diferencia entre la dimensión del espacio y el número de conjuntos convexos cubriendo la bola ¿se puede asegurar que alguna de ellos contiene una bola k-dimensional de radio 1?

A este problema llegué desde uno similar en dimensión infinita donde es cierta una propiedad más débil: si la bola del espacio de Banach X de dimensión infinita es cubierta por una cantidad finita de desplazados de un conjunto convexo simétrico A, entonces para cada $r < 1/2$ se puede encontrar una bola de codimensión finita y radio r contenida en A. Tengo un cierto optimismo en que el resultado admita mejoras (por ejemplo, eliminar la hipótesis de simetría) antes de publicarlo.

Por otra parte, si se fijan $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ y la dimensión del espacio es mucho más grande que el número de convexos cubriendo la bola, el teorema de Dvoretzky dará un bola $(1-\varepsilon)$ euclídea contenida en alguno de los trozos, ver [58]. En esta línea hemos comenzado a trabajar con Bernardo González Merino, sin que de momento haya ningún resultado significativamente sorprendente.

Capítulo 5

Publicaciones del candidato

5.1. Artículos de Investigación

En esta lista aparecen 40 publicaciones, de las cuales 2 no están en JCR: uno está en C. R. Acad. Bulgare Sci. donde envié una selección de resultados de mi tesis sin pruebas a petición de S. Troyanski, y otro en la desaparecida revista checa Acta Univ. Carolin. Math. Phys. donde con O. Kalenda enviamos la solución de un problema propuesto en la Winter School junto con algunos resultados relacionados.

También, de estos 40 artículos, 19 los firmo yo solo, aunque puede haber habido *fruitful discussions* con otros colegas que están debidamente mencionadas en los agradecimientos. También quiero destacar que en los últimos 6 años he priorizado las colaboraciones, bien sea para potenciar la relación con otros grupos, que una responsabilidad que siento como IP, o bien porque son trabajos realizados en colaboración con mis estudiantes.

Finalmente, algunas curiosidades: el artículo [1999c] fue enviado a Mathematika por petición personal de C. A. Rogers; el artículo [2009] sólo tiene 3 páginas; uno de mis mejores trabajos [2004a] no ha recibido ninguna cita en MathSciNet.

1999a M. Raja: On topology and renorming of Banach space. *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 52 (1999), no. 3-4, 13–16. **MR1706603**

1999b M. Raja: Kadec norms and Borel sets in a Banach space. *Studia Math.* 136 (1999), no. 1, 1–16. **MR1706603**

1999c M. Raja: Locally uniformly rotund norms. *Mathematika* 46 (1999), no. 2, 343–358. **MR1832626**

2002a M. Raja: On dual locally uniformly rotund norms. *Israel J. Math.* 129 (2002), 77–91. **MR1910933**

2002b M. Raja: On some class of Borel measurable maps and absolute Borel topological spaces. *Topology Appl.* 123 (2002), no. 2, 267–282. **MR1918500**

2003a M. Raja: Weak* llocally uniformly rotund norms and descriptive compact spaces. *J. Funct. Anal.* 197 (2003), no. 1, 1–13. **MR1957673**

2003b B. Cascales; M. Raja: Measurable selectors for the metric projection. *Math. Nachr.* 254/255 (2003), 27–34. **MR1983953**

2003c M. Raja: First Borel class sets in Banach spaces and the asymptotic-norming property. *Israel J. Math.* 138 (2003), 253–270. **MR2031959**

2003d O. F. K. Kalenda; M. Raja: Descriptive properties of spaces of signed measures. *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.* 44 (2003), no. 2, 79–88. **MR2101905**

2004a M. Raja: Borel properties of linear operators. *J. Math. Anal. Appl.* 290 (2004), no. 1, 63–75. **MR2032225**

2004b B. Cascales; M. Raja: Bounded tightness for weak topologies. *Arch. Math. (Basel)* 82 (2004), no. 4, 324–334. **MR2057383**

2004c L. Oncina; M. Raja: Descriptive compact spaces and renorming. *Studia Math.* 165 (2004), no. 1, 39–52. **MR2080326**

2005a M. Raja: Embedding ℓ_1 as Lipschitz functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005), no. 8, 2395–2400. **MR2138882**

2005b M. Raja: On the dentability of weak* $\mathcal{H}_\delta$ sets. *Q. J. Math.* 56 (2005), no. 3, 377–382. **MR2161251**

2006 B. Cascales; W. Marciszewski; M. Raja: Distance to spaces of continuous functions. *Topology Appl.* 153 (2006), no. 13, 2303–2319. **MR2238732**

2007 M. Raja: Dentability indices with respect to measures of non-compactness. *J. Funct. Anal.* 253 (2007), no. 1, 273–286. **MR2362424**

2008 M. Raja: Finitely dentable functions, operators and sets. *J. Convex Anal.* 15 (2008), no. 2, 219–233. **MR2422986**

2009 M. Raja: Continuity at the extreme points. *J. Math. Anal. Appl.* 350 (2009), no. 2, 436–438. **MR2474779**

2010 M. Raja: On weak* uniformly Kadec-Klee renormings. *Bull. Lond. Math. Soc.* 42 (2010), no. 2, 221–228. **MR2601548**

2012a M. Raja: Compact spaces of Szlenk index ω. *J. Math. Anal. Appl.* 391 (2012), no. 2, 496–509. **MR2903149**

2012b M. Raja; J. Rodríguez: Scalar boundedness of vector-valued functions. *Glasg. Math. J.* 54 (2012), no. 2, 325–333. **MR2911371**

2013 M. Raja: On asymptotically uniformly smooth Banach spaces. *J. Funct. Anal.* 264 (2013), no. 2, 479–492. **MR2997388**

2014a B. Cascales; A. Pérez; M. Raja: Radon-Nikodým indexes and measures of weak noncompactness. *J. Funct. Anal.* 267 (2014), no. 10, 3830–3858. **MR3266248**

2014b M. Raja: Two applications of smoothness in C(K) spaces. *Studia Math.* 225 (2014), no. 1, 1–7. **MR3299393**

2015a M. Raja: Finite slicing in superreflexive Banach spaces. *J. Funct. Anal.* 268 (2015), no. 9, 2672–2694. **MR3325533**

2015b F. Albiac; J. L. Ansorena; G. Garrigós; E. Hernández; M. Raja: Conditionality constants of quasi-greedy bases in super-reflexive Banach spaces. *Studia Math.* 227 (2015), no. 2, 133–140. **MR3397274**

2016a M. Raja: Super WCG Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 439 (2016), no. 1, 183–196. **MR3474357**

2016b S. Ferrari; J. Orihuela; M. Raja: Weakly metrizability of spheres and renormings of Banach spaces. *Q. J. Math.* 67 (2016), no. 1, 15–27. **MR3471268**

2016c S. Ferrari; L. Oncina; J. Orihuela; M. Raja: Metrization theory and the Kadec property. *Banach J. Math. Anal.* 10 (2016), no. 2, 281–306. **MR3474840**

2016d N. Jonard-Pérez; M. Raja: Lipschitz subspaces of C(K). *Topology Appl.* 204 (2016), 149–156. **MR3482711**

2017a G. Lancien; A. Procházka; M. Raja: Szlenk indices of convex hulls. *J. Funct. Anal.* 272 (2017), no. 2, 498–521. **MR3571897**

2017b A. Pérez; M. Raja: A Bourgain-like property of Banach spaces with no copies of c0. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 111 (2017), no. 1, 205–211. **MR3596049**

2017c L. García-Lirola; J. Orihuela; M. Raja: Convex compact sets that admit a lower semicontinuous strictly convex function. *J. Convex Anal.* 24 (2017), no. 3, 987–998. **MR3684813**

2018a L. García-Lirola; M. Raja: On strong asymptotic uniform smoothness and convexity. *Rev. Mat. Complut.* 31 (2018), no. 1, 131–152. **MR3742968**

2018b L. García-Lirola; M. Raja: Maps with the Radon-Nikodým property. *Set-Valued Var. Anal.* 26 (2018), no. 1, 77–93. **MR3769337**

2018c G. Lancien; M. Raja: Asymptotic and coarse Lipshitz structures of quasi-reflexive Banach spaces. *Houston J. Math.* 44 (2018), no. 3, 927–940. **MR3879984**

2019 S. Ferrari; J. Orihuela; M. Raja: Generalized metric properties of spheres and renorming of Banach spaces. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 113 (2019), no. 3, 2655–2663. **MR3956274**

2021a L. García-Lirola; M. Raja: Uniformly convex renormings and generalized cotypes. *Adv. Math.* 383 (2021), 107679, 23 pp. **MR4233274**

2021b G. Grelier; M. Raja: Uniformly convex functions. *Publicado electrónicamente en J. Math. Anal. Appl.* (2021),

2021c G. Lancien, M. Raja: Nonlinear aspects of super weakly compact sets. *Aceptado en Ann. de l' Institut Fourier* (2021).

5.2. Libros y Capítulos

Bernardo Cascales y José Manuel Mira me invitaron a sumarme al proyecto de preparación de un libro de Análisis Funcional, basado en un material previo que ellos tenían, y adaptado al plan de estudios de la correspondiente asignatura. El resultado, en que también participaron José Orihuela como autor, y Salvador Sánchez-Pedreño como editor-maquetador, es el siguiente:

- B. Cascales, J. M. Mira, J. Orihuela, M. Raja, *Análisis Funcional*, Ediciones Electolibris, S. L., Murcia, 2012.

En cuanto a capítulos de libros, hemos participado junto con B. Cascales, I. Namioka y J. Orihuela, en dos capítulos titulados *Banach spaces and Topology (I) & (II)* dentro del libro

- K. P. Hart, J. Nagata, J. E. Vaughan (eds), *Encyclopedia of General Topology*, Elsevier, Amsterdam, 2004.

5.3. Citas relevantes

Hasta el momento, he encontrado mi nombre en los siguientes libros.

1. F. Albiac, N. Kalton, *Topics in Banach space theory,* second edition, Graduate Texts in Mathematics, 233. Springer, New York, 2016.

2. J. M. Borwein, V. Vanderwerff, *Convex functions: constructions, characterizations and counterexamples*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 109. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

3. M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8. Springer-Verlag, New York, 2001.

4. M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, *Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2011.

5. K. Goebel, S. Prus, *Elements of geometry of balls in Banach spaces*, Oxford University Press, Oxford, 2018.

6. A. Guirao, V. Montesinos, V. Zizler, *Open problems in the geometry and analysis of Banach spaces.* Springer, [Cham], 2016.

7. P. Hájek, M. Johanis, *Smooth analysis in Banach spaces.* De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 19. De Gruyter, Berlin, 2014.

8. P. Hájek, V. Montesinos, J. Vanderwerff, V. Zizler, *Biorthogonal systems in Banach spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 26. Springer, New York, 2008.

9. J.Kakol, W. Kubiś, M. López-Pellicer, *Descriptive topology in selected topics of functional analysis.* Developments in Mathematics, 24. Springer, New York, 2011.

10. J. Lukeš, J. Malý, I. Netuka, J. Spurný, *Integral representation theory. Applications to convexity, Banach spaces and potential theory.* De Gruyter Studies in Mathematics, 35. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010.

11. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, (eds), *Handbook of the geometry of Banach spaces.* Vol. I. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.

12. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, (eds), *Handbook of the geometry of Banach spaces.* Vol. 2. North-Holland, Amsterdam, 2003.

13. A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski, M. Valdivia, *A nonlinear transfer technique for renorming.* Lecture Notes in Mathematics, 1951. Springer-Verlag, Berlin, 2009

14. M. I. Ostrovskii, *Metric embeddings. Bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces.* De Gruyter Studies in Mathematics, 49. De Gruyter, Berlin, 2013.

15. G. Pisier, *Martingales in Banach spaces,* vol. 155 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

Bibliografía

[1] A. Avilés, P. Koszmider, A continuous image of a Radon-Nikodým compact space which is not Radon-Nikodým. *Duke Math. J.* 162 (2013), no. 12, 2285–2299.

[2] M. Bell, W. Marciszewski, On scattered Eberlein compact spaces. *Israel J. Math.* 158 (2007), 217–224.

[3] C. Bessaga, A. Pelczynski, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, Mono. Mat. Tom 58, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1975.

[4] B. Bossard, A coding of separable Banach spaces. Analytic and coanalytic families of Banach spaces. *Fund. Math.* 172 (2002), no. 2, 117–152.

[5] J. Bourgain, F. Delbaen, A class of special $\mathcal{L}_\infty$ spaces. *Acta Math.* 145 (1980), no. 3-4, 155–176.

[6] R.D. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with Radon-Nikodym Property*, Lecture Notes in Mathematics 993, Springer Verlag, 1980.

[7] D.K. Burke, Covering properties, *Handbook of set-theoretic topology*, Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

[8] B. Cascales, G. Vera, Topologies weaker than the weak topology of a Banach space, *J. Math. Anal. Appl.*, 182 (1994), 41–68.

[9] R.M. Causey, S. Dilworth, Metric characterizations of super weakly compact operators, *Studia Math.* 239 (2017), no. 2, 175–188.

[10] M. Cepedello-Boiso Approximation of Lipschitz functions by Δ-convex functions in Banach spaces, *Israel J. Math.* 106 (1998) 269–284.

[11] L. Cheng, Q. Cheng, B. Wang, W. Zhang, On super-weakly compact sets and uniformly convexifiable sets, *Studia Math.* 199 (2010), no. 2, 145–169.

[12] R. Deville, Problèmes de renormages, *J. Functional Anal.* 68 (1986), 117–129.

[13] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smothness and Renorming in Banach Spaces*, Pitman Monog. and Surveys 64, 1993.

[14] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, On the existence of almost greedy bases in Banach spaces. *Studia Math.* 159 (2003), no. 1, 67–101.

[15] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, G. Lancien, N. L. Randrianarivony, Equivalent norms with the property (β) of Rolewicz. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 111 (2017), no. 1, 101–113.

[16] G.A. Edgar, Measurability in a Banach space I, *Indiana Univ. Math. J.* 26 (1977), 663–667.

[17] G.A. Edgar, Measurability in a Banach space II, *Indiana Univ. Math. J.* 28 (1979), 559–579.

[18] M. Fabian, *Weak Asplund Spaces,* Canadian Math. Soc. Series of Monog. and Advanced Texts, Wiley, 1997.

[19] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8. Springer-Verlag, New York, 2001.

[20] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, *Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2011.

[21] M. Fabian, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, A quantitative version of Krein's theorem, *Rev. Mat. Iberoamericana* 21 (2005) 237–248.

[22] T. Figiel, *Uniformly convex norms in spaces with unconditional basis,* in Séminaire Maurey-Schwartz (1974–1975), Espaces L^p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Exp. No. XXIV, 1975, pp. 11 pp. (erratum, p. 3).

[23] T. Figiel, *Lattice norms and the geometry of Banach spaces,* in Proceedings of the International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leipzig, 1977), Teubner, Leipzig, 1978, pp. 89–99.

[24] T. Figiel, *Uniformly convex norms on Banach lattices,* Studia Math., 68 (1980), pp. 215–247.

[25] G. Godefroy, N.J. Kalton, G. Lancien, 'Szlenk indices and uniform homeomorphisms', *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), no. 10, 3895–3918.

[26] N. Ghoussoub, B. Maurey, $\mathcal{G}_\delta$-embeddings in Hilbert space, *J. Funct. Analysis.* 61 (1984), 72–97.

[27] N. Ghoussoub, B. Maurey, The asymptotic norming and the Radon-Nikodým properties are equivalent, *Proc. A.M.S.* 94 (1985), 665–671.

[28] N. Ghoussoub, B. Maurey, $\mathcal{H}_\delta$-embeddings in Hilbert space and optimization on $\mathcal{G}_\delta$-sets, *Memoirs A.M.S* 349 (1986).

[29] A. S. Granero, An extension of the Krein-Šmulian theorem. *Rev. Mat. Iberoam.* 22 (2006), no. 1, 93–110.

[30] G. Gruenhage, Generalized metric spaces, *Handbook of set-theoretic topology*, Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

[31] P. Hájek, V. Montesinos, J. Vanderwerff, V. Zizler, *Biorthogonal systems in Banach spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 26. Springer, New York, 2008.

[32] R.W. Hansell, Borel measurable mappings for nonseparable metric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 161 (1971), 145–169.

[33] R.W. Hansell, Sums, products and continuity of Borel maps in nonseparable metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* (2), 104 (1988), 465–471.

[34] R.W. Hansell, *Descriptive sets and the topology of nonseparable Banach spaces*, *Serdica Math. J.* 27 (2001), no. 1, 1–66.

[35] R. Haydon, Locally uniformly convex norms in Banach spaces and their duals. *J. Funct. Anal.* 254 (2008), no. 8, 2023–2039.

[36] R.C. James, A. Ho, The asymptotic-norming and the Radon-Nikodým properties for Banach spaces, *Ark. Mat.*, 19 (1981), 53–70.

[37] J.E. Jayne, I. Namioka, C. A. Rogers, σ-fragmentable Banach Spaces, *Mathematika* 39 (1992), 161–188.

[38] J.E. Jayne, I. Namioka, C.A. Rogers, Topological properties of Banach spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3) 66 (1993), 651–672.

[39] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, (eds), *Handbook of the Geometry of Banach spaces* Vol. 1, and 2, Elsevier, Amsterdam (2001)

[40] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, G. Schechtman, 'Almost Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between infinite-dimensional Banach spaces', *Proc. London Math. Soc.* (3) 84 (2002), no. 3, 711–746.

[41] N. Kalton, S. V. Konyagin, L. Veselý, Libor, Delta-semidefinite and delta-convex quadratic forms in Banach spaces. *Positivity* 12 (2008), no. 2, 221–240.

[42] N. J. Kalton, N. L. Randrianarivony The coarse Lipschitz geometry of $\ell_p \oplus \ell_q$. *Math. Ann.* 341 (2008), no. 1, 223–237.

[43] H. Knaust, E. Odell, Th. Schlumprecht, 'On asymptotic structure, the Szlenk index and UKK properties in Banach spaces', *Positivity* 3 (1999), no. 2, 173–199.

[44] K. Kuratowski, *Topology*, Volume I, PWN Polish Scientific Publishers, 1966.

[45] G. Lancien, 'A survey on the Szlenk index and some of its applications', *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.* 100 (2006), no. 1-2, 209–235.

[46] G. Lancien, 'On uniformly convex and uniformly Kadec-Klee renormings', *Serdica Math. J.* 21 (1995), no. 1, 1–18.

[47] G. Lancien, *Théorie de l'indice et problèmes de renormage en géométrie des espaces de Banach*, Thèse, Paris, 1992.

[48] B.L. Lin, P.K. Lin, S.L. Troyanski, Characterizations of denting points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102 (1988), 526–528.

[49] J. Lopez-Abad, C. Ruiz, P. Tradacete, The convex hull of a Banach-Saks set, *J. Funct. Anal.* 266 (2014), no. 4, 2251–2280.

[50] A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski, Locally uniform rotund renorming and fragmentability, *Proc. London Math. Soc.* (3) 75 (1997), 619–640.

[51] A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski, M. Valdivia, On weakly locally uniformly rotund Banach spaces, *J. Funct. Anal.* 163 (1999), no. 2, 252–271

[52] I. Namioka, Radon-Nikodym compact spaces and fragmentability, *Mathematika* 34 (1989), 258–281.

[53] I. Namioka, R.R. Phelps, Banach spaces which are Asplund spaces, *Duke Math. J.* 42 (1975), 735–750.

[54] E. Odell, Th. Schlumprecht, Asymptotic properties of Banach spaces under renormings. *J. Amer. Math. Soc.* 11 (1998), no. 1, 175–188.

[55] L. Oncina, *Borel sets and σ-fragmentability of a Banach space*, Master Degree Thesis at University College London, 1996.

[56] J. Orihuela, R. Smith, S. Troyanski, Strictly convex norms and topology. *Proc. Lond. Math.Soc.* 104(1), 197–222 (2012)

[57] G. Pisier, Martingales with values in uniformly convex spaces, *Israel J. Math.* 20, (1975) 326–350.

[58] V. Pestov, *Dynamics of Infinite-dimensional Groups: The Ramsey–Dvoretzky–Milman Phenomenon*, University Lecture Series, Volume: 40, AMS, 2006.

[59] G. Pisier, *Martingales in Banach spaces,* vol. 155 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[60] J. Saint-Raymond, Espaces à modèle séparable, *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 26 (1976) no. 3, pp. 211–256.

[61] W. Schachermayer, The Radon-Nikodým property and the Kreĭn-Milman property are equivalent for strongly regular sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* 303 (1987), no. 2, 673–687.

[62] M. Talagrand, Comparaison des Boreliens d'un Espace de Banach pour les Topologies Fortes et Faibles, *Indiana University Math. J.* 27 (1978), 1001–1004.

[63] K. Tu, Convexification of super weakly compact sets and measure of super weak noncompactness, *Proc. Amer. Math. Soc.* (2020).