Proyecto Docente

1. Motivación (anecdotario)
2. Contenidos de FVVR
3. Peculiaridades de este Proyecto
4. Índice de Temas
5. Confrontación de ideas
6. Otros aspectos que destacaría

Funciones de Varias Variables Reales

1. Espacios Normados.
2. Diferenciabilidad de funciones de varias variables.
3. Extremos y extremos condicionados.
4. Teoremas de la función implícita e inversa.
5. Integral de Lebesgue.
6. Teoremas de convergencia, Fubini y cambio de variable.
7. Integración sobre curvas; Integración en superficies.
8. Operadores diferenciales clásicos.
9. Teoremas del cálculo vectorial.
10. Funciones definidas por series o integrales.

Peculiaridades del Proyecto

1. temas sueltos redactados en inglés
2. incluye resultados fundamentales, si quedan al alcance
3. destaca las aplicaciones a la Física
4. hay una intención de poner énfasis en las ideas
5. no menciono cronograma ni evaluación

Índice de Temas del Proyecto

1. Metric Spaces (for Analysis)
2. Normed Spaces
3. Functions of several variables: a starter
4. Differentiable mappings
5. Theorems of inverse mapping and implicit functions
6. Riemann integral
7. Change of variables in integration
8. Measure Theory and Lebesgue Integral
9. Integration on curves and surfaces
10. Differential forms of low degree
11. Classic Vector Analysis
12. The Stone-Weierstrass theorem
13. Some properties of L^p spaces
14. Introduction to Lagrangian and Hamiltonian Mechanics

Confrontación de ideas

PUNTO vs. FUNCIÓN

Las funciones definidas sobre conjuntos de “puntos” con valores reales son consideradas, a su vez, puntos de otro espacio donde también se miden distancias, por lo que hay aproximación y convergencia.

La diferenciación y la integral, a su vez, pueden verse como funciones (lineales) definidas en espacios de funciones.

Esta idea es objeto del Análisis Funcional más adelante, pero si hay una justificación de peso para la introducción de espacios métricos y normados, no son las funciones de varias variables, sino la convergencia de funciones.

Confrontación de ideas

CONTINUIDAD vs. LIPSCHITZ

Los estudiantes suelen meter continuidad y derivabilidad en el mismo "saco". Hay una tremendo abismo entre ellas. .

Existen funciones continuas $f : [0,1] \to [0,1]^2$, o $[0,1]^3$, o incluso $[0,1]^{\mathbb{N}}$, llamadas curvas de Peano. Obviamente, son también uniformemente continuas.

Por otra parte, si $f : [0,1] \to [0,1]^2$ es Lipschitz, entonces necesariamente $f([0,1])$ es un conjunto de medida nula.

Confrontación de ideas

FUNCIÓN IMPLÍCITA vs. ENVOLVENTE

La en la ecuación

$$f(x, y, z) = 0$$

se puede despejar z como función de x, y alrededor de los puntos donde

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0.$$

Pero la familia de curvas planas parametrizadas por $t \in \mathbb{R}$

$$f(x, y, t) = 0$$

si tiene envolvente, esta satisface

$$\begin{cases} f(x, y, t) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0. \end{cases}$$

Confrontación de ideas

APLICACIÓN INVERSA vs. MORSE-SARD

El teorema de la aplicación inversa nos dice que para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, si $df(x)$ es biyectiva, entonces es un difeomorfismo local. En particular, $f(x, r)$ es un entorno de $f(x)$ para todo $r > 0$.

Por su parte, Morse-Sard (una versión particular realmente) nos dice que si tomamos

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : df(x) \ \text{ no es biyectiva}\}$$

entonces $f(S)$ tiene medida nula.

Confrontación de ideas

RIEMANN vs. LEBESGUE

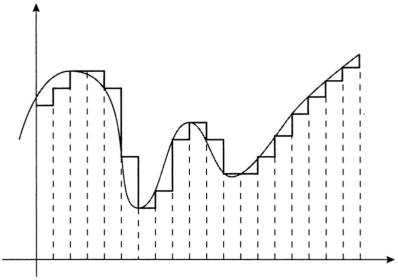


Figure 5a
Méthode de Riemann

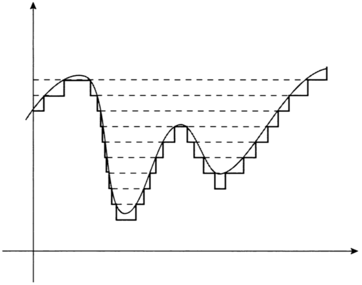


Figure 5b
Méthode de Lebesgue

Confrontación de ideas

CAMPOS VECT. vs. FORMAS DIF.

La menos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son dos maneras alternativas de hablar de los mismos objetos, aparentemente. . .

LONGITUD + ÁREA vs. INT. FORMAS DIF.

La longitud y el área, definidas intrínsecamente, parecen más tangibles que la integral de una forma diferencial que precisa de una parametrización para poder ser definida, tras lo cual, hay que comprobar que la definición es "buena" (gracias a la magia del cambio de variable).

Después, se cambian la tornas: no se puede integrar en la práctica sobre curvas o superficies al no ser que se tengan parametrizaciones.

Confrontación de ideas

Teo. DIF. LEBESGUE vs. Teo. CARTAN-STOKES

Dos aspectos muy diferentes de llevar el descubrimiento fundamental de Newton y Leibniz al extremo.

En uno (Lebesgue) se busca la máxima generalidad en el procedimiento para recuperar una función a partir de su integral indefinida.: para $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ y casi todo punto $x \in \mathbb{R}^d$ existe y se cumple

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\mathbf{m}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f \, d\mathbf{m} = f(x).$$

En el otro (Cartan-Stokes) llevar a la máxima elegancia la relación integral entre cierto objeto y su "primitiva": M es una variedad C^1 de dimensión $n+1$ orientada con borde y ω es una n-forma diferencial C^1, entonces

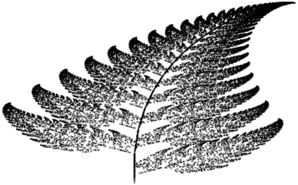
$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

FRACTALES

La idea es ver los conjuntos como puntos en un espacio, redundando en la idea de que objetos complejos, como las funciones, son asimilables a puntos en un espacio a definir.

Numerosos fractales autosemejantes aparecen como puntos fijos de *sistemas iterados de funciones* (IFS).

La noción de fractal hace reflexionar sobre la idea topológica de dimensión.



Highlights

BAIRE + ARZELA + RIESZ

Con el material acumulado entre espacios métricos y normados se puede demostrar un resultado no trivial. Es fácil poner ejemplos de sucesiones uniformemente convergentes de funciones tales que no hay convergencia de las derivadas.

Se puede llegar más lejos, si un espacio de funciones C^1 es cerrado para límites uniformes, necesariamente es finito-dimensional. No es difícil ver que lo relevante es la propiedad Lipschitz, que con la constante acotada uniformemente sobre un conjunto de funciones implica la pre-compacidad de éste.

Highlights

PROPIEDADES RARAS DE LAS FUNCIONES REALES

La demostración de que una función separadamente continua en un producto de intervalos tiene muchos puntos de continuidad, gracias al teorema de Baire y al hecho de que una función así se puede poner como límite de funciones continuas.

La construcción de una curva continua que rellena un cuadrado, o un cubo.

El teorema de Kolmogorov sobre la expresión de una función de varias variables como superposición de funciones de una sola variable.

Highlights

APLICACIONES DEL CÁLCULO DE EXTREMOS

Se puede demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra, sin saber Análisis Complejo.

Se puede demostrar que es posible la diagonalización de las matrices simétricas, que es un resultado fundamental, y que además lo aplico al cálculo de la deformación del volumen por una aplicación lineal.

Se puede estudiar los extremos en un contexto de dimensión infinita, para incidir más en la idea de que las funciones pueden ser "puntos".

APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN

El teorema de Brouwer, siguiendo la prueba de Milnor-Rogers.

La célebre igualdad descubierta por Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

o ésta otra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \pi$$

porque cuanto antes sepan las de dónde salen las fórmulas con las que decoran las camisetas de San Alberto, mejor.

APLICACIONES A LA FÍSICA

A veces parece Matemáticos y Físicos hablamos distintos idiomas.

regla de la cadena (Ec. 12.20), podemos calcular estas der

$$D_rG_p(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^{n} D_k g_p(\mathbf{x}_0) D_r H_k(\mathbf{t}_0) \qquad (r = 1, 2, \ldots$$

Pero $H_k(\mathbf{t}) = h_k(\mathbf{t})$ si $1 \leq k \leq m$, y $H_k(\mathbf{t}) = x_k$ si $m+1 \leq k$:
te, cuando $m+1 \leq k \leq n$, tenemos $D_r H_k(\mathbf{t}) \equiv 0$ si $m+r \neq$
para cada $\mathbf{t}$. Entonces el anterior conjunto de ecuaciones s

$$\sum_{k=1}^{m} D_k g_p(\mathbf{x}_0) D_r h_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad \begin{cases} p = 1, 2, \\ r = 1, 2, \end{cases}$$

$$V = h(P, T,) \longrightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$$

stituyendo, entonces, la segunda en la primera, se tiene:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$$

asando todo a un sólo miembro y separando variables:

$$\left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T - 1\right] dP + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\right] dT = 0$$

Creo que hay que intentar usar una notación universalmente aceptada entre los "usuarios".

Hay que exponer aplicaciones, sobre todo a la Física, que ha sido y sigue siendo fuente de inspiración para el desarrollo de teorías matemáticas.

MECÁNICA LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA

Partiendo de la Mecánica Newtoniana y de lo que se ha aprendido de FVVR se puede abordar una introducción a formulaciones alternativas de las ecuaciones del movimiento con indiscutibles valores prácticos y teóricos.

Para obtener las ecuaciones de Langrange y Hamilton sólo es necesario conocer la regla de la cadena, además de interpretar correctamente en términos de ecuaciones las fuerzas de ligadura de un sistema. Las posibles configuraciones de un sistema con ligaduras constituyen una variedad diferenciable.

La solución de las ecuaciones del movimiento es una función extremal de un problema variacional.

Para acabar, el flujo Hamiltoniano se comporta como un fluido incompresible.

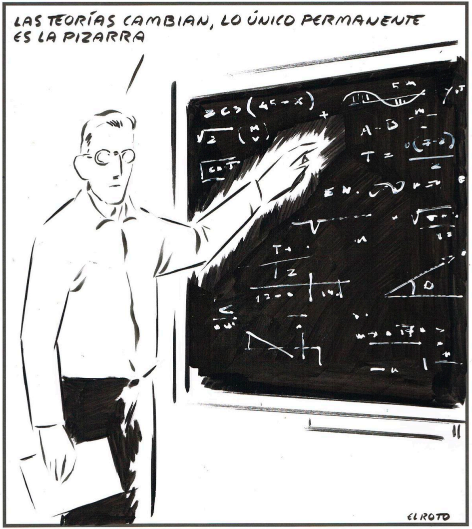
Evaluación

Preguntas "especiales" de teoría FVV3 (junio y julio de 2020)

1. Enuncie la existencia de inversa (local) para una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ como un problema de función implícita y proporcione las hipótesis necesarias para que dicha inversa exista y sea de clase C^k a partir de los requisitos del Teorema de las Funciones Implícitas. Recordando la prueba del Teorema de la Aplicación inversa dada en los apuntes, ¿puede extraer alguna conclusión interesante?
2. El teorema de la Aplicación Inversa afirma, entre otras cosas y bajo ciertas hipótesis, que una aplicación $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ establece una biyección entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$. ¿Qué es más difícil probar la inyectividad local de f o probar que la imagen de f contiene una bola? Justifique su respuesta y diga que teorema es clave para ello.
3. Demuestre que en cualquier espacio normado la longitud de una curva parametrizada es siempre mayor o igual que la del segmento rectilíneo que une sus puntos inicial y final. Obtenga una condición suficiente (y necesaria, si fuera posible) sobre la norma para que el segmento rectilíneo sea el único con distancia mínima.

Cronograma

1. La actual división de la la materia FVVR en tres asignaturas quizás no sea la más conveniente.
2. Creo que los contenidos de FVV1 y FVV3, intercalando los temas de *Aplicación inversa y funciones implícitas*, *Integral de Riemann* y *Cambio de variable en la integral* pueden constituir una asignatura anual muy coherente. Las razones: el análisis de los difeomorfismos para el teorema de la aplicación inversa es exactamente lo que se necesita para el cambio de variable en la integral; la integración que se necesita para FVV3 es esencialmente la de funciones continuas, no hay problemas de medibilidad.
3. Por otra parte, la Teoría de la Medida y el Análisis Real se podrían abordar con más profundidad si no son tributarios del Cálculo de Varias Variables Reales (incidimos en la diferencia entre *Análisis* y *Cálculo*), a ubicar entre finales de segundo curso y tercero.



¡MUCHAS GRACIAS!