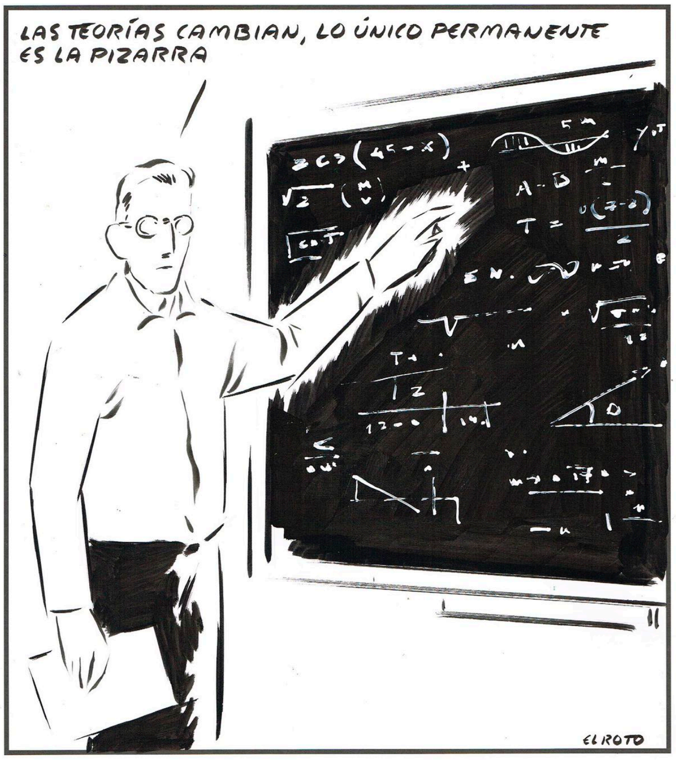
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES

Proyecto Docente[1]

Matías Raja Baño

[1]Para optar a la plaza 11575 de Catedrático de Universidad en el Área de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia, 22/07/2021.



I practiced every night,
now I'm ready.

L. Cohen

Chapter 1

Introducción a este Proyecto Docente

1.1 Presentación

Este proyecto cubre la materia *Funciones de Varias Variables Reales*, (de ahora en adelante FVVR) que se compone de tres asignaturas: Funciones de Varias Variables I, II y III (abreviadas FVV1, FVV2 y FVV3). Estas asignaturas de carácter obligatorio se imparten en segundo curso del Grado: FVV1 y FVV2 en el primer cuatrimestre, FVV3 en el segundo. La elección está motivada por haber sido todas ellas impartidas por el candidato en los últimos años y forman un grupo coherente.

Es indudable el atractivo que una asignatura de último curso ofrecería para un proyecto como éste: resultados más profundos, en general, y más recientes en el tiempo, permitiendo hacer alusiones a la investigación actual. Eso fue lo que exactamente hice en mi proyecto docente como Titular de Universidad en 2002, alrededor del *Análisis Funcional*, lo que me permitió hacer varios guiños a las líneas de trabajo de nuestro grupo de investigación. Por otra parte, la Teoría de FVVR no ha experimentado mucho cambio en los últimos siglos, salvo quizás a nivel expositivo, por la influencia de Bourbaki a mediados del siglo XX y las bonitas animaciones que se pueden hacer hoy día por ordenador.

Sin embargo, FVVR ofrece otro tipo de desafíos y oportunidades para el docente. Es una materia básica y sus ramificaciones llegan más lejos. Las conexiones con otras partes de las Matemáticas son numerosas, así como las aplicaciones diversas. De hecho, esto es lo que pretendemos poner en valor con una doble finalidad: hacer más atractiva la asignatura; y exponer una cantidad de Matemáticas mucho mayor de la que se esperaría por los descriptores de las asignaturas. Esto último será aclarado al final de este capítulo.

1.2 FVVR en el Grado de Matemáticas

Nos ocuparemos en esta sección de como han quedado, negro sobre blanco en el aspecto normativo, el Análisis Matemático en general y las FVVR en particular. Sin embargo, no puedo evitar la idea de que los estudios de Matemáticas existen de forma esencialmente "reglada" desde hace milenios y que tomar como referencia lo que diga un documento relativamente reciente es meramente coyuntural.

1.2.1 El "Libro Blanco"

De acuerdo con el "Libro Blanco del Título de Grado de Matemáticas" editado por la ANECA, la materia que nos ocupa (FVVR) está contenida el el bloque de Contenidos Comunes Obligatorios llamado *Cálculo diferencial e integral y funciones de variable compleja*. Dicho bloque debe desarrollar en 34,5 ECTS los siguientes objetivos: Conocer y saber utilizar los conceptos y los resultados fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral para funciones de una y varias variables reales, así como del Cálculo Vectorial clásico. Conocer los fundamentos de la teoría de funciones de una variable compleja. Manejar con soltura distintas clases de funciones que son la base de la modelización de fenómenos tanto continuos como discretos.

Más específicamente, los **Contenidos Mínimos** de *Cálculo diferencial e integral y funciones de variable compleja* de acuerdo con el Libro Blanco son:

- M1 Sucesiones y series numéricas.
- M2 Continuidad de funciones de una y varias variables reales.
- M3 Diferenciación de funciones de una y varias variables reales.
- M4 Sucesiones y series de funciones.
- M5 Integración de funciones de una y varias variables.
- M6 Integrales de línea y de superficie.
- M7 Teoremas clásicos del Cálculo Vectorial.

M8 Funciones analíticas de variable compleja.

M9 Teorema de Cauchy. Residuos.

Existe otro bloque de Contenidos Comunes Obligatorios titulado *Ecuaciones Diferenciales*, de 12 ECTS, donde se tratan EDO's, EDP's y Ecuaciones de la Física, que junto con el anteriormente descrito comprenden todo el ANÁLISIS MATEMÁTICO del Grado. No incluyo en esto los *Métodos Numéricos*, que, en mi opinión, están sobredimensionados con 19,5 ECTS, mientras veo con pasmo que no existe el ANÁLISIS FUNCIONAL.

Los anteriores contenidos mínimos quedan algo más detallados en la siguiente lista de **Competencias** a adquirir:

C01 Manipular desigualdades, sucesiones y series, analizar y dibujar funciones, deducir propiedades de una función a partir de su gráfica, comprender y trabajar intuitiva, geométrica y formalmente con las nociones de límite, derivada e integral.

C02 Calcular derivadas de funciones mediante la regla de la cadena, el Teorema de la Función Implícita, etc.

C03 Planificar la resolución de un problema en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos.

C04 Calcular y estudiar extremos de funciones.

C05 Calcular integrales de funciones de una variable.

C06 Saber plantear y resolver integrales de funciones de varias variables, integrales curvilíneas e integrales de superficie.

C07 Resolver problemas que impliquen el planteamiento de integrales (longitudes, áreas, volúmenes, centros de gravedad, etc.).

C08 Utilizar en aplicaciones a otros campos los conceptos asociados a las derivadas parciales, a las integrales de línea y de superficie, y a las integrales de dos o tres variables.

C09 Utilizar la relación existente entre las funciones holomorfas y las funciones analíticas.

C10 Calcular residuos y utilizarlos para la determinación de integrales reales.

Claramente, la mayor parte alude a FVVR y algunas de ellas son exclusivas.

1.2.2 Memoria del Grado

De acuerdo con la Memoria del Título de Grado en Matemáticas de la Universidad de Murcia, los resultados del aprendizaje en *Análisis Matemático en Varias Variables* deben ser los siguientes:

- R01 Relacionar las funciones de varias variables reales con objetos geométricos (curvas, superficies)
- R02 Dominar el concepto de diferencial para funciones de varias variables reales, saber calcular derivadas parciales y utilizar la regla de la cadena.
- R03 Razonar con inversas locales y con funciones definidas implícitamente. Conocer y saber aplicar las técnicas del cambio de variable para resolver ecuaciones funcionales sencillas.
- R04 Conocer la noción de espacio tangente a una curva o superficie y saber obtener sus ecuaciones.
- R05 Conocer los fundamentos teóricos en que se basan las reglas para resolver problemas de optimización, con y sin ligaduras.
- R06 Plantear y resolver problemas procedentes de la Geometría, la Física, la Ingeniería y la Economía en los que intervenga el cálculo diferencial para funciones de varias variables reales haciendo énfasis en los problemas de optimización que modelizan situaciones reales.
- R07 Conocer los fundamentos y técnicas de la integral de Lebesgue, los teoremas de convergencia, el teorema de Fubini y el teorema de cambio de variable y saber aplicarlos para calcular integrales múltiples.
- R08 Manejar adecuadamente los sistemas de coordenadas curvilíneas usuales (coordenadas polares, cilíndricas, esféricas) y utilizarlos para calcular integrales con la técnica del cambio de variable. integral para funciones de varias variables reales.
- R10 Conocer los fundamentos de la integración sobre curvas y superficies de campos escalares y vectoriales. Entender sus diversas interpretaciones en el lenguaje de la física.
- R11 Saber plantear y resolver problemas clásicos de naturaleza geométrica y física en los que intervienen integrales sobre curvas y superficies de campos escalares o vectoriales.
- R12 Conocer los operadores diferenciales del análisis vectorial y las diferentes versiones del teorema de fundamental del cálculo donde intervienen (teoremas de Green, Gauss, Stokes). Entender los fundamentos teóricos de estos teoremas y saber aplicarlos e interpretarlos en el lenguaje de la Física o la Ingeniería.
- R13 Conocer y saber utilizar los resultados básicos sobre continuidad, y derivabilidad de funciones definidas mediante series de funciones o integrales que dependen de un parámetro.
- R14 Saber analizar las propiedades de las funciones definidas por series o integrales.
- R15 Saber utilizar algún programa de representación gráfica de curvas y superficies en el espacio ordinario para interpretar geométricamente los conceptos básicos de la materia.

La descripción los contenidos es algo más parca, pero delimita perfectamente los temas para su reagrupación en varias (tres, de hecho) asignaturas que se imparten en segundo curso:

1. Espacios Normados.
2. Diferenciabilidad de funciones de varias variables.
3. Extremos y extremos condicionados.
4. Teoremas de la función implícita e inversa.
5. Integral de Lebesgue.
6. Teoremas de convergencia, Fubini y cambio de variable.
7. Integración sobre curvas; Integración en superficies.
8. Operadores diferenciales clásicos.
9. Teoremas del cálculo vectorial.
10. Funciones definidas por series o integrales.

Señalemos que se presuponen conocidos los contenidos de primer curso. En particular, el Análisis de una Variable Real, el Álgebra Lineal, la Topología de Espacios Métricos, así como ciertas nociones de Física elemental que se pueden usar el las aplicaciones.

1.2.3 Programa de las asignaturas de FVVR

A título informativo incluimos los programas de las asignaturas de FVVR durante el curso 2020/21. Cada una de estas tres asignaturas cuenta con 6 créditos ECTS. Hay que remarcar que los contenidos especificados dependen mucho del profesor a cargo y, en consecuencia, es patente la diferencia de estilo entre los distintos profesores que han redactado los programas.

1. Funciones de Varias Variables I (FVV1)
   (a) TEMA 0. Espacios normados, convergencia y continuidad
      i. Espacio normado.
      ii. Convergencia puntual y uniforme de sucesiones de funciones, aplicación a series.
      iii. Límites para funciones de varias variables, continuidad y continuidad uniforme.
   (b) TEMA 1. Funciones y aplicaciones diferenciables
      i. derivadas de las funciones vectoriales de una variable real,
      ii. derivada direccional, diferenciabilidad,
      iii. regla de la cadena.
   (c) TEMA 2. Diferenciabilidad de orden superior

i. derivadas parciales,
ii. conmutatividad de la derivación,
iii. fórmula de Taylor.

(d) TEMA 3. Optimización

i. extremos libres y condicionados,
ii. multiplicadores de Lagrange: aplicaciones

2. Funciones de Varias Variables II (FVV2)

(a) TEMA 1. Integrales de Riemann y de Riemann-Stieltjes.

i. La integral de Riemann para funciones de varias variables.
ii. Conjuntos de contenido nulo y de medida nula.
iii. Enunciados de los teorema de Fubini y del cambio de variable: cambios a coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.
iv. Cálculo de integrales múltiples. Aplicaciones geométricas de la integral: áreas, volúmenes, masas, baricentros, etc.
v. La Integral de Riemann-Stieltjes, una introducción a la integración de Lebesgue en la recta real. Integración por partes.

(b) TEMA 2. Medida de conjuntos.

i. Medida exterior.
ii. Conjuntos de Borel, conjuntos medibles y la medida de Lebesgue.
iii. Propiedades de regularidad e invarianza por traslaciones. Conjuntos no medibles.
iv. Funciones medibles.
v. Medidas abstractas.

(c) TEMA 3. La integral de Lebesgue

i. Integrales de funciones medibles positivas, teoremas de convergencia.
ii. Funciones integrables y propiedades básicas de la integral en R^n. El papel de los conjuntos de medida nula.
iii. Teorema de la convergencia dominada.
iv. Completitud de los espacios L^1 y L^2.
v. La integral de Lebesgue y la integral de Riemann: integrales impropias.
vi. Funciones definidas por series o integrales dependientes de un parámetro.
vii. Distintas nociones de convergencia de sucesiones de funciones medibles.
viii. Integración abstracta.

(d) TEMA 4. Medida Producto.

i. Integración iterada (Fubini y Tonelli) para la integral de Lebesgue en R^n.
ii. Medida producto de dos medidas abstractas.

iii. La medida de Lebesgue como medida producto.
iv. Teorema de Fubini para la integración abstracta.

(e) TEMA 5. Diferenciación e Integración

i. Derivación de la integral. Lema del cubrimiento de Vitali. Teorema de diferenciación de Lebesgue.
ii. Convolución y aproximación de funciones integrables.
iii. Diferenciabilidad de funciones: funciones de variación acotada y funciones absolutamente continuas. El teorema fundamental del cáculo para la integral de Lebesgue.

(f) TEMA 6. Cambio de Variable. Integración abstracta.

i. El teorema del cambio de variable para transformaciones lineales y transformaciones diferenciables.
ii. La integral de Lebesgue abstracta y la esperanza de variables aleatorias.
iii. Esperanza condicional y el movimiento Browniano.

3. Funciones de Varias Variables III (FVV3)

(a) TEMA 1. Aplicación inversa y funciones implícitas.

i. Teorema de aplicación inversa.
ii. Teorema de las funciones implícitas. Variedades diferenciables.
iii. Aplicaciones: dependencia funcional, envolventes.

(b) TEMA 2. Integración sobre curvas y superficies.

i. Funciones de variación acotada.
ii. Longitud de una curva, integración respecto a la medida de longitud.
iii. Área de una superficie, integración respecto a la medida de área, integral de flujo.

(c) TEMA 3. Formas diferenciales (de grados 1 y 2)

i. Formas diferenciales de grado 1. Lema de Poincaré.
ii. Fórmula de Green-Riemann.
iii. Formas diferenciales de grado 2, diferenciación exterior.
iv. Teoremas de Gauss y Stokes.

(d) TEMA 4. Análisis vectorial clásico.

i. Campos vectoriales.
ii. Operadores vectoriales clásicos: gradiente, divergencia, rotacional, laplaciano.
iii. Potencial newtoniano y funciones armónicas.
iv. Análisis vectorial en $\mathbb{R}^2$.
v. Aplicaciones.

1.2.4 Dependencia entre los contenidos

Tengo la costumbre de hablar de la estructura y dependencia entre las asignaturas de FVVR en la presentación de cualquiera de ellas. Una pregunta que formulo para incitar a la reflexión es: – ¿Por qué FVV1 y FVV2 se imparten simultáneamente (en el primer cuatrimestre)? –. Ante la falta de respuesta por parte de los alumnos, les hago ver que no hay dependencia entre ambas asignaturas, al contrario que con las "equivalentes" de primer curso en las que la relación entre derivada e integral para funciones de una variable es fundamental. En efecto, para FVV1 sólo se requiere de un buen conocimiento de Cálculo Diferencial de una variable: al fin y al cabo la derivación parcial es derivación respecto a una sola variable. Mientras que para el cálculo explícito de integrales en FVV2 sólo se requiere conocer la integración en una variable, ya que el teorema de Fubini reduce la integral múltiple a integración reiterada. Satisfechos con la explicación, sigo adelante.

Segunda pregunta al alumnado: – ¿Hay alguna relación fundamental entre derivación e integración en varias variables análoga al Teorema Fundamental del Cálculo (regla de Barrow, en la práctica)? – En ese momento, les digo que ese tipo de resultados existen efectivamente y son objeto de FVV3, que necesariamente debe ir después de FVV1 y FVV2. Tras una breve explicación sin muchos detalles (se relacionará la integral sobre un dominio con la de "cierta primitiva" sobre su frontera) les digo que, sin embargo, el primer tema de la asignatura no tiene absolutamente nada que ver con eso. El tema de *Aplicación inversa y funciones implícitas* ha sido encajado en FVV3 por falta de sitio en FVV1. Peor aún, ciertos contenidos que se explican en FVV1 y FVV2 dependen de resultados de FVV3: el método de los multiplicadores de Lagrange requiere la noción de variedad diferenciable y del teorema de las funciones implícitas; el teorema del cambio de variable en la integral múltiple depende del análisis de los difeomorfismos que se hace en la prueba del teorema de la aplicación inversa. El profesor responsable puede apelar a que los resultados necesarios serán demostrados en el segundo cuatrimestre. Pero ésta no es la única incidencia que puede presentarse en cuanto a contenidos.

Lo habitual es que las asignaturas de FVVR las impartan varios profesores que, en uso legítimo de la libertad de cátedra y a pesar de los llamamientos desde instancias superiores a la coordinación, pueden provocar solapamientos de contenidos (por ejemplo, las funciones de variación acotada pueden mencionarse en relación con los teoremas de diferenciabilidad de Lebesgue, o bien, en la caracterización de las curvas rectificables en dimensión finita). También, con cierta frecuencia, la falta de tiempo provoca omisiones (contenido previsto en la guía que deja de impartirse) que el profesor puede justificar dentro del poco peso que pueden tener para su planteamiento de la asignatura. En no pocos casos, esas omisiones pasadas provocan que los profesores que necesitan esos resultados como prerrequisitos de sus asignaturas tengan que improvisarlos tras preguntar: – Esto lo ya estudiasteis en $***$ ¿no? – Esta situación no afecta solamente a FVVR, sino que ocurre a distintas escalas a lo largo de la titulación.

La dependencia entre diferentes teorías matemáticas no sigue un esquema lineal, es más bien un grafo ramificado complejo. Lo que impone la linealidad es la marcha del tiempo. La única manera de transmitir la complejidad de las interdependencias es dar cuenta, cada vez que se tenga la oportunidad, de su existencia. Para esto es esencial que el docente tenga un conocimiento que va más allá del mero programa de la asignatura. Personalmente no creo que cualquier profesor pueda impartir cualquier materia en cualquier momento, hablando dentro de un área de conocimiento. En la enseñanza del grado interviene un gran número de profesores, cada uno con sus propios objetivos. No siempre se pueden garantizar los prerrequisitos para abordar un determinado tema por lo que es conveniente tener preparados atajos y medios alternativos para la paliar las carencias del alumnado.

1.3 ¿Qué impartir? Mi propuesta

Partiendo del hecho que los contenidos mínimos de las asignaturas están ya delimitados por el plan de estudios, la discusión aquí sería sobre cómo de lejos se puede llegar (o es conveniente llegar) en cada tema. Para comenzar, señalemos algunos hechos en los que muchos colegas pueden estar de acuerdo:

1. Las nociones de límite y continuidad para FVVR son exactamente las mismas que en el marco de los espacios métricos. De hecho, limitarse a los espacios normados para esto introduce una aspecto lineal innecesario.

2. La noción de diferencial se comprende mejor desprovista de coordenadas, es decir, en el marco de los espacios normados.

3. Dicho lo anterior, los alumnos deben manejar con soltura las derivadas parciales y expresar la diferenciabilidad y la diferencial en términos de coordenadas.

4. La integral de Lebesgue abstracta tiene la misma dificultad que la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ una vez que la medida de Lebesgue está construida.

5. La teoría de formas diferenciales tiene una importante carga algebraico-topológica a la que sólo se le puede sacar partido en el marco de las variedades diferenciables.

Y ahora, algunas cosas que pienso con las que no todos los colegas estarán de acuerdo:

1. Muchos libros de referencia adoptan una terminología alternativa a la de Leibniz para las derivadas parciales, posiblemente por evitar cierto abuso de lenguaje a la hora de aplicar la regla de la cadena. Sin embargo, los principales “usuarios” de las derivadas parciales no tienen esos reparos.

2. La Física, que ha sido progresivamente expulsada de nuestro Plan de Estudios (la asignatura homónima de primero es un simple repaso del Bachillerato), proporciona innumerables “intuiciones” sobre conceptos matemáticos: fuerza, centro de masa, velocidad, densidad, flujo... Estas nociones pueden ser usadas para ilustrar otros conceptos incluso antes de tener todas las herramientas matemáticas para su tratamiento teórico. Aparentemente estos reparos no existen con las intuiciones geométricas: la interpretación de la integral se apoya sobre una noción de área (finitamente) aditiva previa a la introducción rigurosa de esta noción. De manera análoga, una patata no deja de tener centro de masa por el hecho de desconocer la integral triple.

3. Numerosos conceptos matemáticos pueden ser usados mucho antes de llegar a la teoría donde se discuten en profundidad. No hace falta conocer la teoría de la medida para hablar del volumen de un prisma; no hace falta conocer la teoría de Galois para usar los polinomios; no falta conocer el teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf para invocar una ecuación diferencial.

4. La integral de Riemann tiene todavía un inestimable valor para modelizar el paso de lo discreto a lo continuo (Dieudonné discrepaba).

5. Es un error pensar que teoremas clásicos del Cálculo Vectorial son simples casos del teorema de Cartan-Stokes. Estos tienen un contenido que debe ser puesto de manifiesto a través de aplicaciones.

6. Finalmente, seguir un esquema ordenado en la exposición de la teoría no es incompatible con ciertos "escarceos" que pueden estimular al estudiante aventajado o espolear la curiosidad del estudiante medio.

En efecto, se puede hablar de muchas más cosas que las que especifican los mínimos... otra cosa es a qué nivel se hace. Para algunos de mis colegas los únicos hechos lícitamente mencionables son los que admiten una demostración completa en clase. Otros, en cambio, citan resultados avanzados sin demostración para dar a entender que la teoría no acaba en los contenidos de la asignatura. Yo por mi parte creo que se pueden contar resultados más avanzados con al menos una idea de por qué son ciertos. Cómo hacerlo, o cómo creo que puede hacerse, será objeto de la siguiente sección.

Las funciones reales son el material con el que el mundo (al menos, su parte continua) se modela matemáticamente y por eso contienen un buen número de ideas fundamentales a las que los alumnos deben exponerse alguna vez en la vida, aunque sea levemente. Esto va más allá de cursar créditos ECTS o adquirir competencias específicas. La Ciencia no es "democrática": las mejores ideas de las Matemáticas han ocurrido en unas pocas cabezas a largo de los siglos. No todo el mundo es un Alexander Grothendieck que siendo estudiante inventa la integral de Lebesgue antes de que se la cuenten en clase (ni un Pierre Menard para reescribir El Quijote). Mi opinión es que esas ideas deben contarse, sí o sí, al margen de los escuetos descriptores de las asignaturas.

Lamentablemente, la experiencia muestra que una buena parte del Análisis Matemático programada en la carrera no llega a impartirse. Por bien organizado que esté el Plan de Estudios, éste deberá funcionar con la precisión de un reloj para que poder desarrollar completamente los contenidos del Grado de tal manera que el alumno pueda encajar todas la piezas del puzzle que constituye el conocimiento que debería adquirir. Los estudios están concentrados en 4 años (realmente en 7 cuatrimestres, pues el último se dedica al TFG). En este contexto es bastante fácil que algunos contenidos dejen de darse, por ejemplo, si corresponden a los últimos temas que suelen ser los más avanzados; o si el profesor no tiene la suficiente experiencia con la asignatura (e.g. el primer año encargado de impartirla); o si simplemente no los considera importantes porque su formación o especialidad le proporcionan un punto de vista distinto sobre la materia. En cualquier caso, es el alumno el que sale perdiendo y no porque sepa menos al final de los estudios, sino porque se le priva de piezas del puzzle. Y lo que es peor, los tópicos que se pierden por este motivo, u otra forma de recorte de contenidos, lo hacen en detrimento de temas más triviales.

1.4 ¿Cómo lo cuento? Metodología

Realmente, creo que no hay nada nuevo. Soy muy escéptico y dudo que los cambios radicales en la forma de entender la dinámica de la clase puedan tener un efecto positivo en la enseñanza, a pesar de la proliferación de divulgadores y *youtubers* que parecen sugerir lo contrario.

Mi propuesta se basa en jugar con la proporción entre *ideas* y *técnica* a la hora de abordar una demostración o argumento. Esto puede ser un asunto delicado, ya que un enunciado sin demostración es tan válido como media demostración, o sea, nada. Sin embargo, la idea de demostración es algo que admite matices, véase por ejemplo la divertida conversación entre el "matemático ideal" y el "estudiante de Filosofía" en *Experiencia Matemática* [13]. La moraleja que yo extraigo viene a ser que la parte técnica puede abreviarse a medida que se acostumbra uno a ella.

La técnica es muy importante porque una parte fundamental del oficio de matemático consiste en saber leer y escribir demostraciones, lo que estimula el espíritu crítico. Como matemáticos profesionales sabemos que en un argumento se pueden colar errores fatales cuando no se desarrollan todos sus detalles. La formación técnica es muy difícil, por no decir imposible, de conseguir sin estudios reglados de Matemáticas. No obstante la técnica tiene también sus niveles, lo que veremos a través de un ejemplo típico:

- En primer curso es importantísimo dividir el ε en el número de partes que hagan falta para que al final todos los términos de la expresión (a hacer pequeña o probar que es 0) sumen exactamente ε.

- En el segundo año esto se puede relajar porque ya el alumno entiende que da lo mismo ε que 7ε o $a\varepsilon$ si sabemos que $a > 0$ está fijo desde el comienzo de la prueba.

- En cursos más avanzados es suficiente indicar cómo llevar a cabo las acotaciones (el orden suele ser importante) sin mencionar siquiera el ε.

Así que sin quitarle valor al aspecto técnico, se puede ir reduciendo la dosis paulatinamente. Bien, esto se puede hacer siempre que se tenga oportunidad de descargar las pruebas de algo de contenido técnico y centrarse en las ideas. En cuanto a éstas últimas, me gusta, si se da la ocasión, proponer ideas a los estudiantes que, a pesar de su buen aspecto, no funcionan. Hay situaciones en las que una idea alternativa permite probar una versión más general de un teorema, así como hay otras situaciones donde la elección de unas hipótesis u otras depende de la idea empleada en la prueba. Creo que la discusión de las ideas estimula la parte creativa, que además de ser valiosa para quienes afronten la carrera investigadora también puede ser útil para los que desarrollen su trabajo como matemáticos en la empresa privada. En resumen, si el profesor sabe como recortar los aspectos técnicos, ahorrará tiempo y tedio a la clase. Una versión ligeramente más general de un teorema puede consumir también un tiempo muy valioso y esto deberá tenerse en cuenta. Eventualmente, la parte abreviada de una demostración importante puede servir como trabajo autónomo al alumno.

Una vez que se ha fijado una dinámica sobre lo que es importante y lo que no lo es tanto, es fácil encontrar ocasiones para hablar de resultados fundamentales. En los apuntes, que constituyen la mayor parte de esta memoria he incluido algunos de los que quedan al alcance de las técnicas descritas.

1.5 Mis “apuntes de FVVR”

La mayor resistencia para poner en práctica la metodología descrita en la sección anterior la he encontrado en los propios estudiantes. En efecto, a pesar de ser de segundo curso ya están demasiado habituados al esquema

definición – enunciado de teorema – demostración

y todo lo que sea salirse de ahí provoca protestas, quizás por les complica el tener unos apuntes nítidos en los que memorizar una demostración como un baile de letras.

Por ese motivo y por dejar testimonio de las demostraciones que me gustan, durante años he estado redactando unas notas o apuntes donde los estudiantes pudieran encontrar más detalles sobre lo que les cuento en clase. Comencé a preparar temas sueltos con mi versión de las demostraciones o complementarios a las lecciones magistrales, por si no se hubiera podido desarrollar completamente. Además, decidí escribirlos en inglés, con miras en ayudar a los estudiantes Erasmus, y en un futurible Grado bilingüe. Durante bastante tiempo he trabajado en este proyecto de manera irregular, hasta el curso 2019/20 en el que "gracias" a la pandemia le di un impulso. No obstante, mis apuntes adolecen del momento en el que ha sido escritos y necesitan aún una revisión profunda para darles más coherencia. Se puede decir que se trata realmente de un "proyecto" en la medida en que sigue inacabado. Espero seguir en ello los próximos años para cubrir una buena parte del Análisis Matemático de la carrera y máster, y eventualmente abordar el tema que considero más difícil, por cuestión de enfoque, Análisis Real en una Variable.

Los capítulos son de extensión variable. En ningún momento el texto substituye la pizarra, pues soy incapaz de llevar al papel lo que hago en clase, y no me refiero a la ausencia (por el momento) de dibujos. El orden en que los presento es relativamente coherente, pero no obligatorio. Cada capítulo acaba con una sección titulada *Rationale and remarks* donde justifico la elección de material, o argumentos, en ese capítulo frente a otras posibilidades, así como posibles desarrollos ulteriores. La sección de ejercicios está tomada directamente de los que he usado en clase.

El detalle del contenido se puede consultar en el índice de esta memoria. No obstante, aclararé aquí algunas peculiaridades. He puesto al comienzo un capítulo de espacios métricos como un repaso de este tema, que los alumnos deben conocer, que incide en lo que es más importante en Análisis: la completitud y la compacidad. A partir de ahí se sigue un desarrollo estándar que se corresponde con los programas de FVV1, FVV2 y FVV3. Es muy posible que al lector le parezca que dedico poco tiempo a algunos de los tópicos clásicos de FVVR. El tiempo en clase es dinámico y se puede incidir en la misma idea una y otra vez con ayuda de ejemplos, que son casi inexistentes en mis apuntes. Al final hay tres capítulos adicionales (que podrían llamarse apéndices) con carácter complementario. En primer lugar, en relación con la topología de la convergencia uniforme, el importante teorema de Stone-Weierstrass. A continuación, un capítulo sobre espacios L^p y sus propiedades, ya que lo único que se menciona en el capítulo de integración es el espacio semi-normado $\mathcal{L}^1$. Para acabar, una pequeña introducción a las Mecánicas de Lagrange y Hamilton, asumiendo conocida la de Newton, porque considero que es una fantástica aplicación de FVVR. Al final de todo, la bibliografía, donde están muchos de los libros que he manejado y destilado durante la preparación de las asignaturas.