I CONFINI LOGICI DELLA MATEMATICA

Giuseppe Raguní

NUOVA EDIZIONE

Contatto: gaemarx2@yahoo.it

Prima edizione: aprile 2009
Seconda edizione: maggio 2010
Terza edizione: novembre 2011

Premessa alla Terza edizione

Le principali novità di quest'ultima edizione riguardano i paragrafi II.14 e III.9. Nel primo sono stati corretti, ampliati e approfonditi tutti i passi necessari per la rappresentazione delle due consuete Teorie aritmetiche in seno alla Teoria formale degli insiemi, mettendo in risalto le loro differenze. In particolare, in risposta alle osservazioni di un accorto lettore, è stato discusso anche il caso in cui il principio di induzione completa lo si voglia considerare come un assioma simbolico del secondo ordine, anzichè uno schema assiomatico metamatematico. Queste analisi hanno comportato l'aggiunta di un opportuno e minuzioso periodo nel paragrafo III.9.

Si è poi adottata l'usuale rappresentazione simbolica degli *aleph*, la quale nelle precedenti edizioni era stata abbandonata soltanto per esigenze tipografiche.

La totale rilettura del testo ha permesso, infine, di migliorare tanti periodi, sia dal punto di vista della comprensibilità che della semplicità di lettura; di correggere qualche svista e di introdurre alcune nuove citazioni bibliografiche.

La mia speranza è che i lettori continuino con i loro commenti, critiche e suggerimenti: sarò assai grato a tutti per questo, promettendo di rispondere.

Prof. Dr. Giuseppe Raguní
Universidad Católica de Murcia (Spagna)
E_mail: gaemarx2@yahoo.it

Se non si sa spiegare qualcosa in modo
semplice e chiaro è perchè non la si è ben capita

INDICE

Parte Terza: Incompletezza e indecidibilitá

PREFAZIONE

"Se ora Dio entrasse da quella porta, non potrebbe obiettare nulla a questa deduzione". Questa frase, pronunciata dal mio professore di matematica[1] al IV ginnasio, mi fece rimuginare. Non che elucubrassi sul divino, ma si poneva una semplice, difficile domanda: fino a che punto si può essere sicuri della correttezza e inconfutabilità delle deduzioni matematiche? L'ultimo limite di dubitabilità di ogni linguaggio è costituito dalle convenzioni sul significato dei termini. Ma quali e quante sono queste convenzioni nel caso di una Disciplina matematica? Potrebbero essere infinite?

Alcuni anni dopo, grazie alla rivista *Le Scienze*, venni a conoscenza del Teorema d'incompletezza. Lo *choc*, più che all'enunciato in sé, fu dovuto all'impossibilità di comprendere ciò che esattamente volesse dire, per quante volte lo rileggessi. In effetti, ciò che spesso succede con argomenti di questo tipo è che ogni sintetica esposizione divulgativa, non potendo chiarire tutti i dettagli, rischia solo di confondere pericolosamente le idee al lettore per cui normalmente è concepita, cioè inesperto.

Il percorso che mi ha portato alla sua comprensione si è reso particolarmente difficoltoso essenzialmente per tre motivi. Il primo è che il tema, come spesso succede in Matematica, non si presta ad essere isolato: per comprendere bene ogni particolare, bisogna prima aver chiaro cos'è il *modello* di una Teoria, la metamatematica, il Teorema di completezza semantica, le funzioni ricorsive...; in breve, avere almeno un'idea approssimativa, ma solida, dei fondamenti della Logica. Il secondo motivo è dovuto all'ambiguità della terminologia usata; sembra davvero incredibile che in un argomento così delicato, che richiederebbe il massimo della precisione, si continui ad adoperare un linguaggio così propenso alla confusione: la *completezza*, ad esempio, può indicare quattro differenti proprietà

[1] Il rinomato e compianto prof. Tullio Caponnetto del Liceo classico "Cutelli" di Catania.

(noi, per fortuna, ne useremo soltanto due); e la *decidibilità* per un Sistema, non significa che esso non possa contenere enunciati *indecidibili*. Inoltre, non si distingue quasi mai, chiaramente, tra teorema e metateorema. Le ragioni di tale imprecisione sono in buona parte storiche; ma ciò non può giustificare la passività per la ricerca di espressioni più inequivocabili che si riscontra nella maggior parte dei testi. C'è da ritenere che fino a quando tale terminologia non evolverà, l'argomento resterà terreno di pochi e non potrà diffondersi adeguatamente come finalmente meriterebbe a circa ottant'anni dalla sua nascita. In effetti, una delle ambizioni di questo libro è l'uso di alcuni nuovi termini e concetti.

Il terzo motivo è costituito dagli equivoci, scorrettezze ed errori che abbiamo creduto di riscontrare in diversi temi. Per andare avanti, dopo mesi di riflessioni e ricerche di nuove pubblicazioni, non restava che avere la presunzione di correggerli o rassegnarsi a non comprendere; ovviamente, esponendosi alla possibilità di trovarci noi stessi in errore. Alcune di tali revisioni e correzioni hanno un carattere marginale, altre più fondamentale.

Tutto ciò giustifica le ragioni stesse del libro; che dunque, seppur scritto con l'obiettivo irrinunciabile di essere pienamente comprensibile al lettore inesperto, introduce anche alcune novità in Logica.

PARTE PRIMA
Sistemi assiomatici

I.1. Sistemi assiomatici formali

Delle due discipline matematiche che la tradizione ci ha tramandato, la Geometria euclidea e l'Algebra, solo la prima ha una struttura che può dirsi "assiomatica" in senso lato. In essa si comincia con delle *definizioni* degli enti che si tratteranno; seguono i *postulati*, cioè affermazioni ammesse come vere; infine si parla di *nozioni comuni*, ossia di regole logiche basilari e "autoevidenti". Tutte le deduzioni, cioè i teoremi, seguono da tali premesse. Le definizioni, dato che utilizzano altri termini indefiniti, non fanno altro che richiamare al lettore dei concetti elementari, delle "forme", che egli dovrebbe spontaneamente possedere; in altre parole, si appellano francamente all'intuito. Per mostrare il funzionamento del metodo e giustificare le esigenze che hanno condotto alla moderna struttura assiomatica, basta un esempio elementare. Consideriamo l'affermazione "chi va al Polo Sud patirà il freddo" e cerchiamo di dedurla a partire da un Sistema assiomatico (in modo che alla fine sarà un teorema). Seguendo l'esempio di Euclide, cominceremmo col definire gli enti coinvolti, come "Polo Sud", "freddo", etc.; ma ometteremo di farlo supponendo che chi ascolti la frase riconosca inequivocabilmente tali termini. Potremmo poi continuare con i seguenti postulati:

[1] Al Polo Sud il Sole riscalda assai poco
[2] Dove il Sole riscalda assai poco la temperatura è bassa
[3] Dove la temperatura è bassa si patisce il freddo

Le *nozioni comuni* attesteranno gli ovvi sottintesi del caso, cioè che il Polo Sud esista e sia raggiungibile, che non è possibile trovarsi in più di un luogo, etc… La dimostrazione della frase suddetta suonerebbe così: "se andrai al Polo Sud, per il postulato [1] andrai dove il Sole riscalda poco e quindi, per il postulato [2] dove la temperatura è bassa. Dunque per il postulato [3] patirai il freddo".

Senza lasciarci sviare dalla sua futilità, il vero problema della Teoria matematica che abbiamo costruito è dovuto al fatto che essa risulta legata al concreto significato degli enti e dei postulati. La possibilità di uno speciale equipaggiamento, ad esempio, metterebbe in crisi il nostro Sistema perché saremmo costretti a modificare un postulato (il [3]). C'è un'altra critica ben più grave. Se volessimo dimostrare che "se prendi il tram farai in tempo al concerto", dovremmo costruire un nuovo Sistema matematico che parli di tram, di tempo, etc., con nuove *nozioni comuni* (e imprevedibili problemi come il traffico).

È quindi spontaneo desiderare che una Teoria matematica sia qualcosa d'altro, che sia fatta di affermazioni più generali, nel nostro caso simili a: "se ti troverai in una certa condizione che implicherà necessariamente un'altra condizione, allora alla fine ti troverai in quest'ultima". Cioè, che sia *teoria della deduzione*, piuttosto che deduzione di fatti contingenti. Quest'esigenza porta, per i casi considerati, alla soluzione che abbiamo riportato nella colonna destra della tabella che si trova nella pagina successiva. Le definizioni si sopprimono e non si fa che un elenco dei *simboli* che saranno usati; le *regole grammaticali* definiscono le sequenze ordinate di simboli che saranno chiamate *proposizioni*.

SISTEMA ASSIOMATICO TRADIZIONALE	**SISTEMA ASSIOMATICO FORMALE**
DEFINIZIONI [es.: *1) punto è ciò che non ha parti; 2) retta è lunghezza senza larghezza che giace egualmente rispetto ai suoi punti*]	**ELENCO DI SIMBOLI** [esempio del testo] A B C D →
	REGOLE GRAMMATICALI *Una proposizione del Sistema è costituita solo e soltanto da una sequenza siffatta: uno dei simboli tra "A", "B", "C" o "D", seguito da "→" e seguito nuovamente da uno dei simboli tra "A", "B", "C" o "D".*
POSTULATI [es.: *1) due punti distinti individuano una retta; 2) data una retta esiste almeno un punto che non le appartiene*]	**ASSIOMI** [1] A→B [2] B→C [3] C→D
NOZIONI COMUNI [es.: *1) il tutto è maggiore della parte; 2) cose che sono uguali alla stessa cosa sono anche uguali tra loro*]	**REGOLE DI DEDUZIONE** *Da "X→Y" e "Y→Z" si deduce "X→Z", essendo "X", "Y", "Z", simboli qualsiasi tra "A", "B", "C" e "D" e considerando sia gli assiomi che i teoremi.*
TEOREMI [es.: *dati due punti distinti esiste almeno una retta che non li contiene entrambi*]	**TEOREMI** [1] A→C [2] B→D [3] A→D

Allo stesso modo, le *regole deduttive* definiscono le proposizioni che saranno chiamate *teoremi*; per far ciò, tipicamente, esse specificano delle operazioni che devono effettuarsi a partire da alcune proposizioni di base, chiamate *assiomi*. La caratteristica fondamentale (che si evidenzia, appunto, con l'aggettivo *formale*) è che *simboli e proposizioni del Sistema e quindi anche assiomi e teoremi restano senza significato esplicito* (cioè enunciato in qualche parte). Proprio per questo si preferisce spesso usare il termine "formula" anziché "proposizione" (che può suggerire un erroneo carattere semantico); tuttavia in questo libro useremo il più familiare "proposizione".

Piuttosto, sono le regole grammaticali e le regole di deduzione che, scelte in modo opportuno per costruire la Teoria matematica che ci interessa, danno implicitamente ai simboli un significato puramente "operativo". Chiariamo quest'ultimo aspetto. In riferimento all'esempio della tabella, il primo teorema si ottiene applicando la regola di deduzione in base agli assiomi [1] e [2]. Il secondo, facendo lo stesso con gli assiomi [2] e [3]. Il terzo, applicando la regola di deduzione in base al primo teorema e all'assioma [3]. È del tutto spontaneo, dall'analisi della nostra regola di deduzione, associare al simbolo "→" un significato come "consegue", "si deduce", etc.; questo è un implicito significato "operativo".

Per ricostituire le deduzioni che ci interessano, consideriamo ora quella che si definisce *interpretazione* del Sistema: "A" significhi "trovarsi al Polo Sud"; "B", "trovarsi dove il Sole riscalda poco"; "C", "trovarsi dove la temperatura è bassa"; "D", "patire il freddo"; "→", "implica". La regola grammaticale è coerente con tale interpretazione, cioè formerà proposizioni della lingua italiana. Con essa, ad esempio, si forma: "patire il freddo implica trovarsi al Polo Sud", che è in corretto italiano (anche se *falsa*). Se ora interpretiamo gli assiomi, ne risultano proposizioni *vere*; in tal caso, si dice che l'interpretazione costituisce un *modello* del Sistema. Infine controlliamo la *correttezza* della regola di deduzione, cioè se essa produce proposizioni vere nel *modello*. Con il significato di "implica" dato a "→", "X→Z" è in effetti vero, se "X→Y" e "Y→Z" sono veri; allora la regola, quando opera sugli assiomi interpretati nel *modello*, produce teoremi *veri* nel modello, sui quali può ancora operare producendo altri teoremi *veri*. E, cosí via, non potrà che produrre sempre teoremi *veri* per il modello.

Nel nostro esempio, possiamo dar significato direttamente al teorema [3] (senza la necessità di passare per l'[1]), per affermare come verità che: "Trovarsi al Polo Sud implica patire il freddo". Il lettore può costruirsi un modello opportuno dello stesso Sistema per dimostrare che "se prendi il tram farai in tempo al concerto" o altre deduzioni dello stesso schema.

Un altro esempio di *modello* ci convincerà di quanto effimero sia il significato dato a "→". Interpretiamo "A", "B", "C" e "D" come quattro nostri amici ordinati in base alla loro età, dal più grande al più piccolo e "→" come "è più grande di". Si ottiene, chiaramente, un altro *modello*. Per esso, inoltre, continua a valere la *correttezza* della regola deduttiva, come il lettore può verificare. Dunque, il nostro Sistema, con tutti i suoi teoremi, si adatta perfettamente anche a questa interpretazione. L'uso di suggerimenti visuali per qualche simbolo (come una freccia, nel nostro caso) è pur spontaneo nei linguaggi matematici, ma può ingannare qualora si intenda focalizzare la pura logica delle deduzioni; giacché, come ripetiamo, tutti i simboli sono in realtà affatto privi di un prefissato significato.

Si sarà adesso d'accordo sul fatto che nessun magnifico cappotto, o *nozione* poi non tanto *comune*, potrà invalidare un Sistema assiomatico formale: esso seguirà ad esser adeguato per ogni suo *modello*, se lo possiede, purché sia *corretto* rispetto alle regole deduttive. Ma non sfugga il principale e straordinario vantaggio di tale nuova organizzazione astratta della Matematica[2]: un qualsiasi teorema, pur formidabilmente lungo e difficile (magari scoperto anche grazie all'aiuto "visuale" di un *modello* concreto), vale automaticamente (cioè senza bisogno di ripetere la dimostrazione) per tutti i *modelli corretti* rispetto alle regole di deduzione del Sistema.

Si rilevi ancora che, come ovvia conseguenza dell'assenza di significato delle proposizioni matematiche, lo stesso concetto di *verità* è estraneo al linguaggio matematico e riguarda solo le interpretazioni semantiche[3] dei suoi simboli. La situazione è ideale

[2] Dovuta fondamentalmente a D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, 1899.

[3] Useremo il termine *semantico* come abbreviazione della locuzione "che ha significato".

per la mordacità di Russell: "il linguaggio matematico è una scienza in cui non si sa di cosa si sta parlando, né se ciò che si sta dicendo è vero"[4]. Ma il tono beffardo non deve distrarre dalla verità letterale dell'affermazione. L'indiscutibile utilità del linguaggio matematico si rivela solo quando esso viene interpretato da *modelli corretti*, concretizzandosi cosí in proposizioni significative. Queste ultime sono comunemente chiamate ancora "matematiche", ma il punto di vista assiomatico impone di correggere questa confusione.

Ritornando, ora, alla tradizionale Geometria euclidea, si riconosce che essa si trova in una situazione migliore rispetto alla Teoria informale che abbiamo considerato, soltanto perché gli enti coinvolti (punti, rette, etc.) sono ben più astratti e primigeni rispetto ai tram e ai freddi polari. La semanticità di tali enti si manifesta in alcuni errori (non facili da scoprire) che sono stati corretti nel suo riassetto moderno. In concreto, si tratta di alcuni postulati (divenuti assiomi nel riassetto formale) che mancavano (come quello *di ordinamento*: dati tre punti allineati, ce n'è uno ed uno solo che si trova tra gli altri due).

Ma l'assiomatica formale non fa altro che rimuovere ogni semanticitá dal linguaggio puramente simbolico delle proposizioni matematiche, separandolo nettamente dal linguaggio interpretato e da quello impiegato nelle regole grammaticali e di deduzione. È ciò sufficiente a concludere, come si sente spesso dire, che nei Sistemi formali ogni ricorso all'*intuito* è eliminato?

I.2. La metamatematica

Per prima cosa ci chiederemmo: si può rimuovere il valore semantico alle regole grammaticali e di deduzione? L'ovvia risposta è no. Una Teoria matematica la si definisce per ottenere *nuove* proposizioni; questa caratteristica è tanto naturale che può considerarsi tra le proprietà definitorie di un Sistema matematico. Ora, se si toglie il valore semantico alle regole grammaticali e di deduzione, si ottiene una lista di sequenze di simboli senza

[4] B. Russell, *Misticismo e Logica*, Longanesi Milano, 1964.

significato; come potrebbe questa specificare, generare, altre sequenze degli stessi simboli?

Se i teoremi o, più in generale, le proposizioni sono di numero finito ci si potrebbe limitare a fare un elenco di esse, evitando di impiegare un Sistema matematico. Ma se, per la ragione che sia, si vuole adoperare un Sistema capace di generare anche una sola *nuova* proposizione, bisognerà dire come farlo mediante un linguaggio che abbia un significato. Un caso in cui ciò è necessario, chiaramente, è quando si vogliono generare *infinite* proposizioni e/o teoremi; quest'ultima situazione si può in effetti considerare un caso non banale per un Sistema assiomatico. Le regole grammaticali e di deduzione, dunque, non possono non essere semantiche. Ciò significa che esse devono necessariamente essere interpretate (ma stavolta univocamente!) per essere in grado di svolgere il loro ruolo, che è quello di produrre nuove proposizioni. Tipicamente esse sono espresse nel linguaggio naturale: quello che stiamo usando; e quello stesso della pubblicità e degli uomini politici! Sappiamo bene come il linguaggio comune possa essere ingannevole o ambiguo; ma qui, data la natura dei nostri temi, pretenderemmo il massimo della chiarezza e del rigore. A questo punto ci imbattiamo in una difficoltà cardinale: sospettiamo, infatti, che sia impossibile stabilire con assoluta precisione il grado di rigore e di chiarezza che dobbiamo pretendere; tale sospetto sarà presto confermato. E, allora, come potrebbero definirsi regole (grammaticali o deduttive) sufficientemente chiare? Per ora limitiamoci a prendere atto dell'esigenza di selezionare, a partire dal linguaggio naturale, un linguaggio semantico "sufficientemente rigoroso" da impiegarsi in tali regole; lo diremo *metamatematica*[5]. Ora, a ben pensarci, tale necessità è ancora più primordiale: invero, di che tipo sono i discorsi che si sono fin qui fatti? Con un pò di presunzione (dato che la metamatematica la si è definita come un linguaggio in un certo modo rigoroso nella sua terminologia), possiamo appunto considerarla metamatematica. Avremmo allora definito, circolarmente, la metamatematica servendoci di metamatematica? Sì, e non c'è nulla di paradossale: lo stesso si fa nei dizionari e nelle grammatiche per definire una lingua e la sua sintassi. In un

[5] Dal greco μετα, nel significato di "oltre", "al di là".

dizionario, ad esempio, si definiscono parole mediante altre, in una circolarità dalla quale si esce soltanto perché si presume che alcuni significati siano conosciuti. Un linguaggio semantico, cioè, può essere capace di autodefinirsi. Ciò equivale ad affermare qualcosa come che la meta-metamatematica coincide con la metamatematica. Possiamo dirlo meglio: non è necessario distinguere esplicitamente i diversi livelli logici di un linguaggio sufficientemente semantico; questi, infatti, possono essere chiariti in forza del significato stesso delle affermazioni. Per fare un esempio concreto, chiunque può comprendere l'espressione: "nella frase la Luna è rossa è è verbo", senza bisogno di premesse, virgolette o altre tecniche metalinguistiche.

D'altra parte, la metamatematica non si limita a definire, ma è anche in grado di dedurre. Ad esempio, la conclusione che una certa proposizione significativa è *vera* e quindi che una certa interpretazione è un *modello*, è una deduzione di tipo metamatematico. Lo stesso vale per la *correttezza* delle regole deduttive del Sistema rispetto a un modello. Altri esempi saranno visti ben presto. Che dire allora circa l'affidabilità e la veridicità di una deduzione metamatematica? Lo affronteremo nel prossimo paragrafo.

Intanto, alla domanda con cui si è concluso il precedente paragrafo, sappiamo già rispondere: nei Sistemi assiomatici formali l'unica specie di *intuito* si realizza sotto la forma delle convenzioni semantiche che sono necessarie per la comprensione delle regole grammaticali e deduttive.

Puntualizziamo ora alcune convenzioni sulla terminologia che useremo in questo libro. Per "linguaggio matematico" di un Sistema assiomatico formale, intenderemo il linguaggio puramente simbolico (o *sintattico*, o *codificato*), privo di significato esplicito, costituito dalle sue proposizioni. Useremo anche *Teoria* o *Disciplina* come sinonimi di Sistema (matematico) e chiameremo in breve *premesse*, l'insieme dei suoi assiomi e regole (grammaticali e deduttive). Quando, rispetto a un *modello* del Sistema, è verificata la *correttezza* delle regole deduttive (cioè, ricordiamo, se in base ad esse si deducono sempre teoremi *veri*, se interpretati nel *modello*), diremo sinteticamente che il *modello è corretto*.

Infine, con "Matematica" intenderemo genericamente l'insieme, il corpus, di tutte le Teorie matematiche, come finora fatto.

I.3. Deduzioni metamatematiche

La metamatematica è fondata sulle convenzioni semantiche basilari del comune linguaggio e inoltre fa appello a principi elementari di "logica comune". Non è questo un ritorno delle discutibili *nozioni comuni*? La fondamentale differenza rispetto al caso tradizionale è che tali concetti non intervengono *direttamente* nella deduzione dei teoremi, ma lo fanno attraverso la definizione delle regole grammaticali e deduttive. Ne deriva che, qualora i concetti semantici usati in tali regole non apparissero indubitabili, esiste sempre la possibilità di *assiomatizzarli*, come chiariremo presto.

Consideriamo l'esempio del seguente Sistema assiomatico S (le cui regole ammettiamo che siano sufficientemente chiare):

[simboli] 0 1 x = +

[regola grammaticale] *una proposizione è costituita solo e soltanto da una qualunque sequenza ordinata di simboli tali che:*

a. Deve sempre trovarsi uno ed un solo simbolo "=".
b. I simboli "+" e "=" devono essere sempre preceduti e seguiti da un altro simbolo diverso da "+" o "=".

Così, ad esempio, sono proposizioni: "0x+1x0=0x+10+x", "1=x+00+x1" e "1x+11=01x". Non lo è invece la sequenza "01x=10=0", che viola la a), né "+10+=01+1x" che viola (due volte) la b).

[assiomi] x=x x+0=x

[regola di deduzione] *un teorema si ottiene solo e soltanto sostituendo in un assioma al simbolo "x", ovunque appaia, una stessa sequenza ordinata arbitraria dei simboli "0" e "1".*

Sappiamo già di non dover assegnare alcun significato ai simboli, ma abbiamo usato "+" e "=" perché lavorano in armonia con i concetti semantici ad essi comunemente associati. Si noti che nessun teorema può contenere il simbolo "x": pertanto, in questo nostro Sistema d'esempio, gli assiomi non sono teoremi, contrariamente a quanto accade nei comuni Sistemi (classici).

Esaminiamo ora la seguente frase: *dal primo assioma, applichiamo la regola di deduzione con la sequenza "01" ottenendo "01=01" come teorema*. La maggior parte dei lettori riconoscerà in essa un esempio di *dimostrazione*, cioè un ragionamento che consente di distinguere un teorema, precisamente "01=01". Qual è il linguaggio di una dimostrazione? Non ci sono dubbi che, non essendo matematico, deve trattarsi di metamatematica. Le dimostrazioni non sono l'unico esempio; è facilissimo esemplificare conclusioni metamatematiche, come: *ogni teorema di S non comincia con "x"*; *ogni proposizione che ha il simbolo "+" a destra del simbolo "=" non è un teorema di S*, etc. La sensazione tangibile è che si possano dedurre infinite asserzioni di questo tipo. Sembra quindi che la metamatematica non si limiti alla definizione delle regole del Sistema, ma intervenga continuamente in Matematica mediante deduzioni. Inoltre, nei casi considerati, che abbiamo scelto opportunamente, nessun lettore dubiterà della verità di tali affermazioni, a meno che abbia frainteso (cosí crediamo) il significato contenuto nelle regole del Sistema o nell'affermazione stessa. Quanto sono sicure tali deduzioni? Dietro questa domanda c'è l'ingenua pretesa di voler dar credito soltanto alle deduzioni propriamente matematiche, cioè ai teoremi di un Sistema assiomatico formale. L'interrogativo sarebbe allora: potrebbero tali conclusioni ricondursi a *teoremi interpretati* (detto in breve, *assiomatizzarsi*)? Certamente. Il punto è che ciò presupporrebbe il riconoscimento previo che una certa interpretazione è un *modello corretto* di un Sistema formale; ossia presupporrebbe, nuovamente, deduzioni basate su convenzioni semantiche, cioè ancora di tipo metamatematico. La domanda più appropriata sarebbe dunque se meriti la pena assiomatizzarle. Ad esempio, per ridurre a teorema interpretato l'espressione <<*ogni proposizione che ha il simbolo "+" a destra del simbolo "=" non è un teorema di S*>>, potrebbe adoperarsi il primo Sistema assiomatico introdotto (si veda la tabella del primo paragrafo), con "A" interpretato come "ogni proposizione che ha il simbolo + a destra del simbolo =", "B" come "non può essere dedotto dalla regola deduttiva di S", "C" come "non è un teorema di S", "D" identico a "C" (per completare il modello) e "→" come "implica". Dopodiché, una volta riconosciuto che le suddette interpretazioni costituiscono un *modello corretto*, la suddetta proposizione si dedurrebbe interpretando il teorema "A→C". Tale assiomatizzazione ha convertito la discussa deduzione metamatematica al teorema interpretato "A→C", ma ha accettato altre deduzioni metamatematiche: che le metaproposizioni corrispondenti agli assiomi "A→B" e "B→C" siano vere e la correttezza della regola deduttiva per il modello. Il lettore giudicherà da sé se ne è valsa la pena. Le deduzioni puramente metamatematiche sono comunque indispensabili; tutte le volte che una deduzione metamatematica sembra "immediata", facendo un uso elementare e inequivocabile di concetti semantici e "logica comune", è inutile introdurre un Sistema assiomatico cercando "maggior giustificazione" di essa. Almeno, se per farlo si dovranno poi scomodare concetti e convenzioni semantiche dello stesso livello di comprensione. Ciò rivela l'idoneità in Matematica, dell'uso di deduzioni metamatematiche estemporanee, come quelle ora esemplificate, non direttamente legate alla definizione di un Sistema assiomatico.

D'altra parte è fuor di dubbio che nel caso in cui, invece, la deduzione metamatematica (che nel seguito chiameremo in breve *metateorema*) non sembri così indiscutibile, per un uso ambiguo di significati o di logica, essa potrà riottenersi più rigorosamente come teorema interpretato mediante l'uso di un Sistema assiomatico basato su convenzioni semantiche più elementari, capace di discernere inequivocabilmente tutti i suoi criteri deduttivi (escludendone possibilmente altri).

Aggiungiamo che la metamatematica opera continuamente attraverso definizioni (lo osserveremo nel prossimo paragrafo) ed anche che è normalmente indispensabile per descrivere le *proprietà* delle collezioni matematiche (lo vedremo in dettaglio nel par. II.18). Inoltre, essa risulta, per così dire, *intrinsecamente* indispensabile; ciò significa che, per gli obiettivi della Matematica, è necessaria una metamatematica capace di adoperare continuamente nuovi concetti semantici, cioè di svilupparsi, di ridefinirsi senza sosta. Questa può considerarsi l'essenziale conclusione filosofica dei moderni teoremi e metateoremi limitativi della Matematica, oggetto di questo libro. Naturalmente, a suo tempo, ritorneremo con la massima profondità su questo punto.

Riepiloghiamo le importanti conclusioni della nostra analisi. La prima è che in ogni caso abbiamo bisogno di elementari convenzioni semantiche e logiche, non oltre specificabili. Per il linguaggio metamatematico che fa uso di esse non è possibile stabilire con assoluta precisione il grado di rigore che bisogna pretendere. Per osservarlo più tecnicamente, sia data una definizione D di "espressione semanticamente rigorosa". D è veramente una tale definizione, se si interpretano i suoi termini in un certo e corretto modo, altrimenti è una stringa di caratteri senza o con un oscuro significato. Ma mentre si interpreta un termine della D, la stessa definizione D non è ancora disponibile; dunque, nessuna interpretazione di D può essere rigorosamente conclusa come semanticamente rigorosa o no. In parole povere, una definizione di "espressione semanticamente rigorosa" non può essere conclusa come "semanticamente rigorosa" in base alla definizione stessa.

La seconda conclusione è che il linguaggio metamatematico opera continuamente in Matematica, attraverso definizioni, descrizioni di proprietà e deduzioni, cioè metateoremi. Infine, che è sensato ricondurre i metateoremi a teoremi interpretati soltanto quando viene a mancare l'incontestabilità della deduzione stessa a causa di ambiguità nei significati dei suoi termini o nel criterio deduttivo. In seguito si vedrà un esempio davvero fondamentale di ciò.

A qualcuno potrebbe infastidire la descritta vaghezza insita nei fondamenti dell'assiomatica formale; i significati dei termini che usiamo sono "certi" (con un grado imprecisabile di tale certezza) in base a convenzioni che, indubbiamente, dipendono anche dall'esperienza, dal fatto che tutti (o quasi tutti) sono d'accordo; lo stesso può dirsi per i principi di "logica elementare". Ci sarebbe allora un fondamento pragmatico nei Sistemi assiomatici formali per via del carattere semantico delle loro regole grammaticali e deduttive?

In ogni tipo di linguaggio semantico non si può "dimostrare" il significato di tutti i termini che si usano: alcuni devono convenirsi all'inizio del discorso. Pretendere di capirsi senza prima mettersi d'accordo sul significato di qualcosa e senza adottare, seppur in sottinteso, delle regole basiche di formazione delle frasi, è impossibile. Su queste convenzioni, peraltro, non resta che ammettere un imprecisabile (speriamo sufficiente) grado di comprensione. La risposta alle precedenti domande è, dunque, un inevitabile "sì", anche se non si deve sottovalutare il vantaggio rispetto alla trattazione tradizionale, ossia la possibilità di stabilire, in caso di ambiguità, convenzioni semantiche più solide attraverso nuove assiomatizzazioni.

E, finalmente, è indubbio che un atteggiamento sempre drasticamente critico sulla possibilità di riuscire ad intenderci, è troppo deleterio: chi ritenesse insormontabili tali problemi, infatti, dovrebbe coerentemente... tacere!

I.4. Definizioni

Chiunque abbia studiato, anche superficialmente, una qualsiasi Disciplina matematica, sa quanto numerose ed importanti sono le *definizioni*. In teoria, non ci sarebbe necessità d'altro, oltre che di simboli, regole grammaticali, assiomi e regole deduttive. Ma in pratica, in ogni comune Teoria matematica, si rende necessario fare delle convenzioni per semplificare lunghe espressioni o liste di espressioni. Le definizioni possono consistere in semplici *denotazioni* (o *posizioni* o *abbreviazioni*, etc.) che, tipicamente, servono a ridurre la lunghezza delle stringhe; oppure, possono essere *autoreferenziali*, cioè menzionare, per definire un ente, l'ente stesso. Nella seconda parte, discuteremo la problematica dell'autoreferenzialità (par. II.13).

Bisogna evidenziare che, sovente, l'uso delle definizioni non ha il solo scopo di abbreviare, ma soprattutto quello di mettere in evidenza enti e concetti che concentrano e sintetizzano proprietà numerose da elencare; il che, piuttosto che comodo, è praticamente necessario per la comprensione degli argomenti. Un esempio emblematico che ci riguarderà spesso è l'uso del simbolo N per indicare l'insieme dei numeri naturali.

Come abbiamo segnalato, anche le definizioni sono convenzioni semantiche, cioè sono stabilite dalla metamatematica. Il linguaggio matematico, privo com'è di un determinato significato, è incapace di stabilire una convenzione comunque banale, finanche una semplice abbreviazione.

I.5. Obiettivi, desideri e Sistemi *ben definiti*

Cerchiamo adesso di imporre alcune condizioni minime per i Sistemi assiomatici formali. L'obiettivo è indubbiamente quello di selezionare dei Sistemi che siano utili alla conoscenza. Sequenze di caratteri senza significato sono soltanto un inutile esercizio linguistico; ci interessano invece le loro interpretazioni *vere* ed in particolare che il Sistema le possa dedurre. Ci interessano cioè i loro *modelli corretti*, così come li abbiamo chiamati. In tali condizioni, i teoremi sono utili e interessanti perché ci forniscono proposizioni vere per siffatti modelli.

Cominciamo col chiederci: è sempre possibile scoprire che una certa proposizione è un teorema, se lo è? Ovvero: esiste sempre la dimostrazione di un teorema? E se sì, è sempre possibile individuarla? La prima domanda ha un'unica risposta: un teorema che non può dimostrarsi non è ciò che *vogliamo convenire* chiamare *teorema*, in Matematica. In altri termini, per definizione, ogni teorema deve ammettere almeno una dimostrazione, cioè un ragionamento metamatematico che ci convinca che esso discende dalle premesse del Sistema. La seconda domanda deve essere chiarita. Abbiamo appena convenuto che la dimostrazione di un teorema deve sempre esistere. Pretendere che ci sia sempre un metodo sicuro per individuarla, però, può sembrare eccessivo. Ci riferiamo a un metodo "automatico", che tutti potrebbero seguire, senza necessità di alcuna inventiva. Poi, tale metodo potrebbe essere *praticamente* inattuabile, ad esempio, per la sua lunghezza (come potrebbe intuirsi in considerazione dei numeri enormi che si hanno nel calcolo combinatorio); se cosí, la creatività del matematico nell'individuare dimostrazioni sarebbe necessaria solo per ragioni pratiche: per sintetizzare e semplificare i ragionamenti; in principio, infatti, se ne potrebbe fare a meno. Comunemente si ritiene che Hilbert confidasse che addirittura *ogni problema* in Matematica fosse risolvibile "meccanicamente"; riprenderemo l'argomento nella terza Parte. Ciò che per ora possiamo affermare senza dubbio è che le usuali Teorie matematiche non forniscono distintamente un metodo di questo tipo; molte dimostrazioni sembrano il risultato di intuizioni, "osservazioni" o indagini in parte casuali. A volte esse creano, collateralmente, nuovi ambienti e oggetti matematici; e nuove proprietà da dimostrare o confutare. La dimostrazione della proposizione di Fermat ha resistito più di tre secoli; oggi essa è molto complessa, ma non si può escludere che un giorno se ne trovi una molto più semplice. Nessuna previsione in tal senso può essere fondata su ragioni propriamente matematiche. E, naturalmente, restano innumerevoli altre congetture da dimostrare o confutare, non poche di vecchia data.

Abbassando le nostre pretese, si può imporre in primo luogo che ogni dimostrazione sia rappresentabile nei caratteri di un linguaggio convenuto che impiega un numero *finito* di simboli: tipicamente, quelli alfa-numerici del linguaggio naturale. In secondo luogo, che sia riconoscibile come dimostrazione una volta rappresentata; ovviamente, una condizione necessaria è che essa sia *finita*, poiché un ragionamento che non termina non può concludere. Ma vogliamo anche di più: di fronte a un ragionamento che *non è* una dimostrazione, desideriamo, ancora, che esista sempre la possibilità di concluderlo. In definitiva, vogliamo che esista sempre la possibilità di verificare o smentire un ragionamento che pretende essere una dimostrazione. Non ammettere ciò, significherebbe considerare *a priori* inesorabilmente affetti da incertezza i ragionamenti fondamentali della Matematica. Non sembra sensato. Dopotutto una dimostrazione non è una proposta, ma un'affermazione che deve includere sufficienti ed indiscutibili ragioni, pur nei limiti della Semantica. Si pretende che tali ragioni possano sempre concludersi come sufficienti o insufficienti, pur di indagare abbastanza. Tecnicamente, vogliamo allora che esista sempre la possibilità di concludere, fissato un qualsiasi oggetto rappresentabile *x*, se *x* è una dimostrazione o no. Chiameremo *distinguibile* un insieme di questo tipo: ripetiamo, *un insieme per cui, fissato un qualunque oggetto nella rappresentazione convenuta, è possibile concludere metamaticamente se esso appartiene all'insieme oppure no*[6]. Altre imposizioni analoghe sembra opportuno che debbano farsi sull'insieme delle proposizioni. Normalmente, se *x* è una stringa finita qualsiasi dei caratteri ammessi, la grammatica ci indica se è corretta o meno. Tutto ciò che il maestro segna in rosso è errore d'ortografia e ciò che non segna è corretto. D'altra parte, conveniamo che una stringa con almeno un carattere non ammesso non è una proposizione. Sembra allora normale pretendere che le regole grammaticali debbano specificare un insieme delle proposizioni *distinguibile*.

I Sistemi che soddisfano le precedenti condizioni, li chiameremo *ben definiti*. Nel seguito, supporremo sempre, spesso tacitamente, che i Sistemi matematici di cui parleremo lo siano. Riassumiamo in breve le condizioni di *buona definizione*: le proposizioni sono distinguibili tra l'insieme delle stringhe finite dei simboli ammessi; i teoremi sono proposizioni che ammettono almeno una dimostrazione; le dimostrazioni sono stringhe finite, in generale semantiche, di caratteri alfa-numerici e sono distinguibili. Tali caratteristiche sono una sorta di "minima sensatezza" per un Sistema formale. Dunque, non avrebbe senso cercare di formalizzarle all'interno di un particolare Sistema. Ci stiamo riferendo alla possibilità di definire formalmente la *buona definizione* all'interno di un Sistema matematico in modo che poi esso sia in grado di stabilire (mediante i suoi teoremi) se altri Sistemi matematici sono *ben definiti*. Per tale Sistema, infatti, ci chiederemmo: è *ben definito*? Se sì, allora lo sarebbe informalmente (nella sua struttura di base, la definizione di *ben definito* non è

[6] Seguiremo sempre l'accorgimento di usare verbi come "concludere", "stabilire", "decidere", etc., o il più tecnico "metadimostrare", in riferimento a ragionamenti metamatematici che conducono a metateoremi; mentre "dimostrare" sarà usato soltanto per i ragionamenti metamatematici che conducono a *teoremi* propriamente detti.

ancora disponibile) e la codifica di *buona definizione* non comprenderebbe tutti i casi. Se no, allora la stessa formalizzazione di *ben definito* non sarebbe *ben definita* e diventerebbe questionabile. Più avanti avremo una conferma del carattere *primitivo* di alcuni concetti contenuti nella *buona definizione* di un Sistema (per esempio, quello di *finito*).

L'imposizione che le dimostrazioni siano distinguibili implica che debbano esserlo anche i teoremi? Ovvero: nei Sistemi *ben definiti*, l'insieme dei teoremi è distinguibile? Se x è una stringa alfabetica qualsiasi, possiamo intanto distinguere se è una proposizione; se è un teorema, esiste una sua dimostrazione, cioè una conclusione metamatematica del fatto che lo è. Ma se non lo è? Una conclusione metamatematica del fatto che non è un teorema, non fa certo parte delle *dimostrazioni*; la *buona definizione* per il Sistema non sembra implicare che debba sempre esistere. Come vedremo, ci sono delle concrete ragioni per desiderare di riconoscere anche i *non-teoremi*, cioè le proposizioni che il Sistema non potrà mai dedurre. Riaffronteremo questo problema per i Sistemi assiomatici che di volta in volta considereremo.

Spesso viene affermato che il fatto che gli elementi di un insieme siano di numero *finito* implica la loro *distinguibilità* (anzi, addirittura la loro *decidibilità*, una condizione ben più forte, come vedremo). Evidentemente si trascura il fatto che tali elementi potrebbero non essere *individuabili*. Più tardi approfondiremo questo concetto e mostreremo un caso (non banale) di assiomi finiti e tuttavia non distinguibili.

Sottolineiamo che il criterio di *distinzione* di cui abbiamo parlato è il risultato di una generica, purché convincente, "conclusione metamatematica". Dunque il lettore non deve necessariamente interpretarla come una procedura "meccanica". Nella Parte terza del libro approfondiremo quest'argomento e cosa si vuole intendere per "meccanico"; lì si comprenderà appieno la ragione di quest'avvertimento.

Le condizioni di *buona definizione* richiedono, naturalmente, delle opportune caratteristiche di determinatezza per le *premesse* del Sistema. Più tardi le studieremo in relazione ai Sistemi *classici*, più oltre definiti.

I.6. Il Calcolo logico classico

I Sistemi assiomatici formali finora considerati sono molto semplici. In ogni Disciplina matematica abbastanza evoluta si trova un linguaggio formale assai vicino a quello naturale. Se, ad esempio, apriamo un libro di Geometria, vi troviamo espressioni, come: "se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano che la contiene è perpendicolare a tale piano". Tali proposizioni sembrano possedere significato. In molti teoremi compaiono ulteriori concetti che giudicheremmo semantici, come "e", "o", "non", "esiste" e "uguale". Che succede? Non si è detto che le espressioni matematiche sono prive di significato?

Per cominciare, l'assiomatizzazione formale della geometria è in grado di eliminare il significato dei termini "retta", "piano", etc., anche se normalmente tali termini non si sostituiscono con simboli qualsiasi per facilitare la comprensione. Nel nostro esempio, abbiamo anche visto come si può assiomatizzare con un solo simbolo il costrutto "se…allora" (ovvero "implica"). Ebbene anche i concetti "e", "o", "non", "uguale", "ogni" ed "esiste" possono essere assiomatizzati. Dopo la probabile sorpresa iniziale di questo fatto, riconosceremo (in un successivo paragrafo) che, anzi, in teoria sono possibili diverse assiomatizzazioni, ciascuna capace di riflettere in parte il carattere semantico di tali concetti. La più importante di esse, tradizionalmente, viene chiamata *Logica classica* e sarà descritta a continuazione. Poiché l'argomento è fondamentale, dato che in seguito studieremo solo i Sistemi matematici assiomatizzati secondo la Logica classica, la descrizione a grandi linee che faremo non può essere priva di qualche tecnicismo; tuttavia non è affatto indispensabile che il lettore comprenda tutti i dettagli.

In primo luogo, in Logica classica, si restringe l'ambito delle *interpretazioni*. Dato un Sistema assiomatico formale, si definisce *interpretazione classica*, una corrispondenza che associa ad ogni proposizione matematica del Sistema un'affermazione semantica con valore *vero* o *falso*, una possibilità escludendo l'altra, e per cui se essa ha il valore *vero* allora la *negata* ha il valore *falso* e viceversa. Qui stiamo considerando una negazione di carattere semantico, ammettendo che ogni affermazione semantica classica abbia un'unica negazione (come in: "il gallo canta", "il gallo non canta")[7]. Questi due principi si chiamano: *del terzo escluso* e *di non contraddizione*. Un *modello classico* è, naturalmente, un'interpretazione classica che verifica gli assiomi.

Successivamente, si assiomatizzano i concetti "non" e "o" (detti *connettivi logici*), mediante un opportuno Sistema assiomatico, detto *Calcolo classico formale degli enunciati*. In concreto, si introducono dei simboli arbitrari per tali concetti, più altri (come le lettere maiuscole) per le stesse proposizioni e le parentesi; queste ultime, in realtà non sono necessarie: il loro uso è soltanto molto comodo. Poi si stabiliscono quattro opportuni assiomi, delle regole grammaticali e due regole deduttive. Ebbene, interpretando ciascun simbolo con il concetto semantico spontaneamente corrispondente ed assumendo che l'interpretazione sia *classica*, si ottiene un *modello*. Faremo un solo esempio: uno degli assiomi, è "(*non*X)*o*(Y*o*X)"[8]. Se lo interpretiamo con il semantico "non" per *non*, "oppure anche" (cioè con valore non esclusivo) per *o* e consideriamo "X" e "Y" come generiche proposizioni, nonchè "(" e ")" come operatori che stabiliscono precedenza, assumendo che l'interpretazione sia *classica*, otteniamo una verità. Infatti, in tal caso, la proposizione "A*o*B" è vera quando una almeno delle due proposizioni A e B è vera, potendo anche essere entrambe vere (non esclusività); cioè, resta escluso che possano essere entrambe false. Ora, il primo membro dell'assioma è falso soltanto quando X è vero; ma quando X è vero, il secondo membro, (Y*o*X), è vero per qualsiasi valore di Y. Dunque l'assioma è sempre vero. Una verifica come questa può realizzarsi per ogni assioma e poiché si riconoscerà che anche le regole sono *corrette*[9], si ha la garanzia che si è costruito un

[7] Sono escluse, naturalmente, espressioni come "ma guarda un pò!", "uffa!", "perché fai questo?" che non sono, in effetti, *affermazioni* (aventi un indiscusso valore di verità) e non interessano alla Logica.

[8] Evitiamo di usare caratteri speciali per i simboli matematici corrispondenti a "non" ed "o", usando invece semplici corsivi per agevolare la lettura.

[9] In base al *Metateorema di correttezza* che, comunque, discuteremo solo nel paragrafo II.2.

linguaggio matematico la cui spontanea interpretazione è compatibile con la semantica del linguaggio naturale. Le regole grammaticali definiscono le proposizioni sia esplicitamente (per esempio, si può stabilire: "ogni sequenza di lettere alfabetiche che comincia con maiuscola è una proposizione") che implicitamente (come in: "se A è una proposizione anche *non*A lo è"). Le due regole deduttive si chiamano: della *sostituzione* e *modus ponens*. La prima funziona in modo analogo all'esempio visto in precedenza: afferma che in tutti gli assiomi si può sostituire ad una lettera maiuscola una proposizione qualsiasi. La seconda sarà discussa poco oltre.

I rimanenti concetti, "e" e "implica" possono poi codificarsi, nello stesso Calcolo classico degli enunciati, come mere *abbreviazioni* (o *denotazioni*) di opportune sequenze ordinate dei simboli introdotti; cioè, a rigore, non sarebbero nemmeno necessari, anche se in pratica sono molto utili[10]. In concreto, "A*e*B" è un'abbreviazione di "*non*((*non*A)*o*(*non*B))" ed "A *implica* B" (o, più in breve, "A→B") di "(*non*A)*o*B".

Con l'espressione *Calcolo predicativo classico formale del primo ordine* si intende un generico ampliamento del Calcolo formale degli enunciati. In esso si introducono due nuovi simboli per i concetti: "esiste" (tipicamente "$\exists$") ed "ogni" (ovvero "qualunque sia", tipicamente "$\forall$"), denominati *quantificatori logici*[11]. Ma il suo aspetto fondamentale è l'introduzione delle *variabili* e dei *predicati*. Quello che si pretende fare, in concreto, è formalizzare espressioni come: "x è il padre di y". Qui per x ed y intendiamo simboli che si faranno *variare* dentro un insieme prefissato di oggetti, chiamato *universo*. La precisazione metamatematica dell'*universo* avviene, ovviamente, quando si considera un modello del Sistema. Indichiamo con $\underline{P}(x,y)$ la codifica dell'espressione suddetta; si nota subito che tale proposizione non è passibile di un valore di verità *vero*/*falso*, perché x e y sono indeterminati. La definizione di

[10] Il criterio descritto, dovuto a Russell e Whitehead, non è l'unico; si può cominciare ad assiomatizzare due qualsivoglia dei concetti citati eppoi definire i rimanenti tramite questi.

[11] Analogamente a prima, risulta che uno qualsivoglia dei due quantificatori potrebbe eliminarsi in quanto abbreviazione di una proposizione contenente l'altro. Tuttavia in pratica sarebbe scomodo usarne uno solo.

interpretazione classica si deve dunque rivedere: la corrispondenza con un'affermazione interpretata passibile di un valore vero/falso si esigerà solo per un sottoinsieme delle proposizioni, detto degli *enunciati*, che definiremo a continuazione (mentre nel Calcolo classico degli enunciati, *proposizioni* ed *enunciati* coincidono). $\underline{P}$ si chiama *predicato*; è sottolineato per ricordare che deve essere seguito da due variabili per formare una proposizione; l'ordine delle variabili in $\underline{P}(x,y)$ è in generale importante. Anche espressioni che includono predicati, come ad esempio: $\underline{P}(x,y)\rightarrow(x=y)$, si vogliono proposizioni; esse saranno indicate con una maiuscola non sottolineata seguita da variabili, come A(x,y). In generale, un predicato può avere un numero finito arbitrario, maggiore o uguale a uno, di variabili. Le regole grammaticali si generalizzano conseguentemente; ad esempio si ha: "se $A(x_1, x_2, ...x_n)$ è una proposizione, anche $\forall x_1 A(x_1, x_2, ...x_n)$ lo è"; analogamente per $\exists$.

Per ottenere degli *enunciati* si possono sostituire le variabili con determinati valori dell'universo (dette *costanti*); ma questo non è l'unico modo. Per esempio, l'affermazione "per ogni x, esiste un y tale che x è il padre di y" (cioè, ogni oggetto è padre di un altro oggetto) è passibile di verità (ed è *falsa* in parecchi universi). Dunque, se una variabile è preceduta dai simboli $\forall$ o $\exists$ è come se fosse determinata dall'assegnazione di una costante; in tal caso si dice infatti *apparente*. *Libera*, altrimenti. In definitiva, una proposizione con variabili libere può convertirsi in enunciato sostituendo costanti alle variabili e/o rendendole *apparenti* mediante i quantificatori logici.

Formalmente, la definizione implicita tanto dei quantificatori logici, quanto delle proposizioni con variabili (che includono come caso particolare i predicati), si realizza con delle opportune regole grammaticali, con l'introduzione di due nuovi assiomi, la generalizzazione delle regole deduttive precedenti e due nuove regole deduttive. Citiamo soltanto l'assioma:

$$\forall x\, A(x) \rightarrow A(a)$$

dove la generalizzazione della regola deduttiva di sostituzione permette di sostituire ad A(x) una qualsiasi proposizione con variabile libera x (non necessariamente l'unica). A(a) indica l'enunciato ottenuto sostituendo ad x l'ente "a" (una costante). Le due nuove regole deduttive sono chiamate di *particolarizzazione*:

da B(x)→A *si deduce* ∃x (B(x)→A)

e di *generalizzazione*:

da A→B(x) *si deduce* A→∀x B(x) *e viceversa*

dove A è una proposizione qualsiasi che non ha x come variabile libera. Quest'ultima regola implica che quando in un assioma o in un teorema compaiono variabili libere, questa "libertà" è fittizia, in quanto l'espressione è equivalente a un'altra che usa $\forall x_i$ per ogni variabile libera x_i. Di conseguenza, assiomi e teoremi risultano sempre *enunciati*, cioè passibili di verità (ed in particolare, come sappiamo, devono risultare veri in ogni modello, per definizione stessa di modello).

Certo, per portare a termine la definizione dei predicati che si vogliono usare nella Teoria., bisognerà inoltre aggiungere degli specifici assiomi che li caratterizzano.

Le regole appena citate definiscono l'uso dei quantificatori logici in riferimento alle sole variabili. Si vuol dire, che dopo ∀ o ∃ deve sempre esserci una variabile, cioè un generico elemento dell'universo; le espressioni così ottenute si chiamano *del primo ordine*. Per tale ragione il Calcolo predicativo descritto è detto *del primo ordine*. Per *espressioni di secondo ordine* si intendono quelle che usano i quantificatori sui predicati, come in "$\forall \underline{P}(x_1, x_2, ... x_n)$" o "$\exists \underline{P}(x_1, x_2, ... x_n)$". Un'espressione del secondo ordine interpretata potrebbe essere: "ogni relazione che c'è tra le rette *r* ed *s*, c'è anche tra le rette *r* e *t*" oppure "esiste una proprietà tale che ogni numero pari non la verifica". Naturalmente, non ci sono limiti a questo tipo di complessità[12]. In principio, non c'è nulla di straordinario

[12] Al *terzo ordine*, si può quantificare su oggetti del tipo $\underline{\mathbf{S}}(x , \underline{P}(x_1, ... x_n))$, chiamati *super-predicati*, dove x, x_1,... x_n sono variabili e $\underline{P}(x_1,... x_n)$ è un predicato. Un esempio semantico potrebbe essere: "La proprietà per cui, data una

nell'ammettere delle proposizioni di ordine successivo al primo per il Sistema formale; l'unico avvertimento – che comunque vale anche per il primo ordine – è di non interpretare semanticamente i simboli, pena il non rispetto della *formalità*. Ad esempio, se all'insieme degli assiomi di un Sistema assiomatico formale del primo ordine aggiungessimo un solo assioma che usa l'espressione "... $\forall$ $\underline{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)$...", rendendolo così del secondo ordine, sarebbe errato (cioè contro con i principi dell'assiomatica formale) dedurre un teorema sostituendo a $\underline{P}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ un certo predicato $\underline{Q}(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Infatti, se non si aggiungono altre apposite premesse, la sequenza "... $\forall$ $\underline{P}$(..." resta formalmente sterile: nel sostituire $\underline{Q}$ a $\underline{P}$, si obbedisce a una interpretazione semantica del nuovo assioma, violando la formalità. Per ripristinare la formalità in un caso come questo, non bisogna fare altro che esplicitare in simboli, mediante ulteriori premesse, come si deve operare sintatticamente a partire dal nuovo assioma del secondo ordine. In ciò, ovviamente, non c'è alcuna differenza col primo ordine: ad esempio, nel Calcolo formale del primo ordine bisogna seguire un preciso assioma (quello prima citato) per dedurre da tutte le proposizioni contenenti la sequenza "... $\forall$ x....".

Comunque, espressioni di ordine superiore al primo sono generalmente assenti nelle comuni Discipline matematiche; infatti, vedremo che il primo ordine è sufficiente per tutte le esigenze espressive rispettose della formalità (conseguenza del teorema di Lindström, par. II.16).

Ripetiamo che abbiamo descritto un ampliamento generico del Calcolo degli enunciati: un particolare Calcolo predicativo classico formale del primo ordine si otterrà definendo completamente i predicati che usa; per far ciò, nel Sistema specifico si aggiungeranno degli assiomi caratterizzanti tali predicati, fermo restando che essi devono sempre soddisfare ai due precedenti generali. Un Sistema basico è il *Calcolo predicativo classico del primo ordine con uguaglianza*, in cui si introduce l'*uguaglianza*, come un predicato a due variabili, caratterizzato dal soddisfacimento di alcuni assiomi,

terna di rette *r*, *s* e *t* si ha che ogni relazione che c'è tra le rette *r* ed *s* c'è anche tra le rette *r* e *t*, esiste sempre, se *s* e *t* sono parallele". Naturalmente, si può aumentare il numero d'ordine all'infinito.

dei quali citiamo solo: $\forall$x(x=x). Normalmente si conviene, appunto, di usare il carattere speciale "=", anziché una maiuscola sottolineata e di scrivere "x=y", anziché "=(x,y)". Altri esempi di predicati, introdotti in diversi Sistemi assiomatici, sono: parallelismo, ortogonalità (entrambi a due variabili), parità (a una variabile), relazione "maggiore di" (simbolo ">", a due variabili), etc.

Con ciò terminiamo la nostra rassegna della Logica classica. È evidente che nel processo di assiomatizzazione non viene codificato tutto il significato, in senso generale, di ciascuno dei concetti discussi, ma soltanto il loro uso, diciamolo tecnico, in seno a un ristretto ambito matematico. Ad esempio, citiamo la regola deduttiva del *modus ponens*: <<Da "A→B" e "A" si deduce "B">>. Qui "e" e "si deduce" sono ben diversi dai simboli matematici "*e*" e "→" prima citati. Infatti, essi non devono qui obbedire agli assiomi del Calcolo classico, ma possedere quell'insostituibile valore semantico che ci permette di "metter giù" una nuova proposizione, il teorema "B", a partire dalle due proposizioni "A→B" ed "A". Del resto, abbiamo già chiarito che una regola deduttiva non può mancare di un carattere semantico.

Per *Sistema assiomatico predicativo classico*, o in breve *Sistema classico*, intenderemo un Sistema costituito da un particolare Calcolo predicativo classico formale del primo ordine (con la sua opportuna schiera di predicati) *più altri assiomi e regole proprie* del Sistema, sulle quali *non facciamo nessuna ipotesi specifica*. Tale Sistema potrebbe quindi aggiungere espressioni *di un qualsiasi ordine* tra gli assiomi e/o fare uso delle più complesse regole deduttive, inclusa la possibilità di non rispettare la formalità: il Sistema, per dedurre i teoremi, potrebbe esigere un ineliminabile significato per le sue proposizioni. In effetti, più avanti scopriremo di dover fare i conti anche con Sistemi classici non formali.

D'altra parte, quasi tutte le ordinarie, informali, Discipline matematiche possono essere ricondotte a *Sistemi classici formali*, dotati del corretto assetto assiomatico che ridurrebbe tutte le affermazioni, compresi i teoremi, a sequenze di simboli senza significato esplicito. È ovvio che siamo soddisfatti della mera *possibilità logica* di tale processo. Farlo in pratica implicherebbe non solo ridurre in simboli gli enti propri della Teoria (come le rette, i piani, etc., in Geometria) ma, come si è visto, aggiungere alle sue *premesse proprie* (cioè quelle che, nel caso della Geometria, coinvolgono solo le rette, il parallelismo, etc.), tutti gli assiomi e regole del Calcolo predicativo classico formale del primo ordine su cui si basa il Sistema. Ciò renderebbe la Teoria matematica terribilmente (e inutilmente) complicata e astrusa, perché semanticamente accessibile solo attraverso le sue regole grammaticali e deduttive. Non è quindi affatto sensato rinunciare, in pratica, alla spontanea "visione semantica" di enti, proprietà, connettivi e quantificatori in nessuna Disciplina matematica abbastanza evoluta; seppur essi, nella formale sistemazione assiomatica della Teoria, semantici non sono.

I.7. Coerenza e completezza sintattica

Per introdurre delle fondamentali proprietà per i Sistemi assiomatici, ci serviremo dello stesso Sistema assiomatico definito nel terzo paragrafo. Cioè, ripetiamo:

[simboli]   0   1   x   =   +

[regola grammaticale]   *una proposizione è costituita solo e soltanto da una qualunque sequenza ordinata di simboli tali che:*

a. *Deve sempre trovarsi uno ed un solo simbolo "=".*
b. *I simboli "+" e "=" devono essere sempre preceduti e seguiti da un altro simbolo diverso da "+" o "=".*

[assiomi]   x=x   x+0=x

[regola di deduzione]   *un teorema si ottiene solo e soltanto sostituendo in un assioma al simbolo "x", ovunque appaia, una stessa arbitraria sequenza ordinata dei simboli "0" e "1".*

Per tale Sistema matematico, definiamo (in un modo volutamente *non classico* per questione di generalità) la *negazione* (o *negato*) di un teorema: la proposizione ottenuta cambiando il suo simbolo iniziale; se è "1" si sostituirà con "0" e se è "0" con "1". Le negazioni dei teoremi "01=01" e "100+0=100", sono quindi: "11=01" e "000+0=100". Poichè ogni teorema comincia con "0" o "1", esiste un'unica negazione per ogni teorema. Per gli assiomi, invece, (che, ricordiamo, non sono teoremi) la negazione non è definita. Ma questa circostanza (non classica, come riconosceremo), non deve insospettire: non è che una conseguenza del nostro particolare Sistema, scelto come esempio semplice.

Un Sistema matematico si dice *coerente* rispetto alla relazione di negazione introdotta, se la negazione di ogni teorema non è un teorema. Per il nostro Sistema, concluderemo assai facilmente che è coerente rispetto alla negazione introdotta. La metadimostrazione di tale metateorema, può essere la seguente. Si consideri un arbitrario teorema; sia se esso è dedotto dal primo o dal secondo assioma, avrà i simboli iniziali di ciascun membro (cioè di ciascuna parte a destra e a sinistra di "=") uguali. Pertanto, la sua negazione li avrà diversi e dunque non potrà essere un teorema.

La coesistenza di una proposizione e della sua negata come teoremi, si definisce *contraddizione*. Dunque *coerenza* significa assenza di contraddizioni.

La coerenza è quindi una proprietà sintattica che dipende dalla definizione di negazione; da questo punto di vista non può ovviamente avere alcunché di "positivo" o "conveniente". Nel prossimo paragrafo vedremo, invece, quali effetti indesiderabili, da un punto di vista epistemologico, abbia l'*incoerenza* per una Teoria assiomatizzata secondo la Logica classica.

Diremo che un enunciato è *indecidibile* se né esso né il suo negato sono teoremi. Un Sistema in cui non esistono enunciati indecidibili si dice *sintatticamente completo* o, brevemente, *completo*.

Riassumendo: in un Sistema completo, per ogni fissato enunciato, esso o il suo negato è un teorema. Non si dimentichi che queste definizioni, per essere sensate, devono riguardare i soli *enunciati*, cioè le proposizioni passibili di verità; infatti, se una proposizione non è passibile di verità, né essa né la negata possono mai essere teoremi: allora ogni Sistema che può formulare proposizioni con variabili libere sarebbe incompleto!

Il nostro Sistema assiomatico ha infiniti enunciati indecidibili e non è, pertanto, completo. Ad esempio sono indecidibili "001+01+10=0+101" e "1011=0010". Il primo, infatti, contiene tre simboli "+" e pertanto non può essere un teorema; lo stesso vale per il suo negato. Il secondo non è un teorema, né lo è il suo negato "per colpa" dell'ultimo simbolo.

Perché tale definizione? Sapere se un Sistema matematico è completo o no è molto importante ai fini pratici. Usualmente, allo scopo di ingrandire l'insieme dei teoremi, le Teorie matematiche si evolvono introducendo nuovi assiomi; se la Teoria è completa e se ne desidera la coerenza, ciò risulta affatto inutile, nella migliore delle ipotesi. Infatti, in un Sistema completo ogni enunciato che non è un teorema è il negato di un teorema; pertanto se l'aggiunta di un nuovo assioma ingrandisse realmente l'insieme dei teoremi si renderebbe incoerente il Sistema, qualora fosse originariamente coerente. Quindi, se si vuole conservare la coerenza, l'assioma aggiunto deve essere sterile, cioè inutile. Inoltre, un Sistema completo possiede altre gradevoli proprietà epistemologiche che rileveremo più avanti.

D'altra parte, in un Sistema incompleto assiomatizzato secondo la Logica classica, sappiamo come fare per allargare senza pericolo di incoerenza l'insieme dei teoremi: aggiungere un enunciato indecidibile (o il suo negato) come assioma. Lo giustificheremo presto.

I.8. Le implicazioni della Logica classica

Nel seguito ci concentreremo nello studio delle proprietà dei *Sistemi classici*. In particolare siamo interessati alla ricerca di *modelli classici*, inoltre *corretti*, per il Sistema (d'ora in poi quando parleremo di *modello* ci riferiremo sempre ad un *modello classico*). È quindi fondamentale comprendere le conseguenze più eclatanti della Logica classica.

Di norma, tale Logica è considerata la più semplice e spontanea per un linguaggio come quello matematico. Tuttavia non si può negare che, almeno in parte, ciò sia dovuto all'abitudine, al fatto che essa sia sempre stata e sia ancora tacitamente sottintesa in ogni ordinaria Disciplina matematica, restando ancora insolite le Teorie basate su logiche alternative. Per cominciare, mostreremo come non tutte le conseguenze degli assiomi e regole del Calcolo logico classico siano semanticamente cosí indiscutibili.

La questione puó ben illustrarsi osservando la formalizzazione di "A *implica* B" (nel seguito "A→B"), che, come si è detto, si definisce come abbreviazione di "(*non*A)*o*B". Vediamo le ragioni che, in base alla Logica classica, conducono a questa posizione.

Consideriamo l'affermazione (C) "Se ci sono gatti (A), non ci sono topi (B)"; quando C sarà vera o falsa in logica classica? Due casi sono ovvi: 1) se A è vera e B è vera, allora C è vera; 2) se A è vera e B è falsa, allora C è falsa. Restano due casi, in cui A è falsa e B può essere vera o falsa. Ma se non ci sono gatti, la frase C, e proprio da un punto di vista semantico, non fa alcuna imposizione: non dice nulla circa la presenza o assenza di topi. Assegnare necessariamente un valore di verità ai due casi restanti è, dunque, indubbiamente forzato, ma è quello che bisogna fare in Logica classica per sua stessa definizione. Si potrebbe ritenere che, in fondo, si è totalmente liberi di assegnare questi due valori rispettando il valore semantico "implica" e quindi il modello semantico; ma il problema è che si rischia di far coincidere "→" con altri concetti che vogliamo usare e che vogliamo diversi. Cominciamo con l'assegnare a C "falso" in entrambi i casi (si veda la seguente tabella); ciò rende "→" identico ad "*e*". Infatti C risulterebbe vera se e solo se sia A che B sono veri; allora "se ci sono gatti non ci sono topi" sarebbe equivalente a "ci sono gatti e non ci sono topi". Non va bene.

A	B	C (prova di A→B)	C (prova di A→B)	C (prova di A→B)	C (prova di A→B)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V
		"→" identico ad "e"	"→" identico a "↔"	"A→B" identico a "B"	ok

Assiomatizzazione di A→B in logica classica

Proviamo ad assegnare ai due casi, ordinati secondo la tabella, rispettivamente il valore *falso* e *vero*. Ne risulterebbe che se fosse vero che "se ci sono gatti non ci sono topi", allora ci sarebbero necessariamente topi ovunque non ci siano gatti. Ma (per fortuna) con indipendenza dalla verità di C (che esagera un pò le doti feline), esistono altri metodi di disinfestazione. In effetti, si è reso "→" identico a "*implica e co-implica*" (ovvero "*se e solo se*"), che si può introdurre formalmente definendo l'espressione "A↔B" come abbreviazione di "(A→B)*e*(B→A)". Assegnando infine ai due casi, nell'ordine, *vero* e *falso*, si darebbe ad "A *implica* B" lo stesso valore di verità di B. Cioè, "se ci sono gatti non ci sono topi" equivarrebbe a "non ci sono topi".

Ecco perché, per esclusione, si assume l'ultima possibilità; in essa, "A→B" è sempre verificata quando A è falsa (cioè se non ci sono gatti) e "A→B" equivale a "(*non*A)*o*B", come si era anticipato. Conseguentemente a tale definizione si ha che, se A è un enunciato falso e B un *enunciato qualsiasi*, "A→B" è sempre vero! La forzatura è assai evidente ma è indubbio che, per quanto visto, questa è la soluzione che meglio rispetta il termine semantico "implica".

Vediamo adesso le drammatiche ripercussioni di ciò sulla questione dell'*incoerenza*. In Logica classica, com'è facile indovinare, la negazione di una proposizione viene definita mediante il simbolo *non* del Calcolo classico di cui si è parlato nel paragrafo I.6. Supponiamo che in un arbitrario Sistema classico S esista una contraddizione: diciamo "A" un enunciato tale che sia "A" che "*non*A" sono teoremi di S. Supponiamo che esista un *modello (classico) corretto* M di S; allora, le interpretazioni sia di "A" che di "*non*A" sarebbero vere in M. Ma, per le caratteristiche di *non*, l'interpretazione di "*non*A" è la negazione semantica dell'interpretazione di "A": pertanto risulta violato il principio di non contraddizione. Assurdo: M non può essere un modello classico.

La prima conclusione che evidenziamo per i Sistemi classici è, dunque, che *l'esistenza di un modello corretto implica la coerenza*. In secondo luogo, ci chiederemmo se è possibile "rattoppare" il Sistema in caso di incoerenza: se l'incoerenza è dovuta solo ad "A" o a pochi altri enunciati, si potrebbe pensare di "aggiustare" le cose o addirittura di tollerare qualche contraddizione. Per esempio nel linguaggio ordinario, l'affermazione "questo enunciato è falso" è contraddittoria, come il lettore potrà riconoscere: non le si può assegnare un valore vero / falso rispettando i due menzionati principi che caratterizzano ogni interpretazione classica. Ma, senza dubbio, si tratta di un'eccezione rara e *sui generis* che non inibisce troppo la gente dal continuare a parlare per timore di incorrere in altri paradossi[13].

Ma, per la peculiarità di *implica*, in ambito matematico è assolutamente diverso. Infatti, se il Sistema dimostra un enunciato falso "F" (che può essere "A" oppure "*non*A"), poiché, come abbiamo visto, "F→B" è vero *qualunque sia l'enunciato* "B", si può applicare la regola del *modus ponens*: <<da "F" e "F→B" si deduce "B">>, ottenendo "B" come teorema[14]. *Ogni enunciato è quindi un teorema!* Ecco la radicale conseguenza sintattica dell'incoerenza classica. Ecco allora che, per esempio, "2+2=5" *implica sintatticamente ogni enunciato*, come: "7=7", "7=113", "tutti i numeri naturali sono dispari", "non tutti i numeri naturali sono dispari", etc. In una Teoria matematica classica dove si sia scoperta *una sola* contraddizione, si può dimostrare tutto ed il contrario di tutto: *ogni altro* enunciato è contraddittorio. Non è semplicemente

[13] In questo libro useremo il termine *paradosso* per indicare un'affermazione contraddittoria, assurda dal punto di vista metamatematico (e, dunque da evitare). Alcuni distinguono tra *antinomie* e *paradossi*, convenendo che solo le prime sono irrisolvibili, mentre i secondi sono assurdità apparenti. Comunque, anche se ciò è indiscutibilmente più raffinato, non c'è necessità di assegnare un nome speciale alle affermazioni che sembrano assurdità ma non lo sono. Pertanto, parleremo solo delle prime, chiamandole tuttavia con il nome storicamente più usato: *paradossi*, appunto. Ritorneremo su di essi nel paragrafo II.13.

[14] Abbiamo usato il concetto di verità per semplificare alquanto la dimostrazione; in realtà "B" si dovrebbe dedurre in modo puramente formale. Ecco la corretta dimostrazione nel Calcolo classico di Russell-Whitehead. Supponiamo che "A" e "*non*A" siano teoremi. Dall'assioma "(*non*X)*o*(Y*o*X)", riscritto come "X→(Y*o*X)", mediante la regola deduttiva di *sostituzione* si deduce il teorema "(*non*A)→(B*o*(*non*A))", dove "B" è un enunciato qualsiasi. Dal *modus ponens* deduciamo allora il teorema "B*o*(*non*A)". Ora l'assioma "(X*o*Y)→(Y*o*X)", permette di dedurre, mediante *sostituzione* ed ancora *modus ponens*, il teorema "(*non*A)*o*B", che è l'abbreviazione di "A→B". Infine, di nuovo *modus ponens* per dedurre il teorema "B" a partire dal teorema "A".

che la Teoria non ammetta alcun modello corretto: è che *nessun enunciato della Teoria può interpretarsi in modo classico*! Non sapremmo davvero cosa farcene di una siffatta Teoria. E ciò vale per un *qualsiasi* Sistema classico, formale o no.

Come abbiamo accennato, sono stati proposti altri tipi di Logica per ovviare a tale drasticità della Logica classica: con tre valori di verità (*vero*, *possibile*, *falso*), con imposizioni circa un metodo effettivo per concludere la verità/falsità (Logica *intuizionista*) o revisionando la definizione stessa dei connettivi logici (Logica *lineare*). Tuttora sono considerate alternative inconsuete, ma non è detto che ciò non cambi in futuro.

Da un punto di vista sintattico, peraltro, non ci sono ragioni per ritenere in alcun senso irregolare un Sistema classico incoerente. Se la grammatica e la deduzione dei teoremi rispettano le regole stabilite, non ci può più essere nessun difetto strutturale nel Sistema; e di fatto, l'eventuale brutta sorpresa di accorgersi che la Teoria è incoerente, non invaliderebbe la correttezza delle deduzioni finora fatte (dato che tutti gli enunciati sono teoremi!), ma rivelerebbe che si è soltanto perso del tempo, dal punto di vista epistemologico. In tal senso, la stessa deduzione della contraddizione, anch'essa corretta, sarebbe tutt'altro che inutile! L'unica possibilità di errore logico potrebbe aversi qualora una regola di deduzione supponga la coerenza per generare alcuni teoremi. Menzionare la coerenza (o l'incoerenza) del Sistema in una regola deduttiva, obbedirebbe a un criterio circolare: la coerenza, che dipende dalle regole deduttive, dipenderebbe a sua volta dalla coerenza! Tuttavia, come vedremo più avanti (par. II.13), la circolarità non implica necessariamente assurdità in metamatematica; ciò malgrado, il caso è anomalo (mai usato nelle comuni Discipline) e richiederebbe una previa verifica (o almeno un convincimento speranzoso) di non paradossalità. Escludendo questo caso peculiare, possiamo affermare che l'incoerenza non rappresenta mai un errore logico-sintattico. Che poi tale Teoria sia assolutamente inutile è indubbio, ma è un fatto diverso, che riguarda l'aspetto semantico: precisamente il fatto che gli enunciati non possono interpretarsi sensatamente.

Il riconoscimento dell'esistenza di anche un solo, arbitrario, enunciato non dimostrabile, cioè che non può essere un teorema, è sufficiente per poter affermare la coerenza di un Sistema classico; allora, poiché tale condizione è anche necessaria per la coerenza, in definitiva è equivalente ad essa. Ad esempio, ogni Sistema classico *incompleto* è certamente coerente, perché un enunciato indecidibile significa due enunciati che non sono teoremi: esso e il negato. In altri termini, un Sistema incoerente è sempre completo.

Un'altra "strana" proprietà di ogni Sistema classico è che, se T è un teorema, allora "Y→T" è un teorema, qualunque sia l'enunciato "Y". Ciò discende semplicemente dall'assioma "X→(Y*o*X)" ovvero "X→(*non*Y→X)", per ogni coppia di enunciati "X" e "Y". Dato che "Y" è arbitrario, è lo stesso scrivere l'assioma come "X→(Y→X)". Ora, se "X" è un teorema, "Y→X" segue da *modus ponens*.

Un teorema classico che sembrerà abbastanza ovvio (ma la cui dimostrazione non è affatto breve, nel Sistema di Russell-Whitehead) è "A→A", valido per ogni enunciato "A". Da esso segue la fondamentale proprietà che, in ogni Sistema classico, *ogni assioma è anche teorema*. Infatti, basta applicare il *modus ponens* a partire dall'assioma "A".

Il *metateorema di deduzione* per i Sistemi classici, pur in principio non necessario, è utilissimo a semplificare dimostrazioni altrimenti lunghissime. Esso afferma che dimostrare una implicazione come "A→B" è equivalente a dimostrare "B" nel Sistema che si ottiene aggiungendo al Sistema iniziale l'assioma "A". In effetti, quando si cerca di dimostrare una tesi, in ogni Teoria classica, le ipotesi vengono trattate esattamente come se fossero assiomi. Daremo solo una giustificazione intuitiva del metateorema, poiché la sua metadimostrazione (che il lettore può trovare in un ordinario libro di Logica) non è così breve; intanto, se "A→B" è un teorema, è banale che un Sistema che possiede "A" come assioma avrà anche "B" come teorema: da *modus ponens*. Viceversa, sia S' il Sistema ottenuto da S aggiungendo l'assioma "A" (indicheremo in breve un tale Sistema con la notazione: S+A) e supponiamo che, in S', "B" sia un teorema; la tesi è che "A→B" è un teorema del Sistema S. Se "B" è un teorema di S, ogni enunciato di S implica "B" e quindi anche "A→B" è un teorema di S. Se "B" non è un teorema di S, allora in S', "B" può discendere solo grazie all'assioma

"A". Ciò suggerisce, appunto, che "A→B" sia teorema di S (come davvero conclude la corretta metadimostrazione).

I.9. Sistemi classici *ben definiti*

Discutiamo adesso le implicazioni della *buona definizione* sulle *premesse* di un Sistema classico qualsiasi. Il punto di partenza è la supposizione che un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine sia *ben definito*; questo fatto deve accettarsi come intuitivo o, se si preferisce, per convenzione. A rigore, per esempio, non è inquestionabile che il *modus ponens* sia una regola deduttiva chiara e priva di ambiguità! Ma ci sembra opportuno approfondire più tardi questo argomento (par. II.13). Continuiamo col mostrare che se un Sistema classico qualsiasi è *ben definito*, allora l'insieme dei suoi assiomi è *distinguibile*. Per assurdo, sia E un enunciato che nessun ragionamento metamatematico può concludere né escludere che sia un assioma. Consideriamo allora il ragionamento "dall'assioma E e dal teorema E→E si deduce che E è un teorema"; esso usa correttamente il *modus ponens* e, come visto, non si inganna quando afferma che E→E è un teorema. Pertanto, risulta scorretto se e soltanto se E non è un assioma; ma poiché non è possibile concludere o escludere quest'ultima cosa, non è neanche possibile concludere o smentire la sua correttezza, ovvero se sia o no una dimostrazione di E. Ma ciò è assurdo per l'ipotesi di *distinguibilità* delle dimostrazioni, dalla *buona definizione*.

Ricordiamo che un Sistema classico possiede, in generale, delle premesse *proprie* oltre a quelle del Calcolo predicativo classico formale del primo ordine su cui si basa. Come caso particolare (molto importante, come vedremo), c'è quello in cui il Sistema non aggiunge alcuna nuova regola grammaticale e deduttiva, ma soltanto degli assiomi *propri*. Metadimostriamo che, in questo caso, la *distinguibilità* degli assiomi è anche sufficiente per concludere la *buona definizione* del Sistema. Useremo il fatto che ogni dimostrazione di un teorema si può sempre "dilatare" in modo che, alla fine, faccia riferimento soltanto ad assiomi, regole deduttive e all'enunciato dimostrato, cioè il teorema finale. Vogliamo dire che, presa una dimostrazione che coinvolge un teorema T, essa si può sempre sostituire con un'altra che include la dimostrazione di T; e così via per tutti i teoremi, fino a quando non resta che la sola menzione di (un numero eventualmente enorme di) assiomi e regole deduttive, oltre che della conclusione. Se così non fosse, allora tale deduzione non deriverebbe unicamente dagli assiomi e dalle regole, come dev'essere in ogni Sistema assiomatico. Una dimostrazione siffatta la diremo brevemente *estesa*. Possiamo allora stabilire di considerare come *dimostrazioni* soltanto quelle *estese* (questa convenzione, ovviamente, scarterà ragionamenti normalmente considerati validissime dimostrazioni, ma, come abbiamo chiarito, non ne perderà realmente nessuna). Per metadimostrare l'asserto, osserviamo intanto che, poiché l'insieme degli enunciati resta quello definito dal Calcolo predicativo classico formale del primo ordine, esso è *distinguibile* dall'ipotesi di *buona definizione* di quest'ultimo. Inoltre, da tale ipotesi segue anche che è possibile *distinguere* ogni ragionamento che fa un uso corretto delle quattro regole deduttive classiche. Allora, tutti quelli che non rientrano in questa categoria possono, intanto, escludersi dall'essere dimostrazioni. Consideriamo, poi, un qualsiasi ragionamento della suddetta categoria che deduca un certo enunciato C, menzionando un numero finito di enunciati E_1, E_2, ...E_n. Per quanto detto, C sarà effettivamente un teorema, ovvero il ragionamento sarà una dimostrazione, se e solo se tutti gli enunciati E_1, E_2, ...E_n sono assiomi della Teoria. Allora, essendo gli assiomi *distinguibili*, potremo sempre *distinguere* quando tale ragionamento è una dimostrazione. In definitiva, concludiamo la *distinguibilità* delle dimostrazioni. Infine, ogni teorema ha almeno una dimostrazione. Infatti, ogni teorema deve seguire, per definizione, dagli assiomi e dalle regole deduttive; essendo i primi *distinguibili*, sono le seconde che, ragionando per assurdo, non sarebbero traducibili senza malintesi nel linguaggio delle dimostrazioni. Ma questo viola l'ipotesi di *buona definizione* per il Calcolo predicativo classico formale del primo ordine. Ciò completa la metadimostrazione che il Sistema è *ben definito*.

In generale, invece, il fatto che gli assiomi di un Sistema classico siano distinguibili, *non è sufficiente* a garantire la sua *buona definizione*; infatti, nulla vieta che le regole *proprie* del Sistema possiedano un certo grado d'ambiguità che lo impedisca. Più avanti ne vedremo un esempio non banale.

I.10. Dimostrazioni per assurdo

Il moderno assetto assiomatico dei Sistemi matematici classici impone una revisione, importante dal punto di vista logico, delle famose "dimostrazioni per assurdo" o "indirette". Nelle scuole primarie (dove non si adotta, certo, l'assiomatica formale) esse vengono introdotte pressappoco cosí: posto di voler dimostrare l'enunciato "A", si supponga la verità di "*non*A". Dal Sistema che si ottiene aggiungendo "*non*A" tra gli assiomi, si deduce una contraddizione: o "A" oppure la negazione di un teorema; quindi, "*non*A" non può essere vero, allora sarà falso e quindi "A" vero. Non sono mancate le critiche, in passato, a questa tecnica dimostrativa. Gli "accusatori" sostenevano che esse obbedissero in realtà a un nuovo criterio deduttivo (a una nuova regola, diremmo adesso), inizialmente non ammesso. I "difensori" pensavano di no. Altri, in una posizione intermedia, ritenevano che le dimostrazioni dirette, quando esistevano, erano "preferibili" alle indirette. Nell'ambiguità di un Sistema non assiomatizzato, la disputa è destinata a rimanere pura accademia.

Esaminando frettolosamente il ragionamento con l'ottica dell'assiomatica formale, si direbbe che esso usa il concetto di *verità* e presuppone che il Sistema sia coerente (quando scarta la situazione "assurda" di una contraddizione). Se fosse così, esso obbedirebbe realmente a un nuovo criterio deduttivo e per di più *pericoloso*, come abbiamo osservato nel paragrafo I.8. Per fortuna, non è realmente così. Da un punto di vista meramente sintattico, infatti, in base al metateorema di deduzione, quello che in una "dimostrazione per assurdo" si fa, è dedurre come teorema "A" a partire dal teorema "(*non*A)→A" oppure dal teorema "(*non*A)→(*non*T)", dove "T" è un teorema qualsiasi. Ebbene, ciò è legittimo in base alle regole deduttive classiche; cioè, non obbedisce ad alcuna nuova regola deduttiva. Presenteremo, per amor di completezza, l'intera corretta deduzione, avvisando il lettore che può tranquillamente saltarla senza alcun problema per gli argomenti futuri. Useremo l'assioma "(X→Y)→((Z*o*X)→(Z*o*Y))" ed il teorema "(*non*(*non*X))→X"[15], valido per ogni enunciato "X", la cui dimostrazione è abbastanza lunga nel Calcolo classico di Russell-Whitehead.

Si vuole, dunque, ottenere come teorema "A", a partire dal teorema "(*non*A)→A" (primo caso) oppure dal teorema "(*non*A)→(*non*T)", dove "T" è un teorema qualsiasi (secondo caso). Nel primo caso, utilizzando l'assioma precedente, con "*non*(*non*A)" al posto di "X" e "A" al posto sia di "Y" che di "Z", si ottiene: (*non*(*non*A)→A)→((A*o*(*non*(*non*A)))→(A*o*A)). Essendo il primo termine un teorema, da *modus ponens* otteniamo come teorema "(A*o*(*non*(*non*A)))→(A*o*A)". Ora, il teorema di premessa è un'abbreviazione di "(*non*(*non*A))*o*A". Utilizzando l'assioma "(X*o*Y)→(Y*o*X)" ed ancora *modus ponens*, deduciamo il teorema "A*o*(*non*(*non*A))". Quindi, applicando ancora *modus ponens* otteniamo il teorema "A*o*A". Infine l'assioma "(A*o*A)→A", permette di dedurre il teorema "A" da *modus ponens*. Nel secondo caso, il teorema di premessa è un'abbreviazione di "(*non*(*non*A))*o(non*T)", da cui può ottenersi, nel modo visto, anche il teorema "(*non*T)*o*(*non*(*non*A))", ovvero "T→(*non*(*non*A))". Da *modus ponens* si ottiene quindi il teorema "*non*(*non*A)". Ora utilizziamo il teorema "*non*(*non*A)→A" e giungiamo al teorema "A" con *modus ponens*.

Ecco tolto tutto l'arcano[16] a questo tipo di dimostrazioni, chiamate e realizzate abitualmente in modo scorretto dal punto di vista dell'assiomatica formale. Esse, nel rigoroso assetto assiomatico, non hanno nessun carattere peculiare o "indiretto" (ché non esistono dimostrazioni se non "dirette"!): non usano il concetto di verità, non presuppongono la coerenza e non rispondono a nuovi criteri deduttivi. Ma abbiamo chiarito che il tradizionale metodo, viziato nella forma, non si inganna sul teorema stesso.

---

[15] In realtà si ha l'equivalenza "(*non* (*non* X)) ↔ X", in armonia col concetto semantico che due negazioni sono equivalenti ad affermare. Ma a noi interessa solo in un senso.

[16] Ho letto nel WEB: "*in età scolare, ho avuto due* choc*: come si fanno i bambini e le dimostrazioni per assurdo*".

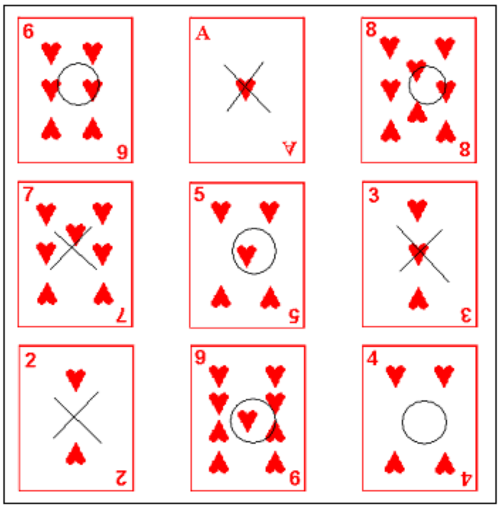
In ambito metamatematico, invece, la logica di questo tipo di deduzioni non abbisogna di correzioni. Come si è visto, in Logica classica si assumono il principio di non contraddizione e del terzo escluso per ogni interpretazione di un Sistema assiomatico. Sembra allora del tutto opportuno che tali principi si estendano al resto della metamatematica e quindi al linguaggio delle metadimostrazioni. Del resto, anche dal punto di vista del "comune intendere" tali principi sembrano del tutto naturali, pur con i difetti accennati nell'ottavo paragrafo. Ebbene, i ragionamenti metamatematici per assurdo, nella loro veste tradizionale, obbediscono proprio a questi due principi, come si osserva immediatamente. Si può quindi affermare che, in una *metadimostrazione per assurdo*, a differenza di una dimostrazione "per assurdo", si usa davvero la tecnica di scartare un'incongruenza semantica (come, ad esempio, contraddire una supposizione fatta); il che significa, ora sì, supporre coerenza nei ragionamenti della metamatematica.

Riassumendo, la tradizionale tecnica dimostrativa dell'"assurdo" funziona sia in ambito metamatematico che matematico, con la puntualizzazione che nel secondo caso essa *dovrebbe* (ma in ogni caso può) essere corretta formalmente, senza usare il concetto di verità o altre ipotesi che limitino la generalità del Sistema.

Terminiamo il paragrafo riconoscendo che, come si era preannunciato, l'aggiunta di un enunciato indecidibile o del suo negato come nuovo assioma del Sistema, non ne altera la coerenza. Sia S un Sistema in cui l'enunciato "A" è indecidibile; S, possedendo enunciati indimostrabili, è quindi coerente. Sia S' il Sistema S+*non*A. Se, per assurdo (semantico) fosse incoerente potrebbe da esso dedursi ciò che si vuole, ad esempio "A". Per il metateorema di deduzione, allora, in S può dedursi "*non*A→A". Ma allora "A" può essere dedotto "per assurdo" (sintattico) in S, contro l'ipotesi iniziale che è ivi indecidibile. La stessa metadimostrazione può applicarsi al Sistema S+A, diciamolo S''. Vale anche l'inverso di tale metateorema: siano S' ed S'', definiti come sopra, entrambi coerenti; allora "A" è indecidibile in S (che sarà pure coerente). Per assurdo (semantico), supponiamo, ad esempio, che "A" sia un teorema di S; ma allora lo sarà anche per S'. Tuttavia S' può dedurre anche "*non*A", dato che ogni assioma è anche un teorema, e pertanto è incoerente contro le ipotesi fatte. Analogamente si prova che "*non*A" non può essere un teorema di S; quindi "A" è indecidibile.

I.11. Frutti basilari del metodo assiomatico

In questo paragrafo illustreremo alcuni risultati del metodo assiomatico formale, fra cui alcuni storicamente assai importanti. Per mostrare l'utilità dell'uso di diversi modelli corretti di una stessa Teoria matematica, consideriamo il seguente gioco per due giocatori[17]: disposte scoperte sul tavolo le carte dall'asso al nove di uno stesso seme, ciascun giocatore, a turno, sceglie una carta e la aggiunge al suo gruppo inizialmente vuoto. Vince il primo giocatore che possiede nel proprio gruppo tre carte la cui somma è 15. Ci si può risparmiare di studiare le migliori strategie e di far somme, riconoscendo che c'è un modello più semplice dello stesso gioco: il popolarissimo *tris* (o *filetto*). Basta un rapido sguardo alla seguente figura per convincersene.



Il "teorema", conosciuto probabilmente a tutti, che si può sempre pareggiare, se si sa giocare bene (del quale ci si convince

[17] Quest'esempio è tratto da H. De Long, *Problemi non risolti dell'aritmetica*, rivista *Le Scienze* n. 34, giugno 1971.

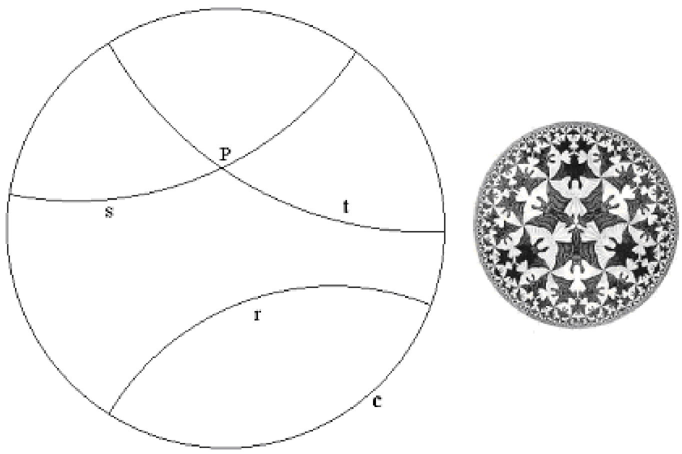
facilmente esaminando tutti i casi possibili), può evidentemente trasferirsi al modello con le carte (i cui casi possibili sarebbero molti di più); e le stesse strategie per farlo sono le corrispondenti stabilite dal quadro. Il gioco di cui si sta parlando è rappresentato da un unico Sistema assiomatico formale (del quale, peraltro, una definizione rigorosamente formale sarebbe ben più complessa della descrizione offerta dai due modelli).

In Matematica, è frequente il caso in cui un modello corretto di un certo Sistema assiomatico si costruisce mediante il modello corretto di *un altro* Sistema assiomatico. Tra gli scopi, c'è quello di indagare alcune caratteristiche del primo Sistema. Un esempio storicamente molto importante di questa tecnica, che senza dubbio ha accelerato gli sforzi per una completa sistemazione logica della Matematica, si ha a proposito delle Geometrie non euclidee; cioè quelle che assumono come assioma una delle possibili negazioni del V postulato di Euclide (nel seguito VP). Esso afferma: "data una retta *r* ed un punto *P* esterno ad essa, esiste una ed una sola retta passante per *P* e parallela ad *r*"[18]. Non pochi sono stati i matematici che, fin dall'antichità, hanno tentato di dimostrare l'enunciato, il quale non sembrava possedere l'indiscutibile carattere definitorio dei primi quattro postulati. Dopo un tentativo di dimostrazione da parte di G. Saccheri nel 1733 (errato, ma che di fatto delineò le basi per lo sviluppo delle Geometrie non euclidee), a metà del XIX secolo diversi matematici, tra cui Gauss, si convinsero dell'indimostrabilità di VP; alcuni di essi, come Riemann e Lobacevskij, svilupparono in concreto Geometrie non euclidee. Ma cosa circa la loro coerenza? E tale domanda ne sollevava un'altra ben più inquietante: siamo sicuri, anzitutto, che la Geometria euclidea (nel seguito GE), cioè quella che ammette VP come assioma, sia coerente? In tal modo le Geometrie non euclidee provocarono una discussione critica che, al di lá del problema specifico della loro non contraddittorietà, riguardava i fondamenti di ogni Teoria matematica. Nessuno metteva seriamente in discussione la coerenza della "vecchia" GE; ma la domanda era: che tipo di ragionamento, ammesso che esistesse, poteva concludere (o confutare) tale coerenza? E che cosa

[18] Playfair dimostrò che questa proposizione, più semplice di quella originale (che omettiamo) è ad essa equivalente.

circa lo stesso problema per le altre Discipline matematiche? Le sconcertanti risposte (parziali) a tali domande dovevano attendere qualche decennio.

Nel frattempo, tre esempi non euclidei, il primo dovuto a E. Beltrami e di validità non generale, gli altri due a F. Klein e H. Poincarè, con la desiderata generalità, implicavano che il VP era indecidibile se la GE era coerente. Descriviamo a grandi linee l'interpretazione di Poincarè (nel seguito IP). In riferimento alla circonferenza euclidea *c* della seguente figura,



Modello iperbolico di Poincarè

si consideri la seguente corrispondenza:

PUNTO	punto interno a *c*
RETTA	arco di cerchio, interno a *c*, ortogonale a *c*; oppure diametro di *c*

Il lettore si sarà accorto che stiamo usando il carattere minuscolo per i termini che vanno interpretati in senso usuale, cioè euclideo, ed il maiuscolo per la nuova interpretazione. La DISTANZA tra due PUNTI si definisce in modo speciale utilizzando la funzione logaritmica; non approfondiremo oltre, ma osserveremo soltanto che, con tale definizione, la DISTANZA tra due PUNTI, uno dei quali tende ad avvicinarsi alla circonferenza *c*, tende all'infinito; allora, anche in IP le RETTE sono di lunghezza infinita. Il disegno di Escher (nella figura a destra) visualizza le deformazioni che subisce una figura avvicinandosi alla circonferenza (nel piano euclideo tutti i pipistrelli o colombi avrebbero la stessa grandezza). L'interpretazione IP viene dunque costruita mediante il modello euclideo di GE. Nell'ipotesi in cui tale modello esiste ed è *corretto* (da cui segue anche che GE è coerente), cioè in cui i teoremi di GE sono *veri* nel modello euclideo, allora in IP risultano veri i primi quattro postulati di Euclide: ciò infatti discende da teoremi di GE. Per esempio, il primo, "due PUNTI distinti individuano una RETTA", può essere dimostrato in GE in base alle proprietà di cui godono gli archi di cerchi ortogonali ad una circonferenza: pertanto, è vero per IP. Dunque IP è un modello della Geometria che assume solo i primi quattro postulati, diciamola G. Inoltre, poichè la verità di ogni teorema di G nel modello IP discende dalla stessa correttezza del modello euclideo in GE, IP è un modello *corretto* di G. Ancora, in base a teoremi di GE può dimostrarsi che VP è, invece, *falso* in IP: si possono costruire infinite RETTE PARALLELE (definite analogamente a "parallele" cioè prive di PUNTI in comune) alla RETTA *r* e passanti per il PUNTO P esterno ad essa (nell'esempio della precedente figura, due di tali RETTE sono *s* e *t*). Dunque, VP non può essere un teorema di G: se lo fosse, sarebbe vero per il suo modello corretto IP. Allo stesso modo, neanche *non*VP può essere un teorema di G: se lo fosse, il modello euclideo di GE, in cui VP è assioma, non sarebbe un modello, come stiamo supponendo. Ne segue che, nelle stesse ipotesi, VP è indecidibile in G.

IP è un modello corretto di una Geometria in cui è vera una delle possibili negazioni di VP: precisamente, che di rette passanti per un punto e parallele ad una data ce ne siano infinite. Tale Geometria si chiama *iperbolica*. Si può provare analogamente che, sempre nell'ipotesi in cui l'interpretazione euclidea sia un modello corretto per GE, esistono modelli corretti anche per la Geometria *ellittica*, ove si assume che di tali rette non ne esistano.

È comprensibile un certo smarrimento per il modo in cui è stata ottenuta la metadimostrazione dell'indecidibilità di VP (ricordiamo, nell'ipotesi in cui il modello euclideo di GE sia corretto): la costruzione del modello IP richiede un nuovo tipo di immaginazione, di osservazione creativa. Anche nelle normali dimostrazioni c'è creatività; ma lì l'inventiva riguarda sempre la *scelta* degli oggetti da considerare, che comunque sono sempre elementi, cioè stringhe di simboli, della Teoria. Qui invece si creano strutture *ad hoc*, che fanno parte di una collezione essenzialmente semantica: quella dei modelli del Sistema assiomatico. Certo, sarebbe assai desiderabile poter disporre di un metodo sicuro che in tutti i casi, fissato il Sistema, ci indicasse i passi da compiere per concludere l'indecidibilità di un certo enunciato; senza ricorrere necessariamente alle interpretazioni, cioè a strutture semantiche. Riaffronteremo tale questione. Poi, c'è anche un altro tipo di sconcerto: nel caso, il fatto che il Sistema G sia interpretabile egualmente bene da modelli geometrici totalmente diversi da quello per cui si è creato. Ma qui bisogna serenamente riconoscere che ad essere scorretta è solo la presunzione che il Sistema G abbia già tradotto tutte le caratteristiche dell'intuitivo modello euclideo che si vuole riprodurre e studiare in veste assiomatica. Passata la sorpresa, ci si può anzi dedicare allo studio delle nuove "strane" Geometrie, magari scoprendone l'utilità. Nel caso, le Geometrie non euclidee possono descrivere gli spazi fisici cosiddetti "curvi" (per esempio, "incurvati" da una densità di energia, come previsto dalla Relatività Generale).

Lo *Spazio cartesiano* è un'interpretazione che associa numeri ed equazioni reali ai concetti di GE: una terna ordinata di numeri reali a "punto", opportuni tipi di equazione a "retta", "piano", etc., in modo che ogni ente e proprietà del modello euclideo abbia un corrispettivo equivalente. Esso è fondato sulla spontanea interpretazione dei numeri reali, detto *modello standard*. Su di esso avremo modo di ritornare dettagliatamente. Per ora si vuole solo evidenziare che, dunque, a partire dal *modello standard* dei reali si può costruire un modello corretto per GE: lo Spazio cartesiano; e ciò, per la menzionata equivalenza, implicherebbe che anche l'interpretazione euclidea è un modello corretto di GE. Pertanto, dall'esistenza del *modello standard* della Teoria dei numeri reali, seguirebbe l'esistenza di modelli corretti (ed in particolare la coerenza) sia per GE che, come mostrato, per le Geometrie non euclidee.

Ma, finalmente, esiste sempre un modo per "costruire" un modello corretto o per concludere che una certa interpretazione lo è? O, meno ambiziosamente, per concludere o confutare la coerenza di un Sistema? Questi interrogativi, verso la fine dell'800, suscitarono un rinnovato interesse nei confronti della Logica.

I.12. Non individuabilità di esistenti in Logica classica

In Logica classica l'esistenza di un ente non implica necessariamente la sua *individuabilità*, cioè che lo si possa effettivamente esibire, esemplificare. Si possono avere due casi di non individuabilità: nel primo, l'oggetto non è nemmeno *rappresentabile*, non ammette una rappresentazione nel modo che si è convenuto pretendere. Nel secondo, l'oggetto ammette una rappresentazione nel modo convenuto, ma non è possibile concludere che è l'oggetto cercato. Ciò può succedere perché in Logica classica una dimostrazione di esistenza può non fornire alcun metodo per individuare l'oggetto esistente: non *deve* essere connessa all'individuazione dell'ente; si parla in tal caso di dimostrazione *non costruttiva*. Tale prerogativa sembra ad alcuni un altro difetto epistemologico della Logica classica.

Pensiamo al mondo reale: chi dubita che sia assai frequente il caso in cui è impossibile individuare un oggetto concreto che pur siamo certi che esiste? Le parole del primo discorso scritto, il terzo granello di sabbia che ho toccato, il più grande numero pensato da Eulero, etc. Ma in questi esempi l'impossibilità è pur sempre legata a condizioni fisiche e non di principio (e se fossimo capaci di viaggiare indietro nel tempo, di leggere nel pensiero? Etc.). In Matematica, non ci interessano a priori difficoltà pratiche legate al tempo, alla leggibilità dei caratteri e così via. Dunque, il parallelo con le impossibilità fisiche del mondo reale non reggerebbe. Vediamo allora un esempio di impossibilità di individuazione che sembra di principio: "un numero non ancora individuato" ovvero "una frase non ancora considerata". È indubbio che tali oggetti esistono, anzi ne esistono infiniti; ad esempio, il numero delle frasi è infinito ma tutte quelle mai considerate sono e saranno sempre finite. Tuttavia, per definizione, è impossibile considerare una di esse: nel momento in cui lo si fa, esse non posseggono più la proprietà richiesta! Ma anche in questo caso, a ben osservare, c'è un "prima" e un "dopo": l'azione di individuazione dell'ente provoca un mutamento di condizioni che viene usato per far decadere la stessa proprietà di esistenza dell'ente. Inoltre, c'è anche un aspetto paradossale: la scrittura "una frase non ancora considerata" sembra considerare... una frase non ancora considerata; ma allora essa la considera o no? Come vedremo in dettaglio nel paragrafo II.13, la metamatematica deve fatalmente sapersi districare dai paradossi, cioè saperli metterli da parte. Detto più umilmente, bisogna semplicemente supporre che ne sia capace. Nel caso in esame, basta osservare che il tempo interviene in modo esplicito nella proprietà dell'esistere: un caso che, ripetiamo, normalmente non interessa l'ambito della Matematica.

Queste osservazioni renderebbero difficile da digerire la non costruttività della Logica classica. Nelle Logiche cosiddette *costruttiviste* (ad esempio in quella *intuizionistica* e in quella *lineare*) questo problema è risolto: in esse, infatti, da una dimostrazione di esistenza è sempre possibile estrarre un metodo effettivo per esemplificare l'oggetto. Ma noi resteremo nell'ambito tradizionale rappresentato dalla Logica classica.

Come esempio fondamentale di non rappresentabilità consideriamo il caso dei reali: si può sempre esibire un numero reale? Se per "esibire" intendiamo una denotazione esplicita finita di tutte le sue cifre, la risposta è ovviamente "no", essendo queste infinite. La scrittura $\sqrt{2}$, per esempio, denota in realtà un'*operazione* e non direttamente il numero che convenzionalmente rappresenta (del quale non esibisce dichiaratamente alcuna cifra); l'operazione ci consente però di calcolare ogni sua desiderata cifra. Nel senso specificato, possiamo solo esibire numeri razionali non periodici.

Ma *l'impossibilità di rappresentazione può sempre risolversi alleggerendo le convenzioni*. Nel nostro esempio, $\sqrt{2}$ è normalmente accettato a rappresentare un preciso, unico, reale. Ciò succede perché la *denotazione* è un fatto metamatematico (semantico) e per la Semantica non ci sarebbero limiti espressivi insormontabili una volta fissato il concetto da esprimere; a parte le menzionate eccezioni di natura paradossale che dovremo supporre di saper riconoscere.

Tuttavia, la rappresentabilità non implica in generale l'individuabilità. Pressoché in ogni Teoria classica, teoremi che dimostrano l'esistenza di enti rappresentabili senza specificare nessun metodo per individuarli, sono frequenti. Nulla, in principio, vieta che ciò sia impossibile, che sia oltre le capacità deduttive del Sistema assiomatico. Ad esempio, la Teoria potrebbe dedurre un enunciato del tipo "$\exists n(...)$", ma tutti gli enunciati: "$\exists n(...)\rightarrow(n=1)$", "$\exists n(...)\rightarrow(n=2)$", etc., risultare *indecidibili*. Non c'è nulla di paradossale, di a priori sbagliato, in ciò.

Un'altra volta, dunque, il "difetto" si rivela esser solo una presunzione ingiustificata nei riguardi dei Sistemi classici.

Possiamo ora riportare un esempio non banale di un Sistema con un numero finito di assiomi ma *indistinguibili*, come anticipato nel paragrafo I.5. Basta supporre l'esistenza di un certo Sistema matematico S in cui si può dimostrare che esiste un numero naturale n dotato di alcune proprietà, ma dove, effettivamente, tale numero non è individuabile. Definiamo, allora, un nuovo Sistema S' i cui assiomi sono tutti gli enunciati di S con meno di n caratteri; tale Sistema ha finiti assiomi ma *indistinguibili*, poiché non si può individuare il valore di n. Ricordando quanto concluso nel paragrafo I.9, si può dunque affermare che, se S' è classico, allora è *non ben definito*.

Con un criterio simile, si può portare un esempio non banale di una regola deduttiva che fa sì che l'insieme delle dimostrazioni non sia *distinguibile* e, conseguentemente, il Sistema ancora *non ben definito*. Consideriamo, infatti, la Teoria matematica S" che fa riferimento alla non individuabilità di n nel sistema S, mediante la seguente regola deduttiva: "ogni enunciato con un numero n di caratteri è un teorema". Ora, se t è un arbitrario teorema generato da tale regola (e di teoremi ne esistono certamente perché n esiste), nessun ragionamento che prima non individui n può concludere che è un teorema. Poiché n non è individuabile, neppure nessuna dimostrazione di *t* è individuabile. Un tale S'', pertanto, *non è ben definito*.

Il fatto che i due Sistemi S' ed S'' siano stati costruiti a partire da S non ha in sè niente di scorretto, ovviamente; anzi, è un caso abbastanza frequente in Matematica. E, per le conclusioni ora fatte, non importa neanche se, eventualmente, uno dei due, o entrambi, siano incoerenti.

I.13. Verità "indimostrabili"

Una proprietà spesso indicata a rappresentare lo sconvolgimento causato dai teoremi limitativi della Matematica, è che "in alcune Teorie matematiche esistono enunciati veri ma indimostrabili". In realtà ciò non è corretto e, una volta corretto, neppure tanto inquietante. In primo luogo, tale affermazione deve essere precisata. Consideriamo un Sistema classico formale. Abbiamo chiarito che il concetto di verità si riferisce sempre e soltanto alle *interpretazioni* degli enunciati, poichè questi sono privi di significato esplicito e quindi anche di verità in sé. Riformuliamo quindi l'asserzione come "esistono enunciati che, pur non essendo teoremi, interpretati secondo un modello corretto della Teoria risultano veri". Con ciò si placa il turbamento: se il Sistema ammette un modello corretto, questa "strana" proprietà è sempre soddisfatta se il Sistema stesso è incompleto, cioè se esiste un enunciato indecidibile; infatti, o esso, o (esclusivamente) il suo negato, sarà vero in tale modello, per i principi del terzo escluso e di non contraddizione. Può anche accadere che la forma dell'enunciato vero ma indimostrabile sia del tipo "$\forall$ x <u>P</u>(x)", dove <u>P</u>(x) è un certo predicato; in questo caso, nel modello corretto in cui tale enunciato è vero, si ha che anche <u>P</u>(c) è vero per ogni costante c [dal citato assioma classico "$\forall$ xA(x)→A(c)"], ma la proposizione "$\forall$ x<u>P</u>(x)" non si può dimostrare. Un esempio è l'enunciato di G "qualunque retta passante per un punto P esterno a un'arbitraria retta *r* non è parallela ad *r*": vero per la Geometria ellittica, è indecidibile in G (nell'ipotesi, ricordiamo, in cui il modello euclideo sia corretto per GE), visto che implica la negazione di VP.

D'altra parte, vedremo che se l'enunciato è vero *in ogni modello corretto*, sarà di norma necessariamente un teorema della Teoria (questa proprietà si chiama *completezza semantica*). Le eccezioni, come osserveremo, devono riguardare Sistemi che non rispettano la *formalità*, cioè in cui le proposizioni possiedono un ineliminabile valore semantico.

Ma per concludere tutto ciò gli inquietanti teoremi limitativi (ci riferiamo a quelli *di incompletezza*) non occorrono: vedremo infatti, nella terza Parte, che essi affermano qualcosa di ben diverso.

PARTE SECONDA
Completezza semantica e Teoria degli insiemi

II.1. Teoria aritmetica di Peano

A parere di molti, i numeri naturali e le operazioni di somma e prodotto in essi definiti sono un concetto metamatematico preciso e inequivocabile. Una buona parte di essi, inoltre, ritiene che tale concetto è irrinunciabile in ogni definizione della Matematica, come nella stessa introduzione dei Sistemi assiomatici. Ad esempio, quando in una regola deduttiva si afferma "sostituire ad x *una* arbitraria sequenza ordinata di 0 e 1" non usiamo forse il concetto di "numero uno"? Una volta ammesso l'uno, è poi quasi immediato ammettere tutti gli altri naturali, compreso lo zero. Ma probabilmente il concetto di unità e di numero naturale è ancora più basilare di quanto faccia ritenere il precedente esempio: un'affermazione qualsiasi nasce come una sequenza ordinata di termini unitari. Cioè, nello stesso significato di *termine* (il *quark*, per così dire, del discorso) si sottintende, crediamo, l'unità. Anche la *somma* sembra un concetto del tutto spontaneo e privo di ambiguità; e il *prodotto* può definirsi come una somma iterata n-volte, dove n è un numero naturale. Non troviamo argomenti, quindi, per smentire tale convinzione: tutt'altro.

Ma se l'"intuitività" dei numeri naturali dovesse implicare la soluzione istantanea di problemi che hanno tormentato diversi insigni matematici, tale ottimismo diventerebbe sospetto. Esaminiamo cosa accade in concreto per un Sistema che definisce i numeri naturali, ovvero *aritmetico*.

Ci sono due versioni, logicamente differenti, di Teoria aritmetica. La prima, che chiameremo *integrale*, precede storicamente la seconda; ma, come si è scoperto in seguito, è logicamente più complessa di quest'ultima. Per tale ragione, è più opportuno cominciare ad introdurre la seconda, chiamata usualmente *di Peano* (in verità impropriamente, in quanto l'originale introdotta da Peano è *integrale*).

Si definisce *Teoria aritmetica di Peano* (sinteticamente PA) il Sistema classico formale ottenuto aggiungendo al Calcolo predicativo classico formale del primo ordine con uguaglianza i simboli "0, +, ·", il predicato a due variabili $\underline{S}(x,y)$ (soddisfacente gli assiomi classici) e gli assiomi propri:

[1] $\exists x(x=0)$
[2] $\forall x(\exists y(\underline{S}(x,y)))$
[3] $\forall x(\underline{S}(x,y) \rightarrow y \neq 0)$
[4] $\forall x \forall y((\underline{S}(x,z) \textit{ e } \underline{S}(y,z)) \rightarrow x=y)$
[5] $\forall x\, (x+0=x)$
[6] $\forall x \forall y((\underline{S}(y,z) \textit{ e } \underline{S}(x+y,t)) \rightarrow x+z=t)$
[7] $\forall x(x \cdot 0=0)$
[8] $\forall x \forall y(\underline{S}(y,z) \rightarrow x \cdot z = x \cdot y + x)$

nonché la regola deduttiva *propria*: "*nell'espressione seguente:* $(A(0) \textit{ e } \forall x((A(x) \textit{ e } \underline{S}(x,y)) \rightarrow A(y))) \rightarrow \forall x A(x)$, *sostituendo ad* A(x) *una qualsiasi proposizione con almeno una variabile libera* x, *si ottiene un teorema*[1]".

Bisognerebbe anche specificare delle nuove regole grammaticali per stabilire l'uso corretto dei nuovi simboli "0, +, ·", ma tralasceremo di farlo.

L'unica precisazione tecnica è che il simbolo "$\neq$" è un'abbreviazione di "*non*=".

Dagli assiomi deriva che, per ogni x, il valore di y in $\underline{S}(x,y)$ è unico (lo dimostreremo più comodamente nel paragrafo II.10); da ciò e dalle sue caratteristiche deriva che $\underline{S}(x,y)$ è interpretabile, nel linguaggio ordinario, come "y è il successore di x". Posto "z=1" come abbreviazione di "$\underline{S}(0,z)$", dall'assioma [6], per 0 al posto di y, si ottiene: $\forall x\, ((z=1 \textit{ e } \underline{S}(x,t)) \rightarrow x+1=t)$, avendo usato l'assioma [5] e la regola di sostituzione valida per il predicato "="; quest'espressione

[1] Normalmente, le deduzioni induttive sono, anch'esse, considerate *assiomi*; più avanti chiariremo perché. Per ora, ignoriamo questa possibilità.

consente di scrivere il successore di x come x+1, per ogni x. Analogamente, si può chiamare "2" il successore di "1", etc. L'assioma [2] afferma che ogni numero ha successore; il [3], che ogni successore è diverso da "0"; il [4], che se due numeri hanno lo stesso successore, allora sono uguali; [5] e [6] definiscono la somma. A parole, [6] stabilisce che il successore di x+y è somma di x col successore di y; [7] e [8] definiscono il prodotto. La regola deduttiva propria è chiamata *principio di induzione*: sia A(x) una qualsiasi proposizione con almeno una variabile libera x. Da A(0) e dall'implicazione $A(x)\rightarrow A(x+1)$, valida per ogni x, segue A(x) per ogni x. A parole: se una proposizione è vera per "0" e se, supposto che sia vera per un arbitrario x è anche vera per x+1, allora sarà vera per tutti i naturali. Si noti che il principio di induzione non può essere formalizzato come una proposizione di PA, in quanto "proposizione con almeno una variabile libera" non viene definito formalmente come un predicato nello stesso Sistema. L'espressione in esso contenuta diventa un enunciato solo quando ad A(x) si sostituisce una proposizione di PA con almeno una variabile libera. Tale enunciato sarà sempre del primo ordine. Questo fatto, assieme a quello che tutti gli assiomi sono espressi al primo ordine, implica che PA è del primo ordine.

Domandiamoci adesso se "i naturali intuitivi" sono un modello corretto di tale Teoria assiomatica. La risposta affermativa non richiede una dose eccessiva di ottimismo. Chi ammette di comprendere cosa sono "i naturali intuitivi" non ha molti argomenti per non ammettere anche che essi soddisfano le *premesse* di PA e la correttezza delle sue cinque (in totale) regole deduttive. Indubbiamente, sembra eccessivo questionare *veramente* l'idea dei "naturali intuitivi": chi lo facesse dovrebbe affermare qualcosa come "non ho mai capito cosa alcuni intendono per *naturali*" (e a scuola avrà fatto disperare il maestro!). Si potrebbe pensare che *i naturali* possono comunque definirsi come *il* modello corretto, *se esiste*, di PA. Ma il fatto è che si può dimostrare, come vedremo più avanti, che se PA è coerente, ammette un numero infinito di modelli corretti, ciascuno *completamente diverso* dall'altro, in un senso molto forte che preciseremo; vogliamo dire, in concreto, che ci sono anche modelli corretti di PA *molto* diversi da quello "dei naturali intuitivi". Allora, neanche una strategia di questo tipo funzionerebbe logicamente.

Ma, alla fine, cos'avrebbe di così pericoloso e sospetto la meta-conclusione "i naturali intuitivi sono un modello corretto di PA" ?

Discutiamo intanto una prima non infrequente obiezione che, in verità, è soltanto una critica infondata. L'attacco è del tipo: "se l'Aritmetica è *chiara alla mente*, perché non è *chiaro alla mente* come si risolve la congettura di Fermat o quella di Goldbach?[2]". Si tratta evidentemente di un equivoco. È manifesto che una successione lunga e articolata di argomenti spontanei e lampanti può dar luogo a una proprietà, anche assai semplice da enunciare, ma non altrettanto da risolvere. Riportiamo un esempio famoso dal *Menone* di Platone: Socrate chiama uno schiavo che, sulle prime, mostra (com'è affatto comprensibile), di ignorare il teorema di Pitagora. Poi, in base ad una serie di ragionamenti elementari, di immediata verità, glielo fa concludere, dimostrando così a Menone la primitività del sapere. Si può affermare senza dubbio che, se un Sistema assiomatico ammette un modello intuitivo, ogni teorema del Sistema, se sviluppato *completamente* (cioè includendo tutti gli eventuali teoremi in cui si appoggia), si compone di ragionamenti che posseggono lo stesso grado di intuitività nella stessa interpretazione; infatti, tale sviluppo significa ricondursi direttamente agli assiomi e regole del Sistema, che sono stati intuitivamente verificati per il modello. Ma è ovvio che ciò non significa affatto che l'interpretazione di ogni teorema nello stesso modello sia *immediatamente* verificabile in modo intuitivo: è normalissimo che lo schiavo sia, all'inizio, totalmente incerto circa la verità del teorema. Si sottovaluta la difficoltà di trovare il giusto percorso, come nel caso di un labirinto, dove l'operazione di uscire, facilmente enunciabile, si compone allo stesso modo di una serie di strategie ovvie e banali. D'altro canto, ammettere tale critica implicherebbe la superfluità di adoperare un Sistema assiomatico (cioè di fare Matematica) tutte le volte che se ne è trovato un intuitivo modello corretto! Viceversa, l'assiomatizzazione, con i suoi

[2] Si tratta di problemi che hanno fatto penare tanti matematici. La prima è stata recentemente risolta, come si è già detto. La seconda afferma candidamente: "tutti i numeri pari maggiori di 2 sono somma di due numeri primi" ed è ancora irrisolta.

teoremi, ci aiuta a scoprire i percorsi tortuosi delle verità del modello, solo alla base intuitive; senza contare l'eventualità di riconoscere altri modelli corretti del Sistema, alcuni dei quali potrebbero risultare ancora più intuitivi del primo.

La vera obiezione è un'altra; dall'esistenza di un modello corretto discende la coerenza del Sistema. Risolveremmo allora sempre così, mediante un "modello corretto intuitivo", lo spinoso problema della coerenza dei Sistemi assiomatici? L'idea che non convince, cioè, è che l'esibizione di un modello corretto sia un metodo *generale* per dimostrare la coerenza dei Sistemi assiomatici classici[3]. Ad esempio, seguendo l'esempio "fiducioso" dei naturali, lo spontaneo concetto di spazio dovrebbe essere sufficiente a convincerci che l'interpretazione euclidea è un modello corretto del Sistema assiomatico GE. Il suo carattere intuitivo è indubbio, basti pensare agli sforzi fatti per tentare di dimostrare il VP. Ciò risolverebbe immediatamente il problema della coerenza di GE, delle Geometrie non euclidee e della stessa Teoria dei numeri reali (infatti, ogni contraddizione in quest'ultima si ripercuoterebbe sullo Spazio cartesiano, che è equivalente al modello euclideo). Di questo passo, la coerenza in Matematica sarebbe stabilita da una serie di intuizioni spaziali e quantitative, una per ciascuna Disciplina. Non è presuntuoso credere che *tutte* queste intuizioni siano metamatematicamente congruenti? Che Hilbert e Gödel, tra gli altri, si siano inutilmente preoccupati della coerenza dei fondamentali Sistemi assiomatici?

Poi, non mancano elementi concreti capaci di alimentare il dubbio: ad esempio, la stessa nozione di *interpretazione*, e quindi di *modello*, è basata, come riconosceremo presto, sul concetto semantico, intuitivo, di *insieme*; ebbene, vedremo, con il *paradosso di Russell*, che tale concetto non è affatto privo di ambiguità. Allora, non è garantito che ogni "modello spontaneo" sia sempre esente da incertezze.

---

[3] Tra gli ultimi, autorevoli, matematici a difendere quest'opinione, spicca la figura di G. Frege, autore di un carteggio molto istruttivo, non solo su quest'argomento, con Hilbert. Una pregevole sintesi in: G. Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino (2004), p. 70 e seguenti.

Queste considerazioni impongono di mettere in discussione, sia pure per sole ragioni di principio, i "modelli intuitivi". Al tempo stesso ribadiscono l'esigenza di un metodo alternativo per concludere la coerenza dei Sistemi assiomatici fondamentali come PA. Tale metodo alternativo non può che essere una *dimostrazione*, un teorema di un opportuno Sistema assiomatico. Come vedremo più avanti, tale Sistema non può mai coincidere con lo stesso Sistema oggetto dell'analisi, cioè del quale vogliamo dimostrare la coerenza (e ciò, in realtà, è assolutamente intuitivo). Allora sarà un altro; ma chi dimostrerà la coerenza di quest'ultimo? È fin d'ora perfettamente chiaro che non potremo eccedere nelle pretese...

D'altra parte, il metodo matematico alternativo potrebbe anche *costruire* in concreto dei modelli; il che sarebbe assai desiderabile qualora esistessero Sistemi assiomatici in cui non si distinguono facilmente modelli intuitivi (e non si vedono ragioni per escludere tale possibilità).

Ritornando a PA, dobbiamo quindi dubitare della sua coerenza, fino a prova contraria. Ci si chiederebbe, allora, quali delle sue premesse potrebbero essere viziate. Come si può già intuire, dubitare delle *premesse* del Calcolo logico classico si rivela troppo deleterio; lo approfondiremo più oltre. Esaminando le *premesse proprie* di PA, si nota che l'unico oggetto realmente questionabile, cioè che potrebbe originare contraddizioni, è il principio di induzione: tutto il resto è una serie di posizioni indipendenti, definitorie dei simboli propri di PA. In effetti, anche se tale principio sembra metamatematicamente del tutto legittimo, non si può escludere che esso sia incompatibile con le altre premesse del Sistema.

II.2. Metateorema di correttezza. O no?

Il metateorema di correttezza afferma che *ogni modello di un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine è corretto*[4]. In molti testi la sua metadimostrazione è considerata "molto ovvia"; tuttavia ben pochi la presentano. Di questi pochi, la

[4] Vedremo più avanti che la sua validità è generalizzabile.

maggioranza ne dà una versione che si proclama "accennata", anche se non si scorgono differenze sostanziali con le esposizioni ritenute complete. La presentiamo a continuazione.

Si deve metadimostrare che le quattro regole deduttive del Calcolo predicativo del primo ordine "conservano" la verità in ogni modello. Consideriamo, ad esempio, il *modus ponens*; la prima volta, esso opererà sugli assiomi, che supponiamo veri in un arbitrario modello. Supposto, quindi, che tra gli assiomi ci siano due enunciati del tipo "A" e "A→B", il *modus ponens* dedurrà "B". *Ora, poiché "A" è vero e "A→B" pure vero, si ha "ovviamente" che anche "B" è vero*. Per induzione si ottiene poi, abbastanza facilmente, che ogni altra deduzione del *modus ponens* è corretta. Un ragionamento simile si può fare per le altre regole deduttive.

L'induzione usata, di tipo metamatematico, è del tutto analoga a quella, sintattica, che opera in PA: prima si conclude, nel modo visto, che la correttezza c'è al "primo livello" di deduzione, cioè a quello che opera sugli assiomi; eppoi si deduce che se c'è correttezza ad un certo livello i, dev'esserci pure al livello $i+1$ (per farlo, si ragiona in modo pressoché identico al caso del primo livello di deduzione). Allora, la correttezza deve essere verificata ad ogni livello di deduzione. Abbiamo già osservato che tale principio sembra del tutto ammissibile da un punto di vista semantico. Nel paragrafo precedente, infatti, è stata solo questionata la sua compatibilità a priori con le altre premesse di PA: in caso di contraddizione, si potrebbe, al limite, decidere di sopprimere un assioma piuttosto che l'uso dell'induzione.

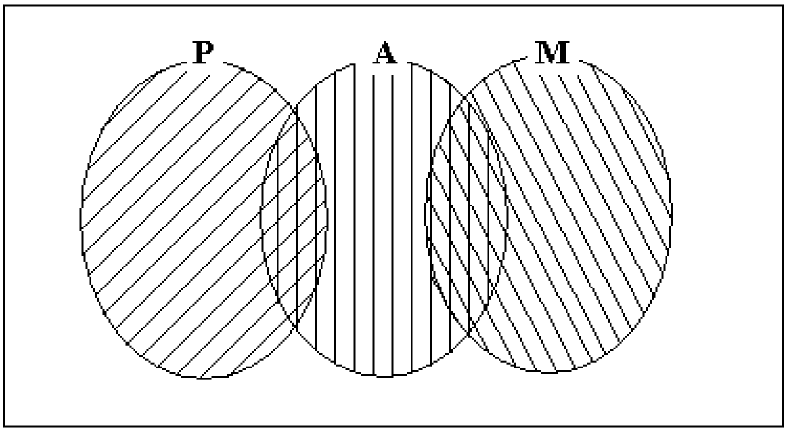
Esaminiamo invece la deduzione "ovvia" che abbiamo evidenziato in corsivo; chi potrebbe disapprovarla se si assume per "→" il significato di "implica"? Nessuno, crediamo. Ma ciò che vogliamo discutere è, appunto, la *necessità* che tale simbolo debba inevitabilmente interpretarsi con un concetto analogo a "implica"; o, in generale, con un concetto tale che se "A" è vero e "A→B" vero, allora anche "B" è vero. Ricordiamoci che "→" è un simbolo senza significato, definito implicitamente da alcuni assiomi; cosa potrebbe convincerci che in ogni interpretazione in cui tali assiomi sono veri, il simbolo "→" *deve* assumere un significato equivalente a "implica"?

Naturalmente, la critica può, equivalentemente, vedersi riflessa su "(*non*A)*o*B", di cui "A→B" è un'abbreviazione (cioè: cosa metadimostra che "*non*" e "*o*" *debbano* interpretarsi come i semantici "non" e "o"?). Ci sembra che la suddetta metadimostrazione dia troppo per scontato.

Ritorniamo al nostro primo esempio di Sistema assiomatico (par. I.1) e interpretiamo "A" come "Antonio", un nostro amico innamorato di "B", cioè "Bianca". Ma essa ama Carlo, "C", e Carlo ama Daniela, "D". Se interpretiamo "→" come "ama", si ottiene dunque un modello (d'infelicità!). Tuttavia, la regola deduttiva non è legittima, come si rileva immediatamente; essa non conserva la verità: ecco, dunque, un modello *scorretto*. Ebbene, che cosa esclude che una situazione simile non possa verificarsi anche nel Calcolo predicativo classico del primo ordine? Le possibilità della Semantica non sono "semplicemente" infinite: si tratta di un infinito che, come vedremo più avanti, supera qualsiasi tipo di infinito definibile in linguaggio matematico. Il metateorema di correttezza pretende che gli assiomi del Calcolo predicativo classico del primo ordine abbiano tradotto *interamente* in sintassi il significato semantico di "e", "non", "∀", etc.; cioè, che i corrispondenti simboli sintattici non siano interpretabili diversamente. Ma che cosa garantisce che sia così?

Qualche metadimostrazione fa uso delle tabelle di verità. Certo, se rappresentiamo "A→B" mediante la tabella del paragrafo I.8, si vede bene che per "A" vero e "A→B" vero, "B" è pure vero. Ma connettivi e quantificatori logici non si definiscono mediante tabelle di verità. La loro definizione formale, come sappiamo, avviene solo mediante gli assiomi che devono essere soddisfatti; mentre le tabelle di verità si costruiscono ammettendo di interpretare sempre "*o*" con "o", "*non*" con "non", e così via. Per esempio, quella che abbiamo costruito allo scopo di definire convenientemente "A→B" è, appunto, *soltanto un criterio per suggerirci* come definire "→" in modo da simulare certamente (ma non è detto che unicamente) un basilare concetto semantico che vogliamo riprodurre in linguaggio sintattico. Formalmente, "A→B" si definisce mediante "*non*" e "*o*", e questi ultimi mediante il soddisfacimento di opportuni assiomi.

Analogamente, non ci sembra che si possano realmente metadimostrare come "veri in ogni interpretazione" i tradizionali enunciati della Logica classica (*Barbara*, *Celarent*, *Darii*, etc.). Piuttosto, *assumerli* come tali. Esaminiamo ad esempio *Festino*: "*Se nessun pesce è mammifero e qualche animale marino è mammifero, allora qualche animale marino non è un pesce*". Quello che normalmente si fa per concludere che si tratta di un sillogismo universalmente valido, è osservare che la conclusione non dipende dal significato degli oggetti menzionati. Se sostituiamo il simbolo senza significato "P" a "pesce", "M" a "mammifero" e "A" ad "animale marino", si ottiene: "*Se nessun P è M e qualche A è M, allora qualche A non è P*". Possiamo infatti rappresentare la situazione col seguente schema:



dove, per generalità, abbiamo considerato un'intersezione[5] non nulla tra gli insiemi A e P (questa potrebbe non esserci; invece quella tra A e M *dev*'esserci se la premessa *qualche A è M* è vera; allo stesso modo, quella tra P ed M *non deve* esserci, se la premessa *nessun P è M* è vera). La conclusione segue dal fatto che i punti di intersezione tra M e A, che esistono sempre, non possono appartenere a P. Si dice allora: "se le premesse sono vere, è anche vera la conclusione, in qualunque interpretazione per P, M ed A". Ciò è fuori discussione;

[5] Riteniamo superfluo definire i concetti elementari dell'insiemistica informale (anche chiamata "ingenua"), talmente essi sono intuitivi e spontanei.

ma, innegabilmente, lo è fintantoché "*nessuno*" significa "nessuno", "*qualche*", "qualche" e cosí via. Tuttavia, nella struttura assiomatica del Calcolo predicativo classico del primo ordine, come per qualsiasi altro Sistema assiomatico formale, non esistono simboli con un significato prestabilito: ci sono soltanto degli assiomi, cioè sequenze di simboli senza significato, che, quando soddisfatti, definiscono implicitamente il significato di tutti i simboli a cui può darsi significato. Ciò vale, allora, sia per "A", "B", "X" etc., che per "*o*", "*non*", "$\forall$", etc. Non c'è alcuna differenza formale tra essi, né, a priori, diversa caratteristica logica. Un *modello* è una qualsiasi interpretazione semantica dei simboli in cui gli assiomi sono veri; solo esso darà un *significato proprio* ed ogni eventuale "caratteristica logica" a ciascuno di tali simboli.

In definitiva, non vediamo perché debba senz'altro escludersi la possibilità di modelli con un significato diverso per i connettivi e quantificatori classici; e che, quindi, potrebbero risultare *scorretti*. Costruire un esempio concreto, non dovrebbe essere molto difficile; tuttavia, l'argomento non riveste molta importanza in sé e ciò non incoraggia la sua ricerca. Dalla nostra critica non deriva, infatti, nessuna profonda rivoluzione nei fondamenti della Matematica: per la semplice ragione che i modelli scorretti del Calcolo predicativo classico formale del primo ordine non interessano. Più in generale, non siamo interessati a studiare modelli in cui "$\forall$" non significhi "qualunque sia" e così via per gli altri connettivi logici! La discussa divergenza dalla posizione tradizionale, segnala piuttosto un'esigenza: quella di assiomatizzare parte dei concetti metamatematici usati (crediamo) ambiguamente nelle metadimostrazioni vagliate; e ciò, perfettamente in linea con le considerazioni fatte nel paragrafo I.3. In breve, l'opportunità di ricondurre tale metateorema a teorema.

A conferma che dietro il "metateorema di correttezza" non ci sia, in realtà, che l'esigenza di una opportuna *convenzione*, scopriremo che, in effetti, tale formalizzazione introduce delle esplicite condizioni che stabiliscono espressamente di limitarsi a quelle interpretazioni che rispecchiano il tradizionale significato dei simboli logici, risultandone modelli necessariamente corretti.

II.3. Metateorema di completezza semantica

Nel 1930 Gödel metadimostró che *se un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine è coerente, allora ammette almeno un modello*[6]. Tale metateorema, chiamato *di completezza semantica* per ragioni che oltre vedremo, ha importantissime conseguenze. Per ora ci interessa soltanto esaminarlo con la stessa ottica, critica, del paragrafo precedente. Le metadimostrazioni attualmente disponibili, pur notevolmente più semplici dell'originale, restano di notevole complessità; per cui non le affronteremo, ma ne tracceremo le caratteristiche essenziali.

Allo scopo di concludere la tesi del metateorema, il primo passo è quello di convenire una definizione meno informale di *modello* e quindi di *interpretazione*. In concreto, si assume che un'*interpretazione classica* sia determinata da un *insieme*, detto *universo*, tale che, facendo variare in esso le variabili del Sistema, si ottengono proposizioni passibili del valore di verità *vero/falso*, cioè enunciati, che soddisfano i principi del terzo escluso e di non-contraddizione. Per essere più precisi, un'*interpretazione classica* è definita dal soddisfacimento delle seguenti condizioni:

a) Esiste un *insieme*, detto universo U, tale che ogni costante del Sistema (cioè ogni simbolo cui le regole del Sistema non stabiliscono la possibilità di sostituzione) sia un elemento di U.

b) Per ogni proposizione $E(x_1, x_2, ... x_n)$ (dove ovviamente le variabili sono dovute a predicati contenuti in E), esiste una funzione che, qualunque sia la n-upla $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ... \underline{x}_n$ di costanti di U, associa all'enunciato $E(\underline{x}_1, \underline{x}_2, ... \underline{x}_n)$ un valore "V" o esclusivamente "F" (che semanticamente coincideranno con *vero* e *falso*). In breve, a ogni *enunciato* del Sistema deve associarsi un valore esclusivo di verità: *vero* o *falso*.

[6] Anche tale metateorema sarà in seguito opportunamente generalizzato.

c) Agli enunciati E($\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... $\underline{x}_n$) e *non*E($\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... $\underline{x}_n$) devono corrispondere valori diversi ("V" e "F" oppure "F" e "V"), qualunque sia la n-upla $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ... $\underline{x}_n$ e la proposizione E(x_1, x_2, ... x_n). In breve, se a un *enunciato* del Sistema si associa il valore *vero*, al negato deve associarsi *falso* e viceversa.

Queste posizioni svincolano il concetto di *interpretazione* da forme vaghe e discutibili dell'intuizione e condizionano la tesi del metateorema all'individuazione di un *insieme*; un concetto certo più elementare, ma ancora semantico. Un *modello*, come sappiamo, è un'interpretazione in cui tutti gli assiomi sono veri, cioè hanno il valore "V". Si noti che "V" e "F" sono, in principio, due valori diversi qualsiasi: la suddetta definizione elimina ogni esplicito riferimento alla nozione semantica di verità, generalizzando drasticamente il concetto di interpretazione. Va bene, dunque, qualunque insieme con le descritte caratteristiche, anche se, dal punto di vista semantico, "V"="banana" e "F"="autostrada"[7]. Pertanto, come c'era da aspettarsi, il primo passo verso la formalizzazione del concetto di *modello* (che si concluderà con una sua completa codifica nel linguaggio della Teoria assiomatica degli insiemi), implica una rinuncia a tentare di tradurre l'integrale, intuitivo, valore semantico racchiuso nel concetto di verità[8].

Le diverse metadimostrazioni del metateorema di completezza semantica fanno tappa su non pochi sotto-metateoremi e lemmi, usando l'induzione ed altri principi elementari. E, finalmente, concludono l'esistenza di un modello, nell'ipotesi di coerenza, senza costruirlo effettivamente: si tratta, dunque, sempre di metadimostrazioni *non costruttive*.

Malgrado la complessità e la lunghezza di tali metadimostrazioni, l'unico appunto che ci sembra opportuno fare, cercando di giustificare l'esigenza di un criterio più rigoroso per dedurre la tesi del metateorema, riguarda proprio l'uso del concetto

---

[7] Che poi un simile concetto "di verità" abbia scarso interesse metamatematico è un discorso diverso.

[8] Conseguentemente, l'assunzione della suddetta definizione dovrebbe facilitare la considerazione di un modello che violi l'enunciato del metateorema di correttezza, cioè scorretto.

informale di *insieme*; e ciò per la sua intrinseca ambiguità, come rileveremo immediatamente[9].

II.4. Paradosso di Russell

Abbiamo già usato diverse volte il concetto di insieme, per la sua primitività; ma sempre in modo intuitivo, informale. Tuttavia, le precedenti metadimostrazioni e molte delle metadimostrazioni della Teoria informale (o ingenua) degli insiemi, ne fanno un uso profondo, con risultati non certo vicini all'intuizione. In effetti, tale Teoria, introdotta nel 1874 da Cantor, produsse dei risultati di enorme interesse, ma al di fuori della rigorosa veste assiomatica proposta da Hilbert; più avanti li riassumeremo. Per questo, ma non soltanto, fu duramente e ingiustamente attaccata da molti; ma non certo dallo stesso Hilbert, che la considerava "un Paradiso da cui nessuno potrà mai cacciarci". In ogni caso, c'era l'esigenza di dar maggior rigore e dissipare tutti i dubbi in parecchi ragionamenti che, facendo un uso profondo di concetti insiemistici che restavano informali, giungevano a risultati ritenuti da molti, all'epoca, piuttosto inquietanti o destabilizzanti per la Matematica. D'altro canto, tale prudenza era ben giustificata: prima ancora dei risultati di Cantor, Russell aveva scoperto un paradosso sul concetto di insieme.

Un insieme può avere altri insiemi come elementi. Consideriamo un insieme I che ha per elementi tutti gli insiemi che godono di una certa proprietà *p*. Sembra ammissibile chiedersi se lo stesso I goda della proprietà *p*, nel qual caso I avrebbe I stesso come elemento. Consideriamo, ad esempio, l'insieme I di tutti gli insiemi con almeno tre elementi. È certo che di tali insiemi ce ne sono parecchi: certamente almeno tre. Pertanto I contiene sé stesso. La stessa cosa succede per l'insieme di tutti gli insiemi con un numero

[9] La metadimostrazione di completezza semantica viene a volte criticata anche per il suo *non finitismo*: cioè perché usa esplicitamente collezioni di *infiniti* elementi. Tuttavia, i concetti di *finito* ed *infinito* sembrano così fondamentali da poter essere usati senza equivoco, in metamatematica. Ciò non è in conflitto col fatto che, invece, ci siano dei seri problemi nel cercare di riprodurli in linguaggio puramente matematico, come oltre si vedrà. Le due prospettive sono assolutamente differenti.

infinito di elementi: anche di tali insiemi ne esistono infiniti; dunque, per definizione, tale insieme contiene sé stesso.

Una sardina è un insieme? Dipende da come ci mettiamo d'accordo. Se conveniamo che no, allora l'insieme, I, di tutti gli insiemi che non contengono sardine, non può contenere sardine; pertanto contiene sé stesso come elemento. Se invece riguardiamo una sardina come un insieme, sarà un insieme di organi e non conterrà sardine. Quindi I conterrà sardine e allora non sé stesso. In ogni caso visto, la domanda se un certo insieme I contiene sé stesso sembra avere significato, né si vedono per ora ragioni per cui non debba averlo.

Ma se ha sempre significato, allora ha pure significato considerare l'insieme P di tutti gli insiemi che non contengono sé stesso. Chiediamoci se P contiene P. Se lo contiene, allora P è un insieme che non contiene sé stesso; assurdo. Allora P non contiene sé stesso; ma allora, per definizione di P deve appartenere a P; ancora assurdo.

È certo che tale paradosso non segnala la *necessità* di dover prendere qualche tipo di provvedimento logico, dato che non conclude che tale concetto è *sempre* paradossale: così sarebbe se il linguaggio metamatematico fosse matematico (classico), ma per fortuna è semantico; avverte soltanto che, per un insieme, la proprietà di appartenere o non appartenere a sé stesso può condurre a un paradosso. Basterebbe quindi evitare tale nozione e dimenticarsi dell'accaduto. Ma chi ha un minimo di esperienza in Matematica sa bene che un'affermazione matematica o metamatematica, ha infinite forme equivalenti, cosicché "evitare la nozione di autoappartenenza o non autoappartenenza" si rivela in generale un compito nient'affatto banale. Per esempio, si pensi a un insieme il cui generico elemento resti imprecisato in buona parte della Teoria; ogniqualvolta si faccia un'imposizione o una supposizione su tale elemento, bisognerebbe ricordarsi di considerare (ed escludere) il caso in cui esso può coincidere con l'insieme di partenza. Per fare un'analogia con l'usuale linguaggio matematico (in teoria privo di ambiguità), si pensi a quanto sono numerosi, sottili e distribuiti in ogni tipo di equazione, gli errori dovuti a una divisione per zero; e ciò malgrado non ci sia niente di più semplice e chiaro, perché propriamente assiomatico, dello stabilire che non ha significato dividere per zero. Se ciò si verifica in un linguaggio matematico, possiamo immaginare cosa può succedere in un ambito non privo d'ambiguità come quello metamatematico. Tale incertezza è quindi in grado di contagiare in modo non facilmente prevedibile i metateoremi che fanno uso del concetto di insieme.

II.5. Teoria assiomatica degli insiemi

I precedenti quattro paragrafi hanno evidenziato problemi e disaccordi circa alcuni principi semantico-logici usati in alcune metadimostrazioni. Una via di uscita, come detto nel paragrafo I.3, è quella di assiomatizzare i concetti che hanno originato il dissenso o il nonsenso. In particolare, il concetto di *modello* e quindi di *insieme*. Tale assiomatizzazione dovrebbe ricondurre a *teoremi* tanto la *correttezza* come la *completezza semantica*, *dimostrare* la coerenza di PA e, possibilmente, fare lo stesso per altri Sistemi assiomatici fondamentali.

La Teoria assiomatica degli insiemi (nel seguito, TI) è un Sistema classico formale che assume gli assiomi e le regole del Calcolo predicativo classico formale del primo ordine con uguaglianza; a cui, come ogni altra Teoria, aggiunge delle *premesse proprie*. Esistono tre versioni di essa, tutte sostanzialmente equivalenti: NBG (da: von Neumann, Bernays, Gödel), ZF (da Zermelo e Fraenkel) e MK (da Morse e Kelley). La prima è strutturalmente la più semplice, perché ha soltanto 17 assiomi propri e nessuna nuova regola deduttiva. Nelle altre due, oltre ad assiomi propri, sono presenti "regole deduttive assiomatiche" o "schemi di assiomi"; cioè, regole che generano infiniti assiomi. Spiegheremo più tardi le ragioni che giustificano l'opportunità di questo tipo particolare di regole deduttive. Intanto, in ciò che segue, prenderemo a riferimento la Teoria logicamente più semplice, cioè NBG. Per i nostri scopi, non è necessario presentare tutti gli assiomi, né approfondire molte questioni tecniche; ci limiteremo ad alcune osservazioni di carattere generale. Cominciamo con una classificazione degli assiomi in base a un certo grado di *intuitività*, comprensiva sia di una spontanea interpretabilità, sia di una ragion d'essere (d'essere assioma), alla luce della pur vaga idea di "insieme" che possediamo:

1. Alcuni assiomi (*estensionalità*, esistenza *dell'insieme vuoto*, esistenza dell'*unione*, esistenza dell'*intersezione*) sono abbastanza intuitivi. Ad esempio, quello di *estensionalità* traduce il fatto che se due *insiemi* hanno gli stessi elementi sono uguali (il viceversa è un teorema). Lo riportiamo come esempio: $\forall x \forall y\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x=y\ )$. Si noti il nuovo simbolo $\in$, di appartenenza. Il simbolo $\notin$ sarà invece usato per semplificare la sequenza *non*$\in$.

2. Altri assiomi (della *coppia*, di *fondazione*, del *complementare*, della *permutazione*, di *scelta*, dell'*insieme delle parti*) sono moderatamente intuitivi. L'assioma di fondazione ha come conseguenza che un *insieme* non può appartenere a sé stesso: se x è un *insieme*, si ha sempre $x \notin x$. Allora, il paradosso di Russell non può sussistere perché la collezione di tutti gli *insiemi* che non appartengono a sé stesso (ovvero di tutti gli *insiemi*) non può essere un *insieme*: altrimenti, conterrebbe sé stesso e questo non è possibile per un *insieme*. L'assioma dell'*insieme delle parti* è: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$, dove $z \subseteq x$ (che si legge "z è un *sottoinsieme* di x") è un'abbreviazione di: $\forall t\ (t \in z \rightarrow t \in x)$ (cioè "ogni elemento di z è anche elemento di x"); quindi, letteralmente afferma: "per ogni *insieme*, esiste l'insieme di tutti e soli i suoi *sottoinsiemi*".

3. Altri assiomi (dell'*infinito*, di *rimpiazzamento*) non possono dirsi intuitivi. Quello dell'infinito, con una tecnica inaspettata, assicura l'esistenza di un *insieme* con infiniti elementi; quello di rimpiazzamento, di *insiemi* i cui elementi godono di proprietà di un certo tipo (nient'affatto spontaneo).

Al di là del fatto ovvio che tale classificazione è discutibile, si è voluto semplicemente sottolineare che non tutti gli assiomi della

Teoria sono intuitivi nel senso prima convenuto; ciò sembra davvero innegabile.

Evidenziamo ora alcune proprietà salienti del Sistema. Intanto, TI è *ben definito*, in quanto esso aggiunge solo assiomi *distinguibili* al Calcolo classico predicativo del primo ordine con uguaglianza[10]. Ogni elemento di un *insieme* è anche un *insieme*. Non esistono, cioè, "elementi allo stato puro": ogni ente della Teoria è un *insieme*.

L'assioma dell'*insieme vuoto* afferma: $\exists I \forall t\ (t \notin I)$, cioè semplicemente che esiste un insieme I che non contiene elementi, indicato normalmente con $\varnothing$; esso, tra l'altro, permette che una catena di affermazioni del tipo: "a è un insieme che contiene b che contiene c che contiene d..." non sia sempre infinita. L'insieme vuoto è sottoinsieme di un qualunque insieme, anche di sé stesso. Infatti, per definizione di $\varnothing$, se t è un insieme qualsiasi, $t \in \varnothing$ implica qualsiasi cosa, essendo falso. Allora è vero in particolare anche $\forall t\ (t \in \varnothing \rightarrow t \in x)$, cioè appunto $\varnothing \subseteq x$, per ogni insieme x.

L'assioma dell'*insieme delle parti* si limita a supporre l'esistenza, per ogni insieme I, dell'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi (usualmente indicato con P(I) e anche detto insieme *delle parti* di I). Peraltro, l'unico criterio che la Teoria fornisce per costruire tale insieme, resta quello basato sulla definizione di $z \subseteq x$.

L'assioma di *scelta* è abbastanza famoso e merita qualche riga di commento. Supponiamo che un insieme abbia come elementi degli insiemi non vuoti, anche di numero infinito. L'assioma di scelta afferma che esiste un insieme formato da un elemento e_1 del primo insieme, un elemento e_2 del secondo, e così via per tutti. Anch'esso è una semplice dichiarazione di esistenza e non dà nessun criterio per costruire l'insieme: infatti, non è escluso che qualcuno degli elementi e_i sia *non individuabile*. È famoso fondamentalmente per il fatto che, pur essendo spontaneo (tanto da passare inizialmente inosservato a parecchi, tra cui Russell), non possa dedursi come teorema: infatti, si è metadimostrato che è indecidibile. Alcuni *costruttivisti* (seguaci

[10] In verità, aggiunge anche delle regole grammaticali *proprie* per i nuovi simboli usati (che omettiamo). Tuttavia, come si può immaginare, tali regole sono sempre prive di ambiguità, cosicché il fatto che esse non alterino la *distinguibilità* degli enunciati è metamatematicamente indubitabile.

della Logica intuizionista, per esempio) hanno, con gioia, sollevato una critica che si può rendere con la seguente domanda ironica: "avete visto che, poi, siete stati costretti a supporre di poter caratterizzare alcuni esistenti (possibilmente non individuabili), assumendo per loro una certa nuova proprietà, qual é l'appartenenza ad un nuovo insieme?" Invero, questo assioma è una condizione che limita parzialmente il grado di non individuabilità, prima assoluto, di certi esistenti classici. Tuttavia, tali oggetti restano indeterminati per ogni altro aspetto oltre il fatto che debbono appartenere ad un insieme; e quindi possono continuare ad essere, in generale, assolutamente irraggiungibili, senza che ciò comporti alcuna contraddizione. Ovvero: accettiamo l'ironia ma continuiamo con immutata coerenza, fino a prova contraria.

Come detto, l'assioma di scelta è stato metadimostrato essere indecidibile in TI, grazie ai risultati di Gödel (1938) e di Cohen (1963) (i quali hanno anche concluso lo stesso per l'*ipotesi del continuo*, di cui parleremo). Ma perché tale assioma è necessario? Inizialmente, non pochi matematici erano convinti di poterne fare a meno; l'opinione è cambiata quando si è visto che molte sue conseguenze o equivalenze sono davvero intuitive ed opportune: anche noi ne vedremo qualcuna. Ci sono però anche degli effetti indesiderati che discuteremo più avanti.

Tutti gli assiomi di TI sono espressioni del *primo ordine*, in quanto i quantificatori agiscono sempre e solo su insiemi, cioè su elementi dell'universo. Nella Teoria TI non sono dunque consentite espressioni di ordine successivo al primo.

II.6. Insieme dei numeri naturali

Prima che la Teoria formale TI possa trattare i temi fondamentali discussi precedentemente, è necessario definire in essa alcuni strumenti matematici di base, nonché l'insieme dei numeri naturali. Lo faremo con l'intenzione di essere completi, pur sintetizzando il più possibile gli aspetti tecnici. Peraltro, il lettore che si limitasse a una fugace lettura di questi ultimi, dovrebbe essere perfettamente in grado di seguire l'argomento.

L'assioma della *coppia*:

$\forall x \forall y \exists z \forall w(w \in z \leftrightarrow (w=x$ *o* $w=y))$

afferma che se x ed y sono due qualsiasi insiemi, esiste l'insieme z costituito solo e soltanto da x e y. Introduciamo la notazione z={x,y} come abbreviazione di tale assioma; informalmente, essa si legge: "z è l'insieme che ha solo e soltanto x e y come elementi (detto insieme *coppia*)". Analogamente, z={x} è una abbreviazione del teorema $\forall x \exists z \forall w(w \in z \leftrightarrow w=x)$, che si deduce dall'assioma della coppia per x=y. Le scritture che usano parentesi graffe annidate rappresentano altre abbreviazioni del tutto spontanee. Per esempio, z={{x}} è un'abbreviazione di: "z={t} *e* t={x}" e cosí via. In tal modo, la scrittura z={{x},{x,y}} è l'abbreviazione di un teorema (piuttosto lungo scritto per intero) che stabilisce che, per ogni coppia di insiemi x e y, esiste l'insieme che ha per elementi l'insieme che contiene soltanto x e l'insieme che contiene soltanto x ed y. Tale insieme si chiama *coppia ordinata di x e y* e si indica brevemente con (x,y). È importante perché, a differenza dell'insieme coppia, distingue l'*ordine* tra x ed y: la *coppia ordinata di y e x*, cioè (y,x), è infatti un insieme diverso dal precedente: contiene {y} al posto di {x}. Dati due insiemi A e B, non vuoti, si definisce *prodotto cartesiano* di A per B (notazione A·B) l'insieme di tutte le coppie ordinate (x,y), con x e y arbitrari elementi, rispettivamente, di A e B. Tradotto in simboli di TI, tale definizione corrisponde a un teorema che afferma l'esistenza dell'insieme suddetto. Ogni insieme di coppie ordinate (x,y), con x e y arbitrari elementi, rispettivamente, di A e B (ovvero ogni sottoinsieme di A·B), si definisce relazione binaria tra A e B. Per l'assioma delle parti, esiste anche l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A·B, ovvero di tutte le relazioni binarie tra A e B. Ancora una volta, su un piano metamatematico, non si fa altro che chiamare in un certo modo un insieme, la cui esistenza è assicurata matematicamente, cioè da un teorema. Infine, si definisce *funzione* f di A in B, una relazione binaria tra A e B tale che, se (x,y) e (x',y') sono due arbitrarie coppie ordinate di f, si ha che: $x=x' \rightarrow y=y'$. In altri termini, in una funzione, il compagno di un elemento di A è un unico elemento di B (mentre un elemento di B può essere compagno di più elementi di A). Il teorema che afferma l'esistenza dell'insieme delle funzioni di A in B, per ogni A e B non vuoti, è una sequenza assai lunga di simboli di TI, come il lettore avrà intuito. Questo "difetto" è tipico di TI: enunciati anche abbastanza semplici possono avere enorme lunghezza e complessità; ciò scoraggia qualsiasi tentativo pratico di esplicitare ogni teorema di TI in linguaggio puramente simbolico. Ciò che è importante dal punto di vista logico è che si può fare; ma *nessuno* lo fa, non solo perché il risultato sarebbe straordinariamente difficile da leggere, ma soprattutto perché non darebbe alcuna utilità. In cambio, è assai estesa la notazione insiemistica "spontanea", di cui sono esempi le parentesi graffe per indicare insiemi e le tonde per le n-uple ordinate. Se f è una funzione tra A e B, con la notazione f(x) si conviene di indicare *il* compagno di x, elemento di B; cioè, se, come prima, indichiamo quest'ultimo con y, si ha: y=f(x). Limitandoci ad usare un linguaggio spontaneo, definiamo una *corrispondenza biunivoca* tra due insiemi A e B: una *funzione* f in cui f(x) esiste per ogni elemento x di A e in cui se $x_1 \neq x_2$ allora anche $f(x_1) \neq f(x_2)$. Inoltre, per ogni y appartenente a B, deve esistere un x di A tale che y=f(x). In breve, una *corrispondenza biunivoca* tra A e B è una funzione "uno a uno" che coinvolge ogni elemento di A e di B. Questo strumento consente alla Teoria TI di "contare" gli elementi di un insieme, come chiariremo.

In TI si può dimostrare il seguente teorema: esiste almeno un insieme N, almeno un insieme x_0, almeno una funzione s tra N e N e almeno due funzioni "+" e "$\cdot$" tra $N \cdot N$ ed N, tali da verificare le seguenti condizioni:

1) $x_0 \in N$
2) $\forall x \in N\ (s(x) \in N)$
3) $\forall x \in N\ (s(x) \neq x_0)$
4) $\forall x \in N\ \forall y \in N\ ((s(x)=s(y)) \rightarrow x=y)$
5) $\forall x \in N\ (x+x_0=x)$
6) $\forall x \in N\ \forall y \in N\ (x+s(y)=s(x+y))$
7) $\forall x \in N\ (x \cdot x_0=x_0)$
8) $\forall x \in N\ \forall y \in N\ (x \cdot s(y)=x+x \cdot y)$
9) $\forall M \in P(N)\ ((x_0 \in M\ e\ \forall x \in M(s(x) \in M)) \rightarrow M=N)$

dove per le funzioni + e · si conviene scrivere $x+y$ e $x\cdot y$ anziché $+(x,y)$ e $\cdot(x,y)$. Commentiamo subito che un lettore "ottimista", secondo lo stesso significato dato nel primo paragrafo, dovrebbe concludere che gli "spontanei naturali" soddisfano tali condizioni. Infatti, posto $x_0=0$ e $s(x)=x+1$, si vede bene che le condizioni 1)-8) sono equivalenti agli otto assiomi di PA. Innegabilmente, invece, c'è un pò di incertezza per stabilire esattamente il grado di affinità della condizione 9), chiamata *principio di induzione completa*, con il principio di induzione di PA: infatti, nella 9) si parla di un qualunque sottoinsieme di N (P(N) sta per l'insieme delle parti di N), mentre nel principio di induzione di PA, di una qualunque proposizione di PA con almeno una variabile libera: c'é un'esatta corrispondenza tra le due cose? Vedremo. Comunque, quest'incertezza non sembra questionare la spontaneità del principio di induzione completa: se un sottoinsieme qualsiasi di N contiene lo zero e il successore di ogni suo elemento, allora è del tutto intuitivo che contenga tutti i naturali. E poiché non può contenere elementi che non siano anche di N, essendo un suo sottoinsieme, ne segue che coincide con N. Ma queste osservazioni "fiduciose" non sono che un semplice commento: ricordiamoci che dobbiamo rifiutare in principio qualunque intuitività dei naturali e qualsiasi affinità (oltretutto non perfettamente precisata) delle suddette condizioni con gli assiomi di PA.

Ora, risulta che esistono infiniti insiemi che soddisfano le precedenti condizioni. Tuttavia tutti questi insiemi sono tra loro *isomorfi*. Definiremo più avanti cos'è esattamente un *isomorfismo* tra due insiemi: farlo adesso sarebbe un inutile appesantimento. Per il momento è sufficiente anticipare il commento, piuttosto vago, che la differenza tra due arbitrari insiemi isomorfi N_1 ed N_2 non è *operativamente* significativa.

Senza supporre, peraltro, alcunché di particolare, diciamo N uno degli infiniti insiemi, arbitrariamente scelto, che soddisfano le precedenti condizioni. Lo diremo *insieme dei numeri naturali*. Mediante N, svilupperemo i successivi discorsi, ottenendo certi risultati. Poi, quando parleremo dell'isomorfismo, chiariremo quali conseguenze avrebbe avuto sullo studio fatto, la scelta di un insieme diverso, isomorfo a N. Gli elementi di N saranno chiamati numeri naturali "insiemistici" per sottolineare che hanno una definizione formale e non intuitiva; di fatto, dato che appartengono ad un *insieme*, sono anch'essi *insiemi*.

Disponendo di N e dei suoi elementi, in TI è possibile definire rigorosamente le n-uple di insiemi, dove n è un naturale insiemistico: semplicemente, gli insiemi che possono essere messi in *corrispondenza biunivoca* con l'insieme: {1, 2, ..., n}. Un criterio formale di "conteggio". Inoltre, si possono definire anche le *n-uple ordinate* (o *successioni ordinate*, o *sequenze ordinate*) di n insiemi (a_1, a_2, ... a_n), come ovvia generalizzazione delle coppie ordinate. Con tali definizioni si è quindi in grado di formalizzare rigorosamente in TI il concetto di "sequenza ordinata di simboli", così fondamentale, come visto, per la definizione di un qualsiasi Sistema assiomatico. Soltanto, bisogna prima far sì che i simboli siano convertiti in veri e propri *insiemi*.

Conseguentemente, si possono anche generalizzare le *relazioni*: quelle n-arie tra n insiemi a_1, a_2, ...a_n, sono definite come insiemi di n-uple ordinate, costituite da un elemento di a_1, poi uno di a_2, ...etc., fino ad a_n. Queste ultime serviranno a formalizzare i predicati classici, come vedremo.

II.7. L'unificazione della Matematica

In apparenza, la potenza della Teoria TI è sconvolgente per la Matematica. La formalizzazione del concetto di insieme, infatti, non ha come unico risultato la risoluzione dei problemi precedentemente esposti; ma comporta che tutta l'ordinaria Matematica possa svilupparsi all'interno della sola Teoria assiomatica degli insiemi. Tuttavia, tale spettacolare traguardo epistemologico è condizionato da alcune fondamentali limitazioni che, fin d'ora, riteniamo utile riassumere in tre punti:

1) I vantaggi offerti dalla riduzione insiemistica sono esclusivamente di natura concettuale e non pratica: infatti, come abbiamo già osservato, la completa formalizzazione in TI di una

proposizione anche banale può dar luogo a un'improponibile complessità.

2) Ogni ambiguità semantico-logica risolta dalla formalizzazione offerta dalla Teoria TI, non "sparisce", ma si ritrova nella metamatematica che definisce e interpreta il linguaggio di TI.

3) Non sempre la rappresentazione in TI è in grado di riprodurre *fedelmente* il Sistema originale, anche nel caso in cui esso sia formale.

Naturalmente, cercheremo di illustrare con la massima profondità gli ultimi due punti. Per il più importante di essi, il terzo, sarà necessario spingerci fin nella terza Parte del libro.

Cominciamo col chiarire qual è l'*ordinaria* Matematica che può essere rappresentata in TI. Sia SC un qualsiasi Sistema assiomatico classico. Le regole grammaticali e deduttive specificano delle collezioni: delle proposizioni e dei teoremi. Se è possibile interpretare tali collezioni con gli enti della Teoria TI, cioè con *insiemi*, il Sistema assiomatico si dirà *rappresentabile* in TI. Come si vede, è una condizione abbastanza larga. Se ricordiamo la definizione di Sistema *ben definito*, in essa si parla di "insiemi" o di collezioni, delle proposizioni e dei teoremi. Ora, TI è stato costruito proprio con l'obiettivo di rendere i suoi enti matematici, gli *insiemi*, quanto più simili e compatibili con gli "insiemi" metamatematici (o collezioni); assumendo che ciò sia realizzato in modo soddisfacente, si converrà che ogni Sistema assiomatico *ben definito*, formale o no, è rappresentabile in TI. Pertanto, nel seguito ammetteremo sempre che la Matematica rappresentabile in TI sia semplicemente tutta quella *ben definita*: cioè, tutta quella che normalmente è chiamata "Matematica".

La tecnica di rappresentazione in TI è semplicemente quella di formalizzare nel suo linguaggio le *premesse* del Sistema SC, cioè gli assiomi e le regole, grammaticali e deduttive, di quest'ultimo. Dunque, la metamatematica che fonda la Teoria assiomatica SC viene codificata in linguaggio insiemistico e la Teoria stessa rappresentata all'interno di TI come un insieme di insiemi (chiamato talvolta *Struttura*). Nel seguito vedremo con un certo dettaglio come ciò si realizza e le sue conseguenze. Comunque, non è prematuro abbozzare fin d'ora il nocciolo della questione. La semantica che fonda il Sistema arbitrario SC può essere divisa in due parti: la semantica relativa alle premesse del particolare Calcolo predicativo classico formale del primo ordine su cui SC è basato (che pertanto diremo *classica*); e la semantica *propria*, relativa alle premesse *proprie* di SC. Con "relativa alle premesse", includiamo sia la semantica che *definisce* le premesse, sia quella *contenuta* nelle premesse (se il Sistema è formale, sarà contenuta soltanto nelle regole grammaticali e deduttive). Quando SC viene rappresentato in TI, la semantica classica "sparisce" solo apparentemente: infatti essa "rientra", immutata, nelle premesse classiche di TI. L'eliminazione della semantica propria, invece, rende in generale non *fedele* (in un senso che fra poco preciseremo) la rappresentazione, con tutto ciò che ne consegue.

Ma esaminiamo più accuratamente i passi della formalizzazione, mantenendo l'intento di non appesantire la lettura con troppi tecnicismi. Le proposizioni di SC vengono specificate dalle sue regole grammaticali, una cui parte sostanziale (di norma preponderante) è costituita dalle regole grammaticali del particolare Calcolo predicativo classico formale del primo ordine su cui si basa. Il primo passo è la definizione in TI dell'insieme di tutti i simboli usati da SC, diciamolo S. Di S fanno parte i simboli classici: *non*, *e*, $\forall$, etc.; ma anch'essi devono essere considerati come insiemi, poiché ogni elemento di un insieme è un insieme. Dunque saranno oggetti che *corrispondono* ai simboli classici ma in realtà affatto diversi da loro. Li distingueremo con un asterisco: *non**, *e**, $\forall$*, $\rightarrow$*, etc. Allo stesso modo, deve introdursi un insieme in corrispondenza di ogni predicato e simbolo *proprio* di SC. Per fare un esempio molto semplice, supponiamo che in SC sia definito il predicato a due variabili "x è triplo di y", rappresentato dalla notazione $\underline{T}$(x,y) ed opportuni assiomi. Poiché x e y sono variabili in un insieme universo U, l'insieme delle coppie ordinate di x e y tali che x è triplo di y, è un sottoinsieme di $U \cdot U$, cioè una relazione binaria tra U e U. La formalizzazione di $\underline{T}$(x,y) comincia, quindi, con l'introduzione di un insieme coppia ordinata che possiamo chiamare $(x,y)_T$, per ora semplicemente un generico elemento di $U \cdot U$. Supponendo che "x è triplo di y" sia l'unico predicato, avremo pertanto:

$$S=\{non^*, e^*, \forall^*, \text{etc.}, x^*, y^*, a^*, \text{etc.}, p_1^*, ...p_n^*, (x,y)_T\}$$

dove p_1, ... p_n sono i simboli propri di SC e $(x,y)_T \in U \cdot U$. Se è presente anche l'uguaglianza (una circostanza comune) si introdurrà un'altra relazione binaria, il cui generico elemento potremmo chiamare $(x,y)_=$. In generale, per ogni predicato ad n variabili $\underline{P}(x_1,\ldots x_n)$, si introdurrà una relazione n-aria tra elementi di U^n (cioè $U \cdot U \cdot \ldots \cdot U$, n volte). Ciò è sufficiente per quanto oraci riguarda, cioè per la definizione dei simboli S; ma, naturalmente, le coppie (o n-uple) introdotte dovranno poi caratterizzarsi in base agli assiomi che definiscono formalmente i predicati.

Completata la definizione di S, si passa a definire l'insieme delle proposizioni di SC, diciamolo P, cioè null'altro che l'insieme di opportune *sequenze ordinate* di elementi di S. La formalizzazione delle regole grammaticali del Calcolo classico, procede senza problemi; come esempio, formalizziamo in TI, adoperando tuttavia la notazione insiemistica spontanea, la regola grammaticale implicita "se A è una qualunque proposizione anche *non*A lo è":

$$(s_1, s_2,\ldots s_n) \in P \rightarrow (non^*, s_1, s_2, \ldots s_n) \in P, \ \forall (s_1, s_2, \ldots s_n) \in S^n$$

Questa, naturalmente, non è altro che un'espressione definitoria implicita di P.

Per completare la definizione di P si debbono poi formalizzare anche le regole grammaticali *proprie* di SC. Normalmente, la semantica che definisce le regole grammaticali proprie dei Sistemi classici si limita ad usare concetti pienamente formalizzabili in linguaggio insiemistico; in essa tipicamente, come da noi visto nei primissimi esempi, si usa di nuovo il concetto di "sequenza ordinata", che sappiamo essere perfettamente formalizzabile in TI. In termini più esatti, vogliamo dire che ogni proposizione (corretta) di SC è rappresentabile con un'opportuna stringa di simboli di TI; e che, fissata una stringa qualsiasi di simboli di TI è possibile concludere, sulla sola analisi della sequenza dei suoi simboli, se essa rappresenta o no una proposizione (corretta) di SC. In questo caso diremo, appunto, che le regole grammaticali proprie sono *fedelmente riprodotte* in linguaggio insiemistico; ovvero, che la semantica che le definisce viene soppressa senza difetti dalla codificazione in TI. Come dicevamo, non è affatto limitativo supporre che ciò si verifichi sempre: di norma, infatti, il rispetto della grammatica obbedisce soltanto a principi di idoneità "strutturale" delle proposizioni; e, in ogni caso, un eventuale (inusuale) criterio irriducibilmente semantico nella selezione delle proposizioni può essere inglobato nelle regole deduttive, cioè nella definizione dell'obiettivo finale: i teoremi.

Passiamo alla definizione dell'insieme dei teoremi di SC, diciamolo T. Come in precedenza, degli assiomi e regole deduttive, possiamo distinguere una parte *classica* e una parte *propria*. Per la parte classica, si impone in primo luogo che ogni n-upla ordinata di simboli-insiemi rappresentata da un assioma *classico* di SC, sia elemento di T (ricordiamo che in ogni Sistema classico, ogni assioma è un teorema). Si prosegue formalizzando le regole deduttive classiche, cosa che produce delle caratterizzazioni implicite per T. Come abbiamo accennato nel paragrafo I.6, le regole deduttive del Calcolo classico richiedono di distinguere, per ogni variabile contenuta in una proposizione, se essa è apparente o libera. Ebbene, anche ciò può tradursi senza problemi in linguaggio insiemistico, grazie ancora alla formalizzazione di "sequenza ordinata"; per esempio, tramite essa possiamo codificare il fatto che una variabile x* sia *preceduta* da $\forall$ * o $\exists$*, nel qual caso sarà apparente. Conseguentemente, può avvenire la formalizzazione di *sostituzione* e *modus ponens*. Ad esempio, la *modus ponens* si codifica con la seguente espressione definitoria implicita di T:

$((s_1 \ldots s_n) \in T$ *e* $(s_1 \ldots s_n \to^*, t_1 \ldots t_m) \in T) \to (t_1 \ldots t_m) \in T, \forall (s_1 \ldots s_n) \in$ P

La definizione dell'insieme T dev'essere poi completata con la formalizzazione di tutti gli assiomi e regole deduttive *proprie*. Come abbiamo anticipato, questo è il punto critico. Anzitutto, tali regole, per funzionare, potrebbero richiedere di assegnare un valore semantico alle proposizioni, caso in cui SC non sarebbe formale. Evidentemente, il linguaggio simbolico del formale TI non potrà riprodurre questo tipo di deduzioni. Ma anche nel caso in cui SC è formale ci potrebbero essere dei problemi. Ricordiamo che il rispetto della formalità per il Sistema, impone soltanto che le proposizioni siano prive di significato; ma la definizione delle *premesse* del Sistema si realizza con un linguaggio semantico sul quale non abbiamo fatto nessuna particolare ipotesi. Ad esempio, la specificazione della collezione degli assiomi propri da aggiungere a quelli classici, potrebbe non essere pienamente riproducibile in linguaggio insiemistico formalizzato. Per portare un esempio concreto, sia S un Sistema formale dotato di un modello M, per il quale supponiamo un buon grado di intuitività e inequivocabilità d'ambito metamatematico (come il modello euclideo della Geometria). Consideriamo ora il Sistema S' ottenuto da S aggiungendo come assiomi tutti gli (infiniti) enunciati di S che, interpretati in M, risultano *veri*. Se S è *ben definito* e se, come stiamo supponendo, non ci sono problemi per interpretare un arbitrario enunciato E in M e rilevare il suo valore di verità, allora anche S' è *ben definito,* essendo i suoi assiomi *distinguibili* (par. I.9). Inoltre, la formalità è rispettata: è necessario interpretare gli enunciati di S in M, solo allo scopo di stabilire se sono o non sono assiomi di S'; una volta fatto ciò, S' deduce senza attribuire alcun significato agli enunciati, come S. Ebbene, è possibile riprodurre in linguaggio formale insiemistico il riconoscimento che un dato enunciato di S è un assioma di S'? In TI non ci sono difficoltà per definire un insieme che rappresenti la collezione degli assiomi di S', perché, come vedremo presto, è possibile sia formalizzare il concetto di modello, sia introdurre una *funzione* che rappresenti la verità relativa ad esso. Ma definire un insieme per rappresentare una collezione non significa necessariamente aver tradotto formalmente tutte le proprietà che si considerano metamatematicamente valide per la collezione stessa. E, dunque, tutti i criteri che consentono di concludere o escludere se un certo elemento appartiene a detta collezione (caso in cui, appunto, diremo che la rappresentazione della collezione è *fedele*). Nel nostro caso, il criterio coinvolge il concetto di verità relativo al modello M; e, come abbiamo già constatato nella definizione di interpretazione del paragrafo II.3, la verità formalizzata non può che prendere le distanze dalla verità semantica. Chiaramente, se all'interno di TI non fosse possibile riconoscere tutti gli assiomi di S', qui non sarebbe neanche possibile riconoscere tutti i teoremi di S'. In concreto, sia *t* un teorema di SC, e l'insieme *t** la sequenza ordinata dei simboli-insieme ad esso corrispondente in TI. Se T è l'insieme che rappresenta la collezione dei teoremi di SC, alla dimostrazione che *t* è un teorema di SC, esistente ed individuabile in seno a SC (per la sua *buona definizione*), dovrebbe corrispondere la dimostrazione dell'enunciato "*t**∈ T" in seno a TI. Nel caso in cui la rappresentazione insiemistica non sia *fedele*, tuttavia, tale dimostrazione potrebbe non più essere disponibile; cioè, "*t**∈ T" essere indimostrabile in TI. In altri termini, la metamatematica che fa riferimento al Sistema TI, potrebbe non riconoscere *tutti* i teoremi della Teoria SC qui rappresentata. Perchè essa non può interamente sopperire alla metamatematica che si riferiva all'originale Sistema SC, la quale è stata eliminata nella rappresentazione insiemistica.

Pur mancando, per il momento, prove dirette di *non fedeltà* (e si può ancora sperare che tutti i Sistemi formali siano *fedelmente* rappresentabili), sembra perciò del tutto opportuno considerarla come possibile. Alla chiacchierata appena fatta non daremo, pertanto, alcun peso conclusivo: il suo scopo, fin qui, è soltanto quello di sollevare il dubbio. Solo nella Parte terza, in effetti, quando si potrà ricorrere al concetto di *funzione ricorsiva*, si avrà a disposizione un criterio formalizzabile per la *fedeltà* rappresentativa e si potranno riportare degli esempi incontrovertibili. Allora osserveremo anche che, a rigore, non c'è nulla che impedisca di far "rientrare" nella metamatematica definitoria del Sistema TI, ogni specie di semantica *propria* relativa alle premesse di un Sistema qualsiasi; cioè di ovviare sempre alla *non fedeltà* rappresentativa. Il problema, piuttosto, è il prezzo pagato, che vanificherebbe l'utilità principale della rappresentazione insiemistica[11].

[11] Infatti, troveremo che ciò implicherebbe la perdita dell'*effettiva assiomatizzabilità* di TI (una diretta caratteristica di "meccanicità", come vedremo), pur nel rispetto della sua formalità.

Tra gli assiomi propri ci sono quelli che definiscono formalmente i predicati; nei casi comuni, la loro traduzione insiemistica non dà problemi di *fedeltà*. Per esempio, nel nostro caso, il predicato $\underline{T}(x,y)$ può essere definito integralmente dalla condizione "$\underline{T}(x,y)\leftrightarrow x=3\cdot y$". Pertanto, la seguente espressione insiemistica:

$$\forall x\in U\,\forall y\in U\,(((x,y)_T, \leftrightarrow^*, x^*, =^*, 3^*, \cdot^*, y^*)\in T)$$

traduce fedelmente il suo significato. Gli assiomi di questo tipo, che contribuiscono a definire l'insieme T, completano la codifica dei predicati nei corrispondenti insiemi, costituiti da n-uple ordinate di U.

Finalmente, grazie alla discriminazione delle variabili libere ed apparenti, è anche possibile distinguere il sottoinsieme degli enunciati, E, di P; con ciò si conclude la rappresentazione di SC in TI, poiché in essa si ha una riproduzione di tutto ciò che il Sistema SC può esprimere (P), affermare (E) e concludere (T).

Dunque, a parte i problemi di *fedeltà*, sembra che la rappresentazione in TI può realizzarsi sempre. Essa fallirebbe in un solo caso: se TI fosse incoerente, mentre SC coerente. Infatti, in tal caso in TI si può dedurre qualunque cosa, come $(s_1,\ldots s_n)\in T$ e anche $(non^*, s_1,\ldots s_n)\in T$ e allora T non può rappresentare l'insieme dei teoremi di SC. La rappresentazione di SC, "passando attraverso" l'incoerente TI, si vizierebbe. Supponendo allora TI coerente, che è ciò che d'ora in poi faremo sempre, si deve ammettere che la rappresentazione di un qualsiasi SC in TI, realizzata nel modo descritto, funziona comunque, anche nel caso in cui SC sia incoerente.

In definitiva, la riduzione insiemistica impone che *l'unico linguaggio metamatematico da usarsi in Matematica sia quello che, al più, fa riferimento al Sistema matematico TI*: quello di tutti gli altri Sistemi assiomatici viene eliminato, con, in generale, i possibili problemi di *non fedeltà* che abbiamo evidenziato. Sottolineiamo che la metamatematica "che, al più, fa riferimento a TI", non è soltanto quella che fonda TI e che si usa nelle sue dimostrazioni: in base a quanto osservato nel paragrafo I.3, essa coinvolge *ogni* proprietà semantica sufficientemente chiara e rigorosa che, eventualmente (cioè, non necessariamente), faccia riferimento al solo Sistema TI. Per esempio, ne fa parte lo stesso riconoscimento dell'idoneità della rappresentazione in TI di una certa Teoria assiomatica classica.

Non è possibile rappresentare TI in TI stesso. Ad esempio, i simboli classici *non*, *e*, $\forall$, etc., che compaiono negli assiomi definitori della Teoria classica TI, malgrado siano gli stessi che vengono utilizzati in ogni altra Teoria classica, non possono essere ricondotti a insiemi, in quanto qui servono per definire gli stessi insiemi! Dunque, l'"insieme" delle proposizioni o dei teoremi di TI non può essere definito in TI stesso: cioè, non può essere un *insieme*. Così in TI, il *modus ponens*, per esempio, riapparirà in forma irrinunciabilmente semantica. Come abbiamo affermato, la semantica classica dei Sistemi classici rappresentati in TI "rientra" attraverso la definizione stessa di TI. Non poteva non essere così: un tipo di irriducibile metamatematica è indispensabile nella fondazione di ogni Sistema assiomatico non banale, come sappiamo.

In TI è possibile formalizzare il problema della coerenza di un Sistema classico ivi rappresentato. Ad esempio, l'espressione: $\exists$p(p$\in$ E *e* p$\notin$ T), esprime che esiste un enunciato di SC che non è un teorema di SC; e dunque la coerenza di SC. Se essa (o la sua negata) fosse dimostrabile, cioè se fosse un teorema di TI, risolveremmo il problema della coerenza per SC; senza dimenticarsi che tutto ciò è *sotto l'ipotesi di coerenza per TI*. Comunque, come vedremo, TI è "ben lungi" dall'essere completo, quindi è possibile che il suddetto enunciato sia indecidibile. Dunque, non è detto che TI possa risolvere la coerenza di tutti i Sistemi assiomatici classici; tuttavia ciò accade per le fondamentali Teorie della Matematica, come descriveremo presto.

Infine, è doveroso risaltare che TI riesce a rappresentare *fedelmente* tutte le usuali Discipline matematiche formali. Soffermiamoci, per esempio, su PA. L'unico suo elemento critico, come visto, è il principio di induzione. Sostanzialmente, esso fa riferimento a "sostituzione" e "proposizione con almeno una variabile libera"; concetti che, come già osservato, possono essere tradotti perfettamente nel linguaggio di TI grazie al concetto di "sequenza ordinata". Una circostanza analoga si verifica per tutte le Discipline classiche comunemente usate in Matematica.

II.8. Teorema di correttezza

Finalmente, veniamo a come TI risolve i problemi precedentemente esposti. Ovviamente, la speranza che annulli per incanto le descritte ambiguità è irragionevole, essendo essa stessa, alla fin fine, una Teoria assiomatica come le altre. In effetti, vedremo che le risolve per ogni altro Sistema classico, assumendole per sé stessa. Ciò è un indizio assai eloquente circa la reale natura dei vantaggi dell'unificazione insiemistica della Matematica.

I concetti di *interpretazione* e quindi anche di *modello* di un Sistema assiomatico classico rappresentato in TI, possono essere definiti formalmente in TI stesso, codificando in linguaggio insiemistico la definizione di *interpretazione* data nel paragrafo II.3. È chiaro che ciò non si può fare per lo stesso Sistema TI. La definizione in TI di un'interpretazione per TI stessa, passerebbe per la definizione *formale* dell'*insieme* universo U, in cui variano tutti gli enti di TI, cioè tutti gli insiemi; allora U conterrebbe sé stesso, cosa non consentita, come abbiamo visto. È sorprendente che abbia riscontrato l'enunciazione di tale ovvia ma cruciale puntualizzazione in un solo autore[12]. Un'*interpretazione di TI* è quindi un concetto completamente diverso dall'*interpretazione* di ogni altro Sistema assiomatico rappresentato in TI. Non può che avere l'originale carattere informale che volevamo rendere più rigoroso. Lo possiamo definire ancora mediante le condizioni citate nel paragrafo II.3; ma sostituendo al termine *insieme* un sinonimo irrinunciabilmente semantico come, ad esempio, "collezione". Così, come conseguenza metamatematica dell'aver formalizzato il concetto di insieme, risulta che abbiamo bisogno di un concetto simile ma informale! In altri termini, abbiamo *comunque* bisogno di un concetto ineliminabilmente semantico di "insieme". Per gli estimatori della

[12] Graham Priest, *In Contradiction: a Study of the Transconsistent*, Martinus Nijhoff, Dordrecht (1987).

Teoria assiomatica degli insiemi, il risorgere del concetto di *collezione* dalle ceneri del concetto informale di insieme, rivela che la Teoria TI è già immigliorabilmente fondamentale; per i detrattori, che essa è inutile! Ma riassumeremo più tardi le due opposte posizioni.

Nel seguito, converremo dunque di mettere tra virgolette i "modelli" di TI per ricordarci che essi sono concetti informalizzabili, necessariamente semantici. D'altra parte, dovevamo aspettarcelo: un'interpretazione di un Sistema assiomatico, e quindi un suo modello, è un concetto intimamente semantico; non è, alla fine, che una collezione di frasi significative. Che senso avrebbe cercare di far sparire tale significato? In effetti, non può sparire; negli stessi Sistemi assiomatici rappresentati in TI, esso "ritorna" attraverso l'interpretazione delle proposizioni di TI. In altre parole, quando si considera un "modello" di TI, anche i modelli delle Teorie rappresentate in TI, qui oggetti puramente simbolici, riacquistano valore semantico, cioè significato.

Un punto fondamentale per realizzare l'ambita formalizzazione, è la definizione in TI di una *funzione di verità* relativa all'interpretazione. In essa si introducono delle cruciali novità. Infatti, tale *funzione*, diciamola *v*, non deve solo associare ad ogni enunciato della Teoria classica rappresentata un valore "V" oppure "F" soddisfacendo ai punti b) e c) del paragrafo II.3; ma anche soddisfare altre opportune condizioni "chiave" che mettono in relazione i valori "V" e "F", con i connettivi logici e quantificatori di un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine (già ridotti ad insiemi: *non**, *e**, $\forall$ * etc.). Citiamo soltanto due condizioni:

1a) $v(s_1,s_2,\dots s_n)=V \leftrightarrow v(non^*,s_1,s_2,\dots s_n)=F,\ \forall\ (s_1,\dots s_n) \in E$
1b) $v(s_1,s_2,\dots s_n)=F \leftrightarrow v(non^*,s_1,s_2,\dots s_n)=V,\ \forall\ (s_1,\dots s_n) \in E$

2) $((v(s_1,\dots s_n)= F)\ o\ (v(q_1,\dots q_n)=V)) \leftrightarrow v(s_1,\dots s_n,\rightarrow^*,q_1,\dots q_n)=V,$
$\forall\ (s_1,\dots s_n)\in E,\ \forall\ (q_1,\dots q_n)\in E$

dove E indica l'insieme degli enunciati. La prima coppia è semplicemente la formalizzazione dei principi di non contraddizione e terzo escluso. La seconda fa, appunto, parte delle nuove clausole e stabilisce che ad un enunciato del tipo "A,→*,B" si assegni il valore *vero* se e soltanto se "A" ha il valore *falso* oppure (non esclusivo) "B" il valore *vero*. Allora, in particolare, se "A" è *vero* e "A,→*,B" pure *vero*, dovrà necessariamente essere anche "B" *vero*. Di conseguenza, queste condizioni *stabiliscono esplicitamente la correttezza del modus ponens* in ogni Sistema classico rappresentato in TI; analoghe clausole stabiliscono la correttezza delle altre tre regole deduttive classiche. In definitiva, si ha allora che *ogni modello di un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine è un modello corretto* (teorema di correttezza). In pratica tali condizioni, dunque, impongono esplicitamente di considerare solo concetti di verità che rispecchiano il significato più intuitivo dei connettivi logici e quantificatori; o, il che è lo stesso, restringono le interpretazioni a quelle in cui i connettivi classici obbediscono alle consuete tabelle di verità; col risultato che tutti i modelli sono corretti.

Conseguentemente alla formalizzazione di *modello*, anche la proprietà che *ogni Sistema classico con un modello è coerente*, si converte in *teorema* di TI. Ma, naturalmente, per lo stesso TI bisogna ancora considerarlo un *meta*teorema. Ciò vale, peraltro, anche per la *correttezza* dei suoi "modelli": ricordando le critiche al metateorema di correttezza, per TI non resta che *assumere* le convenzioni metamatematiche corrispondenti alle condizioni formali appena definite; il che significa semplicemente *convenire* di limitarsi al comune significato dei connettivi logici e quantificatori, risultandone "modelli" senz'altro corretti, se esistenti.

Naturalmente, è molto importante che TI abbia, effettivamente, almeno un "modello" corretto. Se così non fosse, si avrebbe un drammatico sfacelo dell'insiemistica. Infatti, ciò significherebbe, in base ai principi stessi della Logica classica, che in realtà non esiste una *collezione* (ricordiamo, un concetto inevitabilmente semantico) di oggetti chiamati *insiemi* che soddisfano le premesse di TI e che costituiscono un'interpretazione classica. Ad esempio, anche se TI deduce che "esiste l'insieme dei numeri naturali", cioè in concreto una stringa del tipo "$\exists$N($x_0 \in$ N *e* ...etc.", da un punto di vista semantico (metamatematico), tale insieme non sarebbe interpretabile, non esisterebbe. Verrebbe cosí a cadere la corrispondenza tra il simbolo "$\exists$" e il corrispondente concetto semantico. Questo disaccordo si trasmetterebbe ad ogni Sistema assiomatico rappresentato in TI, cioè coinvolgerebbe tutti i teoremi della Matematica riproducibili in TI. D'altra parte, se ogni "modello" di TI fosse scorretto, per le stesse ragioni, non esisterebbe un'interpretazione in cui ogni teorema della Matematica riproducibile in TI, è vero. In effetti, uno dei risultati più desiderati è proprio la possibilità di "costruire" modelli corretti per le fondamentali Teorie assiomatiche a partire da un "modello" corretto di TI, come vedremo fra breve. Invero, per garantire l'esistenza di "modelli" corretti per TI, basta l'ipotesi (già rivelatasi necessaria, peraltro) che esso sia coerente: infatti in tal caso, esistenza e correttezza di suoi "modelli" sono assicurati, rispettivamente, dal metateorema di completezza semantica (la cui metadimostrazione, valida per il Calcolo predicativo classico formale con uguaglianza su cui TI è basato, può facilmente generalizzarsi a tutto TI, dato che in esso si aggiungono soltanto 17 assiomi esibiti) e dall'appena citato metateorema di correttezza.

Vale il teorema di correttezza per ogni Sistema classico? Il problema è costituito dalle regole deduttive *proprie* del Sistema: poiché abbiamo ammesso totale arbitrarietà su di esse, non è detto che siano sempre corrette, naturalmente. Nei casi normali, comunque, si può fare un'opportuna *convenzione*. L'idea è quella di eliminare le regole deduttive *proprie*, sostituendole con un insieme infinito di assiomi (se fossero finiti, significherebbe che le regole deduttive proprie non sono necessarie, perché potremmo aggiungere una lista finita di *teoremi propri*), lasciando immutato – ammesso che sia possibile – l'insieme dei teoremi dell'originale Teoria. Ciò porta ad assumere che *le quattro regole deduttive di un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine, siano le uniche regole deduttive del Sistema classico*: le altre, quelle *proprie*, si dovrebbero riconsiderare come generatrici di *assiomi*; in questa nuova veste, esse vengono allora chiamate "schemi assiomatici". Il vantaggio essenziale di questa convenzione, da un punto di vista meramente pratico, è che *ogni modello del nuovo Sistema è un modello corretto*, in quanto tutte le sue regole deduttive sono corrette[13]. In principio, evidentemente, non è detto che ciò possa sempre farsi; e, ammesso che sì, neppure che il Sistema risultante sia ancora *ben definito*. Ma tali problemi non esistono nei casi normali, cioè in tutti i Sistemi di comune interesse. Infatti, in ciascuno di essi, le regole deduttive proprie si possono interpretare senza problemi come schemi assiomatici, i quali generano assiomi *distinguibili* (anzi, normalmente *decidibili*, una condizione ben più forte, come vedremo). Considerato che di norma anche le regole grammaticali *proprie* sono sempre prive di ambiguità (tali da non alterare la *distinguibilità* degli enunciati), si ha allora anche la sicurezza della *buona definizione*, per quanto provato nel paragrafo I.9.

Esaminiamo l'esempio emblematico del Sistema PA. Il suo principio di induzione lo riconsideriamo come generatore di assiomi anziché teoremi. Come abbiamo alterato il Sistema originale? Ogni teorema di quest'ultimo è ancora teorema del nuovo Sistema, in quanto ogni assioma è un teorema. Inoltre, le quattro regole deduttive classiche non distinguono esplicitamente tra assiomi e teoremi quando deducono. Ad esempio, il *modus ponens* deduce "B" a partire da "A" e "A→B", indifferentemente se uno di questi due ultimi enunciati, o entrambi, sono assiomi o teoremi. Pertanto, ogni teorema che può dedursi nel nuovo Sistema può anche dedursi nell'originale. La differenza, allora, è soltanto strutturale. Inoltre, si riconosce che gli assiomi induttivi sono *distinguibili*: si dovrà verificare che il primo simbolo sia "(", poi che segua un enunciato che menzioni la costante "0", poi che segua il simbolo "*e*", etc. La chiarezza delle regole grammaticali *proprie* di PA, permette poi di concludere metamatematicamente che la *distinguibilità* degli enunciati si conserva. Pertanto il nuovo Sistema è *ben definito*, come il Calcolo predicativo classico formale del primo ordine con uguaglianza su cui è basato. Ciò si può ripetere per tutti gli altri Sistemi di comune interesse matematico.

---

[13] Questo argomento è normalmente taciuto nei comuni testi, dove in una Teoria come PA, ad esempio, il principio di induzione è considerato direttamente uno schema assiomatico. Qui presentiamo una giustificazione del perché convenga lavorare con Sistemi dotati di infiniti assiomi; cosa che, sulle prime, potrebbe giustamente sembrare un'incomprensibile complicazione.

Nel seguito assumeremo sempre, tacitamente, la possibilità di questa convenzione per ogni Sistema classico. Ed in particolare *che il Sistema così ottenuto sia ben definito*. In tali nuovi Sistemi, quindi, gli schemi assiomatici non sono delle regole deduttive, ma solo una tecnica per indicare una collezione infinita di assiomi del Sistema. Ricordiamo, comunque, che in ogni caso le dimostrazioni potranno coinvolgere solo un numero finito di assiomi o non potrebbero essere di lunghezza finita (una delle condizioni di *buona definizione*).

In sostanza, l'esito di questa convenzione è quella di "filtrare" solo i modelli corretti del Sistema originale: i suoi *modelli scorretti* cessano di essere *modelli* del nuovo Sistema. Infatti, se sono scorretti, sarà a causa delle regole deduttive *proprie*, come si è concluso; in particolare, alcuni teoremi dedotti mediante esse saranno falsi, in tali modelli. Allora, tali interpretazioni non possono essere *modelli* di un Sistema in cui tali teoremi vengono riconsiderati come assiomi.

Conseguentemente a tale convenzione, il teorema di correttezza vale per ogni Sistema classico, anche non formale: d'ora in poi, potremo semplicemente parlare di *modello*, riferendoci ad un modello senz'altro *corretto*.

La convenzione appena fatta ha come conseguenza che la *non fedeltà* della rappresentazione in TI di un certo Sistema assiomatico classico, può aversi solo nella formalizzazione dell'insieme degli *assiomi propri*. Ricordiamo che dalla *buona definizione* del Sistema e dalle pretese di TI, non ci dovrebbero mai essere problemi per rappresentare tale insieme in TI, diciamolo A. Ma la conclusione metamatematica che un certo enunciato *a* è un assioma (esistente ed individuabile nel Sistema originale, dalla sua *buona definizione*), potrebbe non più essere disponibile in TI; ovvero, l'enunciato "$a^* \in A$" essere indimostrabile in TI. Naturalmente, saranno anche non riproducibili in TI tutti i teoremi della Teoria che richiedono l'assioma *a*.

II.9. Completezza sintattica e completezza semantica

Grazie al teorema di correttezza, i teoremi di un qualsiasi Sistema classico sono *veri se interpretati secondo qualunque modello*; enunciati siffatti si dicono in breve *validi*, anche se preferiremo spesso ripetere *veri in ogni modello* a scanso di equivoci. Sorge spontanea la domanda se, in un Sistema che ammetta modelli, le proposizioni *valide* debbano essere necessariamente teoremi della Teoria stessa. Se no, saremmo un pó dispiaciuti: ci sarebbero delle proposizioni vere in ogni modello (e dunque epistemologicamente assai importanti) che il Sistema formale non è in grado di dedurre. In questi casi, si potrebbe ancora ricorrere a un criterio "esterno" al Sistema per tentare di scoprirle, un criterio che si è perfino assiomatizzato con l'introduzione di TI; tuttavia, vedremo che l'esito di un tale metodo non è assicurato. La gradevole proprietà che tutte (e sole) le proposizioni *valide* siano teoremi, si chiama *completezza semantica*.

Per evitare confusioni con la completezza sintattica e per semplificare, indicheremo spesso semplicemente con *completezza* la *completezza sintattica*, mentre il termine *s-completezza* indicherà quella semantica.

La prima cosa che faremo è giustificare il nome del metateorema di completezza semantica, il quale, come abbiamo visto, afferma che: *se un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine è coerente, allora ammette almeno un modello*. La ragione è che esso implica anche la s-completezza per il Sistema, nelle stesse ipotesi. Sia, infatti, S un Sistema di questo tipo. Per il metateorema, ammette almeno un modello. Supponiamo, allora, che E sia un arbitrario enunciato *vero* in ogni modello di S e cerchiamo di concludere che è un teorema. È impossibile che E sia il negato di un teorema: per il teorema di correttezza, E sarebbe falso in ogni modello. Supponiamo allora che E sia indecidibile; in questo caso sappiamo che il Sistema S+*non*E è coerente. Poiché *non*E è un enunciato del primo ordine e non aggiungiamo nessuna nuova regola deduttiva, tale Sistema è ancora un Calcolo predicativo classico formale del primo ordine; riapplicando il metateorema, concludiamo che possiede modelli, per i quali, allora, *non*E è vero. Ma tali modelli sono anche modelli di S, perché ne soddisfano tutti gli assiomi; dunque, per ipotesi, E è vero in essi: impossibile. Non resta che ammettere che E è un teorema di S, cioè che S è semanticamente completo.

Riguardiamo adesso le nostre ambizioni nei confronti dei Sistemi assiomatici classici *ben definiti*, alla luce dei due tipi di completezza. Consideriamo un Sistema classico *ben definito,* dotato di modelli e dunque coerente. La circostanza più gradevole è il caso in cui il Sistema è completo: infatti, ogni enunciato che non è un teorema sarebbe riconoscibile, in quanto negato di un teorema[14]. L'insieme dei teoremi sarebbe dunque *distinguibile*. Inoltre, il Sistema sarebbe anche semanticamente completo. Infatti, non possono esistere enunciati veri in ogni modello che non sono teoremi: quelli che non sono teoremi, sono negati di teoremi e pertanto falsi in ogni modello. In conclusione, la completezza sintattica, unita all'esistenza di modelli, è una combinazione assai appagante.

Se invece il Sistema classico con modelli è incompleto, possiamo certamente riconoscere i negati dei teoremi; ma restano gli enunciati indecidibili da scoprire, se si vuole che l'insieme dei teoremi sia *distinguibile*. Questo desiderio non è "accademico" ma legato a un vantaggio concreto: la scoperta che un certo enunciato I è indecidibile, implicherebbe che gli sforzi per dimostrare o confutare I sono inutili e suggerirebbe di includere I o *non*I tra gli assiomi. Tale processo, ripetuto, potrebbe rendere completo il Sistema; almeno, questa sembra per ora una speranza sensata.

Se il Sistema in questione (con modelli ed incompleto), chiamiamolo S, è s-completo, esiste un criterio per riconoscere gli enunciati indecidibili. Infatti in tal caso, detto I un arbitrario enunciato indecidibile, i Sistemi S+I e S+*non*I devono ammettere modelli e il criterio per riconoscere I può consistere, appunto, nel trovarli. [È facile concludere perché devono ammettere modelli: se

[14] Naturalmente, ogni teorema è riconoscibile tramite la sua dimostrazione, che deve esistere per la *buona definizione*.

S+I non ammettesse modelli, significherebbe che I è falso in ogni modello di S; ma allora *non*I sarebbe vero in ogni modello di S e pertanto un teorema per la supposta s-completezza. Ciò contro l'ipotesi che I è indecidibile. Allo stesso assurdo semantico si giunge supponendo che S+*non*I non abbia modelli]. Il problema dell'individuazione dei modelli, di certo esistenti per S+I e S+*non*I, può enunciarsi nel linguaggio formale di TI. Tuttavia, come accade per ogni altro ente matematico della Logica classica, un modello potrebbe essere non individuabile, pur se esiste. Infatti, mentre il problema della sua *rappresentabilità* è sempre ovviabile con un'opportuna convenzione (e, conseguentemente, denotazione) metamatematica, l'enunciato "M è un modello di S+I", per esempio, potrebbe essere *indecidibile* in TI. Vedremo, in effetti, che TI è "irrimediabilmente" incompleto, per cui tale possibilità è ben concreta. Tuttavia, ci sono ancora i metodi puramente metamatematici per individuare siffatti modelli di S; si tratta di oggetti che, ripetiamo, devono necessariamente esistere nelle ipotesi fatte per il Sistema. In base alle critiche epistemologiche fatte al principio della *non individuabilità* (all'inizio del par. I.12), si direbbe che è forzato ritenere che tale principio debba valere anche nell'ambito dei ragionamenti metamatematici. Dunque, nel caso considerato, sembra ragionevole ritenere che l'insieme dei teoremi sia *distinguibile*. Alla fine della terza Parte ritorneremo su questo argomento e osserveremo effettivamente che, mentre tale ottimismo sembra giustificato per un qualsiasi comune Sistema formale, non lo sembra per TI stesso.

Se invece il Sistema classico con modelli ed incompleto, S, non è s-completo, non è assicurato che i Sistemi S+I e S+*non*I abbiano modelli. [Se lo fosse, cioè se tali modelli esistessero per ogni indecidibile I, verrebbe a dire che per ogni enunciato indecidibile esisterebbero modelli di S per cui esso è falso; e, d'altra parte, i negati dei teoremi sono falsi in tutti i modelli di S per la correttezza. Allora, se un enunciato è vero in ogni modello di S non può che essere un suo teorema, cioè S sarebbe s-completo, contro l'ipotesi]. Per riconoscere che I è indecidibile, non resta che il metodo generale: concludere che i Sistemi S+I e S+*non*I sono coerenti (par. I.10). Di nuovo, si tratta di un problema che può essere affrontato –

ma, come osservato, non sempre risolto – formalmente da TI. Come nel caso precedente, qualora, per esempio, l'enunciato di TI che afferma la coerenza di S+I sia indecidibile, si potrebbe ricorrere a ragionamenti puramente metamatematici per concluderlo. Ma ora la questione è molto più delicata: ricordiamo, infatti, che abbiamo messo in discussione la possibilità di una conclusione metamatematica di coerenza del Sistema sulla base della semplice considerazione di un suo modello intuitivo. E che si è introdotto TI anche allo scopo di ottenere dimostrazioni di coerenza. Qui la situazione è anche peggiore, in quanto non è neppure assicurato che un modello di S+I esista. Conseguentemente, non ci può essere alcuna garanzia che la metamatematica sia sempre capace di concludere che un siffatto Sistema è coerente, se lo è. In definitiva, in questo caso non è assicurato che l'insieme dei teoremi sia *distinguibile*. In particolare, è anche possibile che un enunciato indecidibile *valido* non sia riconoscibile come tale.

Chiariti i vantaggi della s-completezza, il passo successivo è quello di ridurre a teorema di TI il metateorema di s-completezza, nonché generalizzarlo. Comunque, bisogna far precedere questi argomenti dal concetto di *numerabile* e, più in generale, di *cardinalità*. Prima di farlo, tuttavia, è il caso di osservare altre fondamentali capacità di TI.

II.10. La coerenza dell'ordinaria Matematica

TI può anche offrire la possibilità di "costruire" in concreto dei modelli per i Sistemi classici in esso rappresentati. Per farlo, basta esprimere le *premesse* del Sistema classico, SC, in linguaggio insiemistico, convertendosi cosí in condizioni che possono essere soddisfatte da opportuni insiemi; se uno di tali insiemi viene individuato in TI, esso rappresenta un valido universo per le variabili di SC e l'identificazione di un modello, nei casi comuni, ne discende immediatamente. Tale "costruzione", comunque, richiede un "modello" corretto per TI (la cui esistenza, ricordiamo, è assicurata metamatematicamente dalla semplice ipotesi di coerenza per TI). La conversione delle premesse di SC in linguaggio insiemistico si realizza lasciando immutati i simboli classici *non*, *e*, $\forall$, etc., e interpretando i simboli e i predicati propri di SC come insiemi, esattamente nel modo precedentemente descritto. Chiameremo sinteticamente *corrispondenza insiemistica* quest'operazione.

Vediamone subito un esempio con PA: individuiamo in concreto un suo modello a partire da un "modello" corretto di TI. Cominciamo col convertire gli assiomi propri di PA nelle corrispondenti espressioni insiemistiche di TI. I simboli propri di PA sono 0, +, $\cdot$ e il predicato $\underline{S}$(x,y); introduciamo in corrispondenza gli insiemi 0*, +*, $\cdot$* e la relazione binaria $S_{p,s}$ ("p" ricorda "precedente" ed "s" successore), insieme di coppie ordinate di elementi dell'universo U (che dobbiamo dimostrare esistente). I primi tre assiomi *propri* di PA diventano così:

(1) $0^* \in U$
(2) $\forall x^* \in U\ (\exists y^* \in U\ ((x^*,y^*) \in S_{p,s}))$
(3) $\forall x^* \in U\ ((x^*,y^*) \in S_{p,s} \to y^* \neq 0^*)$

con i simboli classici inalterati. Facendo lo stesso per gli altri assiomi di PA, si otterrà una lista di proposizioni di TI, che chiamiamo (1)-(8). Dalle condizioni (5) e (6) si impone, tra l'altro, che la relazione binaria $S_{p,s}$ sia una *funzione*: infatti si può dedurre facilmente: $((x,y) \in S_{p,s}$ *e* $(x,z) \in S_{p,s}) \to y=z$, ovvero che il successore di x è unico, per ogni x. Indicando allora con s(x) *il* compagno y di x tale che $(x,y) \in S_{p,s}$, le condizioni in TI si possono semplificare. Ad esempio, (2) e (3) diventano:

(2) $\forall x^* \in U(\exists y^* \in U(y^*=s(x^*)))$ ovvero: $\forall x^* \in U(s(x^*) \in U)$
(3) $\forall x^* \in U(s(x^*) \neq 0^*)$

le quali coincidono esattamente con le condizioni 2) e 3) che definiscono l'insieme dei numeri naturali N (par. II.6). In modo analogo si può ottenere che le condizioni (4)-(8) coincidono con le 4)-8) definitorie di N. Ora occupiamoci del principio di induzione di PA. Supponiamo per il momento che x sia l'unica variabile libera per A(x). Trattando A(x) come se fosse un predicato un-ario, gli faremo corrispondere una relazione un-aria, cioè un sottoinsieme dell'universo U, diciamolo A, per scrivere poi $x^*\in A$ al posto di A(x). La definizione insiemistica di A è: $A=\{x^*\in U(A(x^*))\}$, che indica, in notazione insiemistica "spontanea", l'insieme di tutti e soli gli x* appartenenti a U che soddisfano la condizione A(x*), cioè la condizione insiemistica corrispondente ad A(x).

Il principio di induzione si trasforma allora in:

$$(0^*\in A \; e \; \forall x^*\in U(x^*\in A \rightarrow s(x^*)\in A)) \rightarrow \forall x^*\in U\,(x^*\in A),$$

qualunque sia A. L'espressione implicata si può semplificare in A=U, poiché A è un sottoinsieme di U. Inoltre, anche l'espressione dopo *e* si può semplificare. Formalizzando anche *qualunque sia A*, si ricava:

$$(9) \qquad \forall A\,((0^*\in A \; e \; \forall x^*\in A\,(s(x^*)\in A)) \rightarrow A=U)$$

[Se x non è l'unica variabile libera per A(x), cioè se in realtà, evidenziando tutte le variabili libere, si ha $A(x, x_1,\ldots x_n)$, ricordiamo che, in un assioma, per ogni variabile libera si può sottintendere un simbolo "$\forall$". Allora, chiamando B(x) la proposizione con un'unica variabile libera $\forall x_1\ldots\forall x_n\; A(x,x_1\ldots x_n)$, si può riottenere facilmente (mediante l'uso del teorema $\forall x\forall y\; P(x,y) \leftrightarrow \forall y\forall x\; P(x,y)$, provabile per ogni P(x,y)), un'espressione identica alla (9), con B, il sottoinsieme di U degli x che soddisfano l'espressione B(x), al posto di A].

La (9) è un'espressione che assomiglia molto alla condizione 9) dei naturali insiemistici. Se gli A variassero in tutto l'insieme P(U) si avrebbe un'esatta coincidenza. Ma l'insieme in cui varia A è quello dei sottoinsiemi di U i cui elementi si possono caratterizzare con una condizione insiemistica corrispondente a un'arbitraria proposizione con almeno una variabile libera di PA[15]. Si può dire in modo più

[15] In notazione insiemistica ingenua, tale insieme è:
$P(U)_1=\{A\in P(U): \exists A^*(x^*)\in P_1: A=\{x^*\in U(A(x^*))\}\}$, dove $A^*(x^*)$ indica la sequenza di simboli-insieme corrispondente ad A(x), P_1 l'insieme di tutte le proposizioni di PA con almeno una variabile libera e A(x*) l'espressione

semplice utilizzando il concetto di verità: detta A(x) un'arbitraria proposizione di PA con una variabile libera x, consideriamo l'insieme di tutti gli x di U che la rendono vera, diciamolo A. Al variare di A(x) nell'insieme di tutte le proposizioni con una variabile libera di PA, si può cosí ottenere un insieme di sottoinsiemi di U che indichiamo con {A, B, C, etc.}. La domanda che ci siamo posti è se tale insieme contiene *tutti* i sottoinsiemi di U, cioè se coincide con P(U). Se la risposta è "no" significa che esistono sottoinsiemi di U i cui elementi non possono essere caratterizzati da nessuna proposizione esprimibile in PA. Ritorneremo su questo argomento d'importanza capitale. Per ora non ci preme rispondere alla domanda, in quanto ciò che succede è che la condizione dei naturali insiemistici 9) è più esigente della (9) corrispondente a PA, cioè implica quest'ultima.

Come abbiamo affermato nel paragrafo II.6, in TI si può dimostrare che esiste un unico N (a meno di isomorfismi) che soddisfa le condizioni 1)-9). Pertanto, esso soddisferà anche le (1)-(9), cioè le condizioni insiemistiche corrispondenti alle premesse proprie di PA. Allora, assumendo per PA, U=N, la condizione a) del paragrafo II.3 (esistenza dell'universo) è verificata. Per verificare le condizioni b) e c) basta poi far riferimento al "modello" corretto di TI, visto che tutti gli enunciati di PA hanno ormai un corrispondente enunciato insiemistico. Abbiamo dunque costruito un modello di PA mediante N, l'insieme dei numeri naturali; tale modello è detto *standard* e, ricordiamo, è determinato a meno di isomorfismi. Naturalmente, si è così anche *dimostrato* che il principio di induzione di PA è coerente con le altre premesse dello stesso Sistema.

Infine, a partire da un modello di PA, si può costruire un modello della Teoria formale dei razionali e quindi della Teoria formale dei reali (spesso TFR nel seguito), detta anche di Tarski[16]. I

---

insiemistica corrispondente ad A(x) [i due punti ":", che si leggono "tale che", fanno parte delle notazioni *ingenue* e servono solo a limitare il numero di parentesi]. Circa la formalizzabilità in TI di tali "corrispondenze", rimandiamo a una nota del par. II.14.

[16] Come per i naturali, anche per la Teoria dei reali c'è una versione *integrale*, più complessa, e una più semplice, che si suole chiamare *di Tarski*. Preciseremo ulteriormente in seguito.

numeri razionali, infatti, nella loro rappresentazione in TI, si possono definire come coppie ordinate di numeri naturali insiemistici (ad esempio la coppia (1,4) corrisponde al razionale 1/4=0.25), mentre i numeri reali come insiemi costituiti da coppie di opportuni insiemi di razionali (quest'ultimo aspetto non è certo intuitivo, ma tale costruzione tecnica non presenta difficoltà concettuali). Inoltre, mediante un modello della Teoria dei reali di Tarski, come già osservato alla fine della prima Parte, possiamo anche costruire un modello di GE e delle Geometrie non euclidee. Ogni modello costruito a partire dal modello *standard* di PA, si chiama ancora *standard*.

In definitiva, il Sistema TI permette di dimostrare la coerenza di tutte le comuni Discipline classiche, individuandone in concreto dei modelli a partire dall'insieme N; tutto ciò supponendo la coerenza (e quindi l'esistenza di un "modello" corretto) *per un solo Sistema*: lo stesso TI.

Ma la coerenza di TI, e quindi dell'intero edificio chiamato Matematica, non può dimostrarsi in TI; vedremo in dettaglio questo fatto – invero, del tutto sensato – nella terza Parte. Dal punto di vista più critico, la spettacolare riduzione insiemistica della Matematica – a parte i problemi di *fedeltà* rappresentativa – è sostanzialmente un'eleganza fine a sé stessa. Eppure, non si può negare il suo aspetto chiarificatore, se non altro proprio del fatto che è vano cercare di verificare la congruenza di tutti i fondamenti della Matematica.

II.11. Isomorfismo

Chiariamo adesso cos'è un *isomorfismo* tra due *insiemi*. Esso è una particolare *funzione*, più esattamente una *corrispondenza biunivoca*, cioè ancora un *insieme* della Teoria TI. Ne daremo, comunque, una definizione informale (come, del resto, si fa *ovunque*, per le ragioni spiegate), anche se rigorosa.

Siano dati due insiemi A e B, in cui sono definite uno stesso numero e *tipo* di *operazioni interne*. Un'*operazione interna* in A è semplicemente una *funzione* di A^n in A stesso, dove *n* è un qualsiasi naturale $\geq$ 1. Il numero *n* specifica, appunto, ciò che abbiamo chiamato brevemente *tipo*. Indichiamo con $o_{A1,\ldots}\ o_{Ak}$ e $o_{B1,\ldots}\ o_{Bk}$ le k operazioni interne definite in A e B. Per esempio, in relazione alla definizione insiemistica dei numeri naturali, le operazioni interne definite sono tre (par. II.6): s(x) tra N e N, +(x,y) e $\cdot$(x,y) tra N^2 e N. Ebbene, un *isomorfismo* tra A e B, *rispetto alle operazioni interne definite in A e B*, è una *corrispondenza biunivoca f* tra A e B, tale che:

$$f(o_{Ai}\ (x_1,\ldots x_n)) = o_{Bi}\ (f\,(x_1),\ldots f\,(x_n)),\ \text{per ogni i} =1, 2,\ldots \text{k}.$$

A parole, l'isomorfismo è una corrispondenza biunivoca che *rispetta le operazioni interne*: infatti, il risultato di un'arbitraria operazione o_{Ai} in A, cioè l'elemento di A chiamato $o_{Ai}(x_1,\ldots x_n)$, viene associato dalla *f* all'elemento di B che si ottiene operando in B con l'operazione corrispondente (dello stesso *tipo*), o_{Bi} , sugli elementi di B associati dalla stessa *f* agli iniziali elementi di A. Vedremo a continuazione un esempio concreto.

Mostriamo adesso quali differenze sorgano a causa di due scelte diverse dell'insieme che soddisfa le nove condizioni del paragrafo II.6; insieme, ricordiamo, da chiamare *dei numeri naturali*. Per riferirci ad un esempio autentico, consideriamo la seguente scelta: quella che considera l'insieme vuoto, $\emptyset$, come insieme x_0 e come operazione s(x) la funzione: $x\cup\{x\}$, cioè l'*unione*[17] degli insiemi x e {x}. Perciò si ha: $x_0=\emptyset$, $s(x_0)=\{\emptyset\}$, $s(s(x_0))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, $s(s(s(x_0)))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$, e così via. Si può facilmente dimostrare che con questa scelta, la quale impone dunque di rappresentare con tale successione di insiemi gli oggetti metamatematici spontanei 0, 1, 2, etc., le nove condizioni del paragrafo II.6 sono in effetti soddisfatte. Supponiamo che il nostro amico Antonio abbia fatto invece una scelta diversa: lo stesso $x_0=\emptyset$, ma una differente funzione s(x), precisamente:
$s(x)=x\cup\{x\}\cup\{x\cup\{x\}\}$. Egli ricava, così, la successione:

[17] L'*unione* di due insiemi A e B è un insieme che ha per elementi sia gli elementi di A che di B.

$x_0=\varnothing$
$s(x_0)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
$s(s(x_0))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\}$
....

la quale, in base alla nostra scelta, è interpretata come la progressione dei numeri pari: $x_0=0$, $s(x_0)=2$, $s(s(x_0))=4$, etc. Supponiamo che Antonio convenga di utilizzare la stessa nostra notazione 0, 2, 4, etc., per la sua progressione. Ora, per far sì che siano rispettate le nove condizioni che definiscono i naturali insiemistici, Antonio sceglie, come operazione +, la stessa che usiamo noi; mentre per l'operazione · segue il criterio di moltiplicare normalmente eppoi dividere il risultato per due ("normalmente", "dividere" e "due" si riferiscono alla nostra scelta). Con tali operazioni, si dimostra facilmente che anche l'insieme di Antonio soddisfa le suddette nove condizioni. Ad esempio, la condizione 6) è verificata per 4+18 (=22), che è il successivo di 4+16 (=20) nella progressione di Antonio, cioè dei numeri pari. La 8) è verificata per 18·6 (=54, cioè il normale risultato, 108, diviso 2) che effettivamente è uguale a 18+18·4 (=18+36=54). Antonio costruirà, allora, tutti i modelli *standard* a partire dalla sua successione. Saremmo tentati di dirgli che tutti i suoi modelli sono difettosi, perché sta trascurando i numeri naturali dispari. Ma ci inganneremmo. Il punto fondamentale è che *esiste sempre un isomorfismo tra due arbitrari insiemi che soddisfano le suddette nove condizioni*. La dimostrazione di ciò, formalizzabile in TI, non è difficile e si può reperire agevolmente in comuni testi. Nel nostro caso, è immediato verificare che la corrispondenza biunivoca stabilita visivamente da:

0, 1, 2, 3, 4, ………..n, …………
0, 2, 4, 6, 8, ………..2n, ……….

è un isomorfismo. Verifichiamo che le tre operazioni s(x), + e ·, sono *rispettate*. Per noi, s(n)=n+1. Applichiamo la *f* a n, ottenendo 2n, eppoi ancora la s(x) di Antonio, ottenendo 2n+2. Ebbene questo numero è proprio *f*(n+1). La condizione che caratterizza l'isomorfismo è quindi rispettata per l'operazione s(x). Per noi, n+m=h. Applichiamo la *f* a n e a m eppoi sommiamo normalmente (poiché per Antonio quest'operazione è identica alla nostra): si ottiene 2n+2m=2(n+m)=2h; effettivamente, il doppio di h, cioè *f*(h). È allora rispettata anche l'operazione +. Per noi, infine, nm=h; per Antonio, 2n·2m=4nm/2=2nm=2h, il doppio di h (dove il prodotto sottinteso è quello nostro, mentre quello indicato da "·" è il prodotto secondo Antonio). Pertanto, è rispettata anche la · e concludiamo che la *f* è un isomorfismo.

Ora, la conseguenza di ciò è che, volendo effettuare una qualunque operazione che coinvolga somme e prodotti di naturali del nostro modello, per esempio (3+28)16+(18x88), si può scegliere di applicare la *f*, lavorare nell'insieme di Antonio e poi applicare al risultato ottenuto la funzione inversa della *f*. Infatti: (6+56)·32+(36·176)=62·32+3168=992+3168=4160 è il doppio del risultato corretto: 2080. Ma si può anche fare di meglio: l'applicazione della *f* e della sua inversa si può realizzare istantaneamente con il banalissimo "trucco" di denotare con 0', 1', 2', etc., la progressione dei numeri pari. Posto, infatti, n'=2n per ogni n, si ha ovviamente che:

2n+2m=n'+m'=2(n+m)=(n+m)' e
2n·2m=n'·m'=(4nm)/2=2nm=(nm)'.

Ovvero, che un'operazione nell'insieme di Antonio si può realizzare attraverso un'operazione normale, cioè come quella nostra, sui denotanti 0', 1', 2', etc. In altri termini, se Antonio denota la sua progressione con 0', 1', 2', etc., egli può lavorare su tali simboli esattamente come lavoriamo noi con 0, 1, 2, ... etc.

Due diversi modelli, M ed M', di uno stesso Sistema assiomatico si dicono isomorfi se valgono le seguenti condizioni:

a) i corrispondenti universi, U e U' sono isomorfi;

b) l'isomorfismo, *f*, "conserva" le costanti; ovvero, dette M(c) e M'(c) le interpretazioni della costante c nei due modelli, si ha che *f*(M(c))=M'(c);

c) I due modelli hanno "le stesse verità". Più esattamente, dette v_1 e v_2 le *funzioni di verità* relative a ciascuno dei due modelli, si ha che, per ogni enunciato *e* della Teoria:

$v_1(e)$=V ↔ $v_2(e)$=V, ∀ *e*∈ E, ovvero:
$v_1(e)$=F ↔ $v_2(e)$=F, ∀ *e*∈ E

dove E è, appunto, l'insieme degli enunciati. Quest'ultima condizione si sintetizza dicendo che i due modelli sono *elementarmente equivalenti*.

Vedremo che due modelli possono essere *elementarmente equivalenti* e tuttavia non isomorfi.

Si può ora dimostrare immediatamente che ogni modello costruito da Antonio a partire dal suo insieme universo 0', 1', 2', ...etc., è isomorfo al corrispondente, nostro, costruito con 0, 1, 2, ...etc. La condizione a) è stata mostrata. Poi, alla generica costante s(s(..n volte..(x_0)...), Antonio associa 2n=n', mentre noi n; ed effettivamente *f*(n)=n' come richiesto dalla condizione b). Inoltre, abbiamo visto che le operazioni nel modello di Antonio, se si sceglie la denotazione 0', 1', 2', etc., conducono a risultati diversi dai nostri soltanto per l'apice (che, normalmente, non interviene nel concetto di verità!); pertanto, è possibile concordare con lui un unico valore di verità per gli enunciati di TI: vale anche la condizione c).

La domanda, a questo punto, è che differenza ci sia tra le progressioni 0, 1, 2, ...etc., e 0', 1', 2', ...etc., o, più in generale, tra due qualsiasi altri modelli isomorfi, nel rappresentare le proprietà genuinamente matematiche dei *numeri naturali metamatematici*. L'ovvia risposta è: nessuna. Se Antonio ri-denomina 0, 1, 2, ...etc., la sua progressione, svilupperà una Matematica *identica* alla nostra; la sola differenza è che, per lui, il numero 1 è rappresentato dall'insieme {∅,{∅}}, per noi, da {∅}; e analogamente per i successivi naturali. Si noti come entrambe le rappresentazioni siano indubbiamente insoddisfacenti dal punto di vista filosofico; non si vedono, pertanto, ragioni per preferirne una anziché un'altra[18].

[18] Il fatto che nel secondo caso, a differenza del primo, l'insieme che rappresenta "1" contenga *un* elemento non riveste, in sé, nessuna concreta rilevanza,

Tuttavia, nel prossimo paragrafo presenteremo una rappresentazione più appagante, anche se non del tutto. Ma il punto essenziale è che il compito di un linguaggio simbolico e privo di significato come quello matematico, *si esaurisce nel rappresentare mediante un simbolo* il concetto semantico di "numero 2" (per fare un esempio) *e nel riprodurne tutte le proprietà operative*. *Non ci può essere nient'altro* per le limitate capacità del linguaggio sintattico di un Sistema formale: chiaramente, esso è ben lungi dall'essere la sede appropriata per pienezze filosofiche.

Concludiamo, quindi, che *ogni* insieme che soddisfa le condizioni definitorie dei numeri naturali insiemistici può costituire un modello, isomorfo a ogni altro che le soddisfa, perfettamente soddisfacente per rappresentare i numeri naturali metamatematici dal punto di vista *operativo*; che è l'unico punto di vista pertinente al formalismo matematico. Tutti i modelli isomorfi sono tra loro equivalenti, indistinguibili, in tal senso. Ognuno di esso può chiamarsi *standard*.

II.12. I numeri dell'infinito

Per i nostri scopi è importante saper distinguere, a un livello elementare, i diversi tipi di infinito. I risultati che presenteremo in questo paragrafo furono scoperti da Cantor ben prima che la Teoria degli insiemi, da lui stesso introdotta, venisse assiomatizzata. Li esporremo nella forma più sintetica e intuitiva possibile: l'importante per noi è tener presente che questi argomenti possono ricevere, in TI, una formalizzazione completa in ogni dettaglio.

Supponiamo che tra due insiemi esista una *corrispondenza biunivoca*; per brevità, in tal caso, si dice anche che sono *equipotenti*. Se i due insiemi equipotenti sono *finiti*, sembra intuitivo che debbano avere "lo stesso numero di elementi". Ma in Matematica per definire qualcosa come "avere lo stesso numero di elementi" non si può evitare di ricorrere al concetto di

ovviamente. D'altra parte, anche altri modelli isomorfi usano rappresentazioni egualmente semplici, come: $0=\varnothing$, $1=\{\varnothing\}$, $2=\{\{\varnothing\}\}$, $3=\{\{\{\varnothing\}\}\}$,... etc.

corrispondenza biunivoca! In effetti, ciò non riflette una limitazione del linguaggio matematico, ma semmai un salto logico della nostra mente. Se lo pensiamo bene, l'operazione di contare gli elementi di un insieme, non è altro che uno stabilire una "corrispondenza biunivoca" con i numeri naturali! Abbiamo già adoperato questo criterio per definire una n-upla di insiemi (par. II.6). Dunque, per *definizione*, diremo che due insiemi A e B hanno lo stesso numero di elementi, ovvero lo stesso *numero cardinale*, se sono equipotenti, cioè se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro.

Apparentemente, TI permette una definizione formalizzata dei concetti semantici di *finito* ed *infinito*: un insieme A si dice *finito* se esiste un $n \in N$, tale che esiste una corrispondenza biunivoca tra A e {0, 1, 2, ... n}; quest'ultimo insieme viene definito rigorosamente in TI come il sottoinsieme di tutti i naturali insiemistici non maggiori di n (si usa il predicato ">"). Un insieme si dice *infinito* se non è *finito*, cioè se tale naturale non esiste. Vedremo che, purtroppo, questa definizione sintattica di insieme *finito* (ed *infinito*) non può riflettere appieno il significato semantico che diamo a tali concetti; ritorneremo su questa interessante e cruciale questione. Per gli insiemi infiniti succede qualcosa di apparentemente strano: essi sono equipotenti a sottoinsiemi *propri* (cioè sottoinsiemi diversi dallo stesso insieme; infatti è banale che ogni insieme può essere messo in corrispondenza biunivoca con sé stesso). Ad esempio, ecco una corrispondenza biunivoca tra l'insieme infinito N e i naturali pari (già osservata in precedenza):

1, 2, 3, ...n........
2, 4, 6, ...2n......

o tra N e i multipli di 3:

1, 2, 3, ...n........
3, 6, 9, ...3n......

e cosí via per infiniti altri sottoinsiemi propri di N. Si può dimostrare che questa è una caratteristica necessaria e sufficiente degli insiemi infiniti. In altre parole, gli insiemi infiniti potrebbero equivalentemente essere *definiti* come quelli che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio[19]. Per gli insiemi infiniti, allora, accade che esistono sottoinsiemi propri che hanno il loro stesso numero cardinale. I numeri pari, per esempio, sono "tanti quanti" tutti i naturali. Questo apparente paradosso non deve disorientare: tutto ciò è conseguente alla nostra definizione di "stesso numero di elementi", la quale, correttamente, coinvolge fatti esclusivamente tecnici (come l'esistenza di una corrispondenza biunivoca) e nessun principio semantico (come la *nozione comune* euclidea che "il tutto è maggiore della parte").

Si dimostra facilmente che l'equipotenza, per gli insiemi, si comporta, per fare un esempio geometrico, come il parallelismo per le rette. In particolare, se due rette sono parallele ad una terza, sono anche parallele tra loro. Tutte le rette possono allora essere considerate come divise in classi separate, ogni classe con tutte le rette aventi la stessa "direzione". Classi come queste, si chiamano *d'equivalenza* e risulta che *non sempre sono insiemi*. Le *classi* sono, comunque, degli oggetti matematici rigorosamente definibili in TI (sono i più basici oggetti che possiedono elementi-insieme: se una *classe* è elemento di un'altra *classe*, allora è un *insieme*). Ebbene, secondo il criterio insiemistico, ciascuna *direzione* si *definisce* proprio come ciascuna di tali classi. Allo stesso modo, tutti gli insiemi si possono raggruppare in classi separate, costituite da tutti gli insiemi tra loro equipotenti. Ciascuna di tali classi[20] si definisce *numero cardinale* o semplicemente *cardinalità*. Dunque, il "numero di elementi" di un insieme viene alla fine definito come la sua cardinalità, cioè la classe d'equipotenza a cui l'insieme appartiene. Tra i numeri cardinali si possono introdurre le relazioni d'ordine $<$ e $\leq$, mediante le quali ordinarli interamente[21]. Le cardinalità degli

---

[19] Per dimostrare tale equivalenza occorre l'assioma di scelta.

[20] E risulta che non sono insiemi! La definizione data si può, comunque, modificare per renderli insiemi. Ma non ci interessa approfondire.

[21] Se c_i e c_k sono due cardinali, si dice che $c_i < c_k$ se sono verificate: a) esiste un insieme I di cardinalità c_i equipotente a un sottoinsieme di un insieme K di cardinalità c_k; b) I e K non sono equipotenti. Senza la condizione b) si ottiene la definizione di $c_i \leq c_k$. Usando l'assioma di scelta si può dimostrare che quest'ultima relazione è *d'ordine totale*, cioè permette un ordinamento di tutti i cardinali.

insiemi *finiti* rappresentano i numeri naturali metamatematici 0, 1, 2, ...etc. È questa, probabilmente, la rappresentazione più appagante, dal punto di vista filosofico, che il linguaggio matematico può offrire per i numeri naturali intuitivi. Il numero "0" viene ad essere la classe d'equipotenza di tutti gli insiemi che non hanno elementi; "1" la cardinalità successiva, secondo il suddetto ordinamento, a "0" (ovvero la classe d'equipotenza di tutti gli insiemi che hanno un solo elemento; ma questo è solo un chiarimento semantico "circolare", mentre la precedente definizione non è "circolare"); "2" la cardinalità successiva a "1" e così via. Con tale definizione, le nove condizioni del paragrafo II.6 si verificano: non abbiamo scelto che un altro degli insiemi isomorfi che le soddisfano. Tuttavia, anche questa definizione matematica, verosimilmente immigliorabile, non può risolvere tutti i problemi, né esser priva di difetti epistemologici. Ad esempio, una critica insormontabile è dovuta alla già accennata inadeguatezza matematica del concetto di *finito*, rispetto al corrispondente concetto semantico (lo approfondiremo più avanti). Non essendo ineccepibile, tale definizione non può allora considerarsi prudentemente obbligatoria dal punto di vista epistemologico, pur essendo indubbiamente più soddisfacente di altre. D'altra parte, ribadiamo che il compito della Matematica si esaurisce nel rappresentare i naturali in modo operativamente soddisfacente; e a tale scopo non è necessario ricorrere alle cardinalità, ma è ugualmente valida un'altra qualsiasi scelta isomorfa[22].

Passiamo alle cardinalità degli insiemi *infiniti*. La cardinalità di N si chiama *cardinalità del numerabile* e si indica con $\aleph_0$ ("aleph con zero"). I numeri pari hanno dunque la stessa cardinalità $\aleph_0$ e si può dimostrare che lo stesso vale per qualunque sottoinsieme infinito di N. Ma esistono insiemi infiniti con cardinalità diversa da N? Poiché in TI si dimostra che esiste N, ne segue che esiste anche

[22] La definizione discussa si deve a Russell (che la riprende da Frege); ma la sua pretesa sull'opportunità di definire così i naturali, è più "tollerabile", in quanto egli fa riferimento alla Teoria ingenua (non formalizzata) degli insiemi. Così, le sue argomentazioni, pur soggette ai difetti che abbiamo accennato, mancano di velleità propriamente formale; e dunque equivalgono a un semplice suggerimento di precisione, giustificato dall'innegabile valore epistemologico del risultato.

P(N), l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi. Ebbene, P(N), ovviamente infinito, non ha la stessa cardinalità di N. Cantor dimostrò anzi che, per ogni insieme A, A e P(A) non hanno mai la stessa cardinalità. La dimostrazione informale, che, ricordiamo, può essere rigorosamente formalizzata in TI, è la seguente. Supponiamo per assurdo che esista una corrispondenza biunivoca tra A e P(A). Secondo tale corrispondenza, per esempio, all'elemento x_1 di A corrisponde un sottoinsieme X_1 di A. Ora, x_1 può appartenere o non appartenere a X_1. Consideriamo l'insieme H di tutti gli elementi di A che non appartengono al sottoinsieme di A che gli corrisponde secondo la corrispondenza biunivoca. Se indichiamo con X il sottoinsieme di A corrispondente al generico elemento x di A, H è il seguente:

$$H=\{x\in A(x\notin X)\}.$$

Ma H è anch'esso un sottoinsieme di A e come tale deve corrispondere a un elemento h di A. Chiediamoci se h appartiene a H. Se gli appartiene, allora non gli appartiene; se non gli appartiene, allora gli appartiene. Assurdo.

Si può facilmente dimostrare che, se A è un insieme finito di *n* elementi, allora P(A) possiede 2^n elementi, qualunque sia *n*. Conseguentemente, tale notazione si estende al caso in cui l'insieme è infinito: così, la cardinalità di P(N) si indica con $2^{\aleph_0}$.

Costruiamo adesso un'importante successione di cardinalità. In corrispondenza della seguente lista di insiemi di cardinalità diversa:

N, P(N), P(P(N)), P(P(P(N))), ...

si ha la seguente lista di cardinalità:

$$\aleph_0,\ 2^{\aleph_0},\ 2^{2^{\aleph_0}},\ ....$$

Possiamo poi ottenere nuovi numeri cardinali considerando l'unione di un insieme che appartiene a $\aleph_0$ con un insieme che appartiene a $2^{\aleph_0}$ e cosí via per tutte le cardinalità definite (dunque un'unione infinita). Si ottiene un insieme, correttamente definibile in TI, la cui cardinalità è maggiore di tutte la cardinalità menzionate. Indicando con Ω_0 la nuova cardinalità, si ottengono nuovi numeri cardinali considerando, analogamente a prima, gli insiemi delle parti dei nuovi insiemi. Ripetendo il ragionamento, otteniamo la "successione":

$$(1)\quad \aleph_0,\ 2^{\aleph_0},\ 2^{2^{\aleph_0}},.....\ \Omega_0,\ 2^{\Omega_0},\ 2^{2^{\Omega_0}},\ .....\ \Omega_1,\ 2^{\Omega_1},\ 2^{2^{\Omega_1}},........$$

dove Ω_1 è la cardinalità dell'insieme ottenuto dall'unione infinita di insiemi con le cardinalità precedenti, e così via. Usiamo le virgolette nel termine "successione" perché si conclude che tale collezione di cardinalità, quantunque queste ultime vengano definite come *insiemi* (come accennato in una recente nota), *non è un insieme* (né tanto meno una successione, cioè un insieme ordinato)[23]. La stessa cosa, del resto, vale per la collezione di tutte le cardinalità.

La "successione" (1) risulta già ordinata secondo la relazione d'ordine introdotta nei numeri cardinali. Ora, una domanda importante: la "successione" (1) contiene tutti i cardinali infiniti? La risposta "si", si chiama "ipotesi generale del continuo". La risposta "no", ammette che esistono insiemi con una cardinalità intermedia tra due termini successivi di essa. In particolare, l'ipotesi che tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$, cioè tra il numerabile e la cardinalità dei reali (come si può dimostrare), non vi siano altre cardinalità, si chiama semplicemente "ipotesi del continuo". Nel 1963, P. J. Cohen ha metadimostrato che tanto l'ipotesi generale del continuo, quanto la particolare, sono *indecidibili*. Questo fatto ha suscitato scalpore per una semplice ragione: nessuna chiara intuizione, cioè nessun intuitivo "modello" corretto di TI, sembra rendere l'ipotesi del continuo più plausibile della sua negazione. Si tratta evidentemente di un argomento

[23] Infatti, per qualunque *insieme*, anche infinito, di cardinali della (1), si può costruire, col metodo descritto, un altro *insieme* con una cardinalità maggiore di ogni cardinale contenuto nel primo insieme, ma che deve appartenere alla "successione" (1) per come questa è stata definita; dunque, nessun *insieme* di cardinali della (1) può contenere tutti i cardinali della (1) stessa. Un ragionamento del tutto analogo si può fare relativamente alla collezione ordinata di tutte le cardinalità.

complesso e difficile per la nostra comprensione (come del resto la stessa metadimostrazione di Cohen) che manifesta nebulosità circa i "modelli" di TI. Ripercorriamo le tappe: TI è stato costruito allo scopo di assiomatizzare l'intuitiva "collezione degli insiemi", la quale, pertanto, dovrebbe rappresentare lo spontaneo "modello" corretto della Teoria. Ma adesso ci si chiede: quale spontaneo "modello" di TI abbiamo in mente, quello per cui l'ipotesi (generale o particolare) del continuo è vera o uno fra quelli, affatto diversi, per cui è falsa? Evidentemente, gli intuitivi concetti insiemistici si rivelano troppo grossolani per sostituirsi pienamente alla realtà di uno qualsiasi dei "modelli" corretti di TI; ovvero, nessuno di questi ultimi è interamente spontaneo. Certo, non è escluso che nuove considerazioni possano far luce su questo argomento; due autori hanno già asserito che la negazione sarebbe più plausibile, ma i loro ragionamenti sono complessi (Woodin) o non convincono pienamente tutti (Freiling)[24]. A tutt'oggi, comunque, i "modelli" di TI si rivelano sfuggenti anche in altri temi, con le negative conseguenze di cui avremo modo di parlare.

Passando ora ad esempi concreti, l'insieme dei numeri razionali è numerabile. Ciò è dimostrato dalla seguente corrispondenza:

1	2	3	4	5	6	7	8	....
1/1	1/2	2/1	1/3	2/2	3/1	1/4	2/3	....

in cui i razionali sono ordinati per ordine crescente della somma tra numeratore e denominatore. I numeri reali, invece, non sono numerabili. La tecnica di dimostrazione informale di questo fatto (ma, al solito, pienamente formalizzabile in TI), dovuta a Cantor, è specialmente interessante. Consideriamo dapprima tutti i reali tra 0 e 1. Supponiamo, per assurdo, che esista una loro corrispondenza biunivoca con N, ovvero una lista che li enumera tutti:

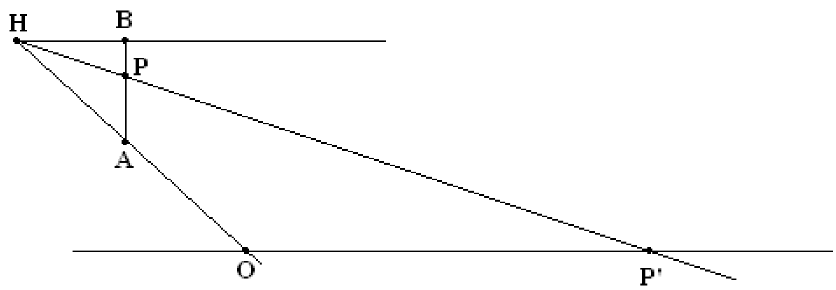
1. $0{,}\underline{1}086582\ldots.$

[24] C. Freiling, *Axioms of Symmetry: throwing darts at the real line*, Journal of Symbolic Logic n. 51, p. 190-200 (1986) e H. Woodin, *The Continuum Hypothesis*, Notices of the AMS, Vol. 48, n. 6, p. 567-576 e n. 7, p. 681-690 (2001).

2. 0,3490776….
3. 0,4330991….
4. 0,9088125….

in cui abbiamo sottolineato le cifre della diagonale, cioè la prima cifra decimale della prima, la seconda della seconda, etc. Consideriamo allora un numero reale ottenuto scrivendo dopo "0," cifre decimali *diverse* da quelle sottolineate, per esempio: "0,0529…". Ebbene, tale numero è diverso da ogni numero della lista: esso differisce dal generico numero di posizione k per la sua k-esima cifra decimale, per costruzione. Assurdo. Dunque, i numeri reali tra 0 e 1 non sono numerabili.

Essi sono però equipotenti con *tutti* i reali! Risulta infatti che i punti di un segmento di lunghezza arbitraria sono equipotenti con i punti di una retta, di un piano, perfino di uno spazio di qualsiasi dimensione! Lo stesso Cantor si sorprese di queste conclusioni (famoso, in una lettera a Dedekind, il suo: "lo vedo ma non ci credo"). Un esempio dimostrativo di questi "strani" risultati è illustrato dalla seguente figura, in cui si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento AB e una semiretta di origine O ad esso ortogonale.



Ad ogni punto P del segmento è associato l'unico punto P' di intersezione della retta PH con la semiretta. Al generico punto P' della semiretta è associato l'unico punto P di intersezione della retta P'H col segmento AB. Il segmento AB ha tanti punti quanti la semiretta!

Infine, Cantor dimostrò anche che la cardinalità dei numeri reali è proprio quella di P(N), cioè $2^{\aleph_0}$.

II.13. I numeri della metamatematica

Discutiamo ora le caratteristiche del linguaggio metamatematico alla luce delle ultime considerazioni. Ricordiamo che la metamatematica è stata genericamente definita come un linguaggio semantico che obbedisce a elementari principi di "rigore e logica comune" non oltre precisabile; quindi, con un grado di ambiguità impossibile da dipanare completamente, come abbiamo spiegato. Ma il momento è opportuno per aggiungere dell'altro.

Cominceremo col chiederci: quante sono le espressioni significative del linguaggio metamatematico? La semantica si caratterizza per la sua capacità di denotare con un *signum* ogni ente o concetto che abbia un significato. Se un oggetto di un qualunque tipo ha un significato, possiamo denotarlo con un segno convenuto, come la lettera A. Anche "la collezione di tutte le espressioni semantiche" è un'espressione significativa che denotiamo con S. Allora S conterrebbe sé stesso; ciò è una prima indicazione del fatto che S non è un *insieme*, come c'era da aspettarsi. Ma ciò non toglie che, semanticamente, possa ancora discutersi del suo "numero" di elementi. Supponiamo che esista un certo insieme I con una cardinalità, cioè un numero di elementi, superiore a S. Ciò verrebbe a dire che esiste almeno un elemento di I che non può essere denotato, rappresentato con un segno. Ma ciò è assurdo. Si tratta, evidentemente, di un tipo particolare di assurdo metamatematico, diremmo di tipo epistemologico. Se tale elemento (che poi è un *insieme*, quindi un oggetto propriamente matematico) esiste ed ha un *significato* non c'é nulla che può impedirci di *significarlo* con A. Ci sono, è vero, delle eccezioni di natura paradossale, come abbiamo osservato alla fine della prima Parte (par. I.12) con il caso di un "oggetto non ancora denotato": è denotabile? Casi simili, comunque, possono escludersi senza troppe difficoltà: in essi, il tempo interviene esplicitamente nella costituzione del significato; una circostanza che interessa il mondo reale ma non l'usuale Matematica. Tuttavia, osserveremo presto altri paradossi.

Dunque, il numero di espressioni semantiche non è inferiore a nessuna cardinalità. Questo è anche un altro argomento circa il fatto che S non è un insieme: infatti se lo fosse, avrebbe una cardinalità e ogni cardinalità è minore di (infinite) altre cardinalità. In un certo senso, il "numero" di elementi di S è il più grande che possa immaginarsi; certo, non un numero matematico, cioè rappresentabile in un Sistema assiomatico formale. Non si è ancora convenuto alcun nome per tale numero; noi proponiamo quello di *iperinnumerabile*.

Approfittiamo per segnalare che anche alla *collezione di tutti gli insiemi* sembra legittimo assegnare l'*iperinnumerabilità*. Il ragionamento è analogo: nessun insieme può avere una cardinalità maggiore di questa collezione. Per assurdo, degli elementi di un tale insieme, che sono ancora insiemi, non apparterrebbero a detta collezione.

Vogliamo insistere con altri esempi circa l'*iperinnumerabilità* delle proposizioni della metamatematica, perché essa sembra in contrasto con diverse argomentazioni apparentemente sensate, tanto più essendo l'argomento inspiegabilmente trascurato, con rarissima eccezione, dagli esperti di Logica.

La normale convenzione sottintesa circa la rappresentazione scritta di un qualunque linguaggio, semantico o no, è che esso sia esprimibile mediante i soli, *finiti*, simboli alfa-numerici. Nel seguito, salvo esplicita indicazione, *per qualsiasi linguaggio supporremo sempre che esso usi una quantità finita di simboli*. In effetti, ciò significa limitarsi a quei Sistemi in cui ogni proposizione è rappresentabile mediante dei simboli la cui definizione, in base a quanto osservato all'inizio della prima Parte, non richiede semantica: basta un elenco.

L'insieme di tutte le possibili sequenze ordinate finite che usano un numero finito di simboli si può facilmente dimostrare numerabile, in TI. Poiché una frase è costituita da una sequenza finita di simboli, si direbbe che anche il numero totale di frasi di un qualsiasi linguaggio, simbolico o semantico, è numerabile. Come si spiega l'apparente contraddizione con le precedenti considerazioni? Con il fatto che un linguaggio semantico può essere in grado di associare più significati ad uno stesso simbolo o sequenza di simboli. La frase "l'affare non va" può significare un numero a priori illimitato di cose diverse, includendo allusioni economiche, metaforiche, psicologiche, erotiche, etc., tutte chiarite dal contesto. In termini più rigorosi, in un linguaggio semantico, una medesima sequenza di caratteri può rappresentare più frasi significative. La lettera A o x ha indicato e indicherà un numero enorme di oggetti differenti in Matematica, senza che ciò comporti necessariamente alcun serio disguido. Il "contesto" chiarificatore, a ben pensarci, è un riferimento circolare, dichiarato o sottinteso, del linguaggio su sé stesso; il linguaggio semantico può infatti fare autoriferimenti, fino al punto di ridefinire ad arbitrio i significati e le regole sintattiche che esso stesso usa.

Tale possibile autoriferimento, nei linguaggi semantici, può dar luogo a paradossi. Quello che abbiamo velocemente citato nel paragrafo I.8, "questo enunciato è falso", è noto come *paradosso del mentitore* e può essere riformulato in diverse versioni. Il problema è che questa proposizione non può essere né vera né falsa, pena assurdo semantico. Nello stesso paragrafo abbiamo anche accennato che una regola deduttiva che menzioni la coerenza (o l'incoerenza) del Sistema può risultare paradossale. Esempio: una regola che genera una contraddizione se il Sistema è coerente. Abbiamo poi visto il paradosso di Russell. L'assiomatizzazione del concetto di *insieme*, naturalmente, non lo elimina, ma stabilisce la convenzione di proibirlo per tale termine; esso può ancora ripresentarsi con altri termini, come "collezione". Ce ne sono di infiniti altri. "Definiamo il minimo numero naturale non definito da questa proposizione". Se tale espressione definisce un qualsivoglia numero naturale, allora non lo definisce; assurdo. Quindi, non ne definisce nessuno; ma allora... definisce il numero "0", ancora assurdo. Abbiamo già osservato che in un linguaggio semantico, a differenza di uno matematico (classico), non c'è motivo di ritenere come catastrofica la presenza di alcune assurdità; ma pure, quale dev'essere il nostro atteggiamento verso di esse? Si possono risolvere in qualche modo? Ci indicano qualcosa?

Russell, in tempi in cui la distinzione tra linguaggio matematico e metamatematico non era ancora popolare, fu indotto a tentare di rifiutare sempre l'autoreferenzialità. Egli stesso si accorse non molto tempo dopo che ciò era inattuabile e che d'altra parte non era poi così temibile. Le cosiddette *definizioni implicite* di un ente matematico si realizzano, come abbiamo visto in parecchi esempi, mediante il soddisfacimento di una serie di espressioni che menzionano l'ente. Propriamente, tali definizioni autoreferenziali avvengono solo su un piano metamatematico, quindi semantico. Come esempio emblematico, consideriamo le condizioni insiemistiche 1)-9) che definiscono implicitamente l'insieme dei numeri naturali (par. II.6). In linguaggio metamatematico si direbbe qualcosa come: "definiamo insieme dei numeri naturali, N, un insieme che soddisfa le seguenti condizioni: 1) $x_0 \in N$ etc.". La definizione è autoreferenziale perché le condizioni menzionano lo stesso N che si sta definendo. In alcuni casi la menzione si può eliminare; ad esempio, dicendo "N ha x_0 per elemento... ", si elimina il riferimento a N nella condizione 1). Ma si osservi come sia impossibile eliminare il riferimento a N nella condizione 9), il principio di induzione. Quali problemi potrebbe causare tale circolarità? Da un punto di vista puramente sintattico tale definizione non produce alcun effetto; cioè, non ha alcuna conseguenza sulle proposizioni del Sistema. L'unico fatto propriamente matematico è che le regole del Sistema permettono di dedurre la stringa "$\exists N$ ($x_0 \in N$ *e* $\forall x \in N$ (…etc…". In essa, la lettera "N" può, ovviamente, essere sostituita da una qualsiasi altra. Che poi si convenga di indicare con "N" un insieme in cui le suddette condizioni si sottintendono soddisfatte, è un'esigenza che non riguarda né condiziona il linguaggio propriamente matematico. Se le cose stessero sempre cosí, si concluderebbe che il problema che stiamo studiando è nel fondo banale; infatti, anche se l'autoreferenzialità fosse viziosa, essa non potrebbe mai essere in grado di nuocere al linguaggio matematico. La sua irregolarità resterebbe confinata nell'ambito metamatematico che le è proprio e non potrebbe contaminare il linguaggio matematico. Poiché è quest'ultimo quello che alla fine interessa, ne concluderemmo che le definizioni con circolarità sono semplici espedienti volti a facilitare la comprensione semantica di alcuni enti e concetti e quindi sempre innocuamente viziosi, se viziosi.

Ma purtroppo non è sempre così. Infatti, risulta che – sorpresa – la regola deduttiva del *modus ponens* è autoreferenziale[25]! Ed essa influisce attivamente (eccome!) sul linguaggio matematico, perché genera dei teoremi. Consideriamo per semplicità un Sistema assiomatico in cui esiste solo la regola del *modus ponens*. La sua traduzione, in termini che non lasciano sottintesi, è la seguente: "se A è un assioma o un teorema e A→B è un assioma o un teorema, allora B è un teorema". Pertanto, essa definisce l'insieme dei teoremi in modo autoreferenziale: "si dice che B è un teorema se A è un assioma o un teorema e A→B è un assioma o un teorema". Non resta che prendere il toro per le corna; ma dopotutto queste ultime non sembrano in grado di provocare ferite mortali. Se si conviene di ignorare termini non ancora definiti, il *modus ponens* stabilisce un criterio assolutamente inequivocabile per generare teoremi. Quando lo si applica per la prima volta, basterá limitarsi a considerare i soli assiomi, anziché sforzarsi (senza riuscirci) di individuare anche gli oggetti, ancora indefiniti, chiamati "teoremi". Una volta fatto, si disporrà di alcuni teoremi e potranno formarsene altri. Che si possieda il buon senso di sorvolare su termini non ancora definiti o che non ci siano teoremi ottenibili diversamente, quando si applica il *modus ponens*, è una convenzione taciuta. D'altronde, non si è ancora saputo trovare un'alternativa ad esso... Anche solo a causa di tale "innocente" ma indiscutibile ambiguità, la *buona definizione* per un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine, è una questione, appunto, più di *convenzione* che di deduzione metamatematica (par. I.9).

In linguaggio semantico esistono dunque circolarità cattive (cioè paradossi) e buone; e alcune delle seconde sembrano indispensabili in Matematica[26]. Dobbiamo quindi presumere che la metamatematica, intesa come un linguaggio semantico "accorto", riesca sempre a riconoscere una definizione autoreferenziale viziosa

[25] Sorpresa, ma non troppo: avevamo già visto che la formalizzazione del *modus ponens* dà luogo a una definizione implicita dell'insieme dei teoremi T.

[26] Anche la definizione della collezione delle proposizioni di un Sistema assiomatico classico è autoreferenziale e, ovviamente, attiva sul linguaggio matematico. Altri esempi possono riguardare le regole assiomatiche *proprie* dei diversi Sistemi classici.

e metterla da parte; ma ovviamente non può aversi una certezza propriamente matematica di ciò. Alle precedenti domande risponderemo semplicemente che i paradossi semantici sono inevitabili e ci indicano che il linguaggio semantico in essi usato non può essere assiomatizzato, cioè ridotto a matematico, cosí com'é.

Consideriamo ora il seguente argomento. "Sia dato un linguaggio qualsiasi (ricordiamo, con un numero finito di caratteri). L'insieme di tutte le proposizioni simboliche con meno di 100 caratteri è finito. Di esse, alcune definiscono numeri naturali, come <<il numero che sommato a 5 fa 7>> (che ha 30 caratteri, inclusi gli spazi). Consideriamo l'insieme di tutte le proposizioni simboliche con meno di 100 caratteri che definiscono numeri naturali. Tale insieme è finito e definisce sempre un numero finito di numeri naturali. Sia m il più grande di tali numeri. Allora la proposizione <<il numero naturale successivo al più grande definibile con meno di 100 caratteri>> definisce il numero naturale m+1 e ha meno di 100 caratteri (per l'esattezza 80). Assurdo". Esso è noto come "paradosso di Berry", ma non si tratta davvero di un paradosso, se con tale termine intendiamo un assurdo inevitabile (che è ciò che abbiamo convenuto). Soffermiamoci sull'affermazione "tale insieme è finito e definisce sempre un numero finito di numeri naturali". Cosa si intende qui per "definisce"? Se il linguaggio è semantico può essere capace di definire con poche frasi un numero anche infinito di enti matematici; un esempio si ha nella stessa definizione di un qualsiasi Sistema assiomatico formale (non banale), in cui, servendosi di metamatematica, vengono definiti infinite proposizioni e teoremi. Gli stessi, infiniti, numeri naturali sono, evidentemente, definiti mediante un numero finito di caratteri; si ammetterà che è cosí se si ammette che è possibile definirli! Ci si sta riferendo, dunque, a un tipo limitato di "definizione", un tipo in cui non sono ammesse "circolarità" o retrospezioni. L'ultima frase del "paradosso", invece, definisce un numero usando una retrospezione, cioè con criterio differente. Si confondono, pertanto, diversi livelli d'interpretazione. Un esempio concreto chiarirà del tutto la questione. Se si usano i caratteri alfa-numerici, le possibili sequenze ordinate di tali simboli con una lunghezza minore di 100 caratteri sono tantissime, ma finite. Supponiamo di voler definire, mediante alcune di tali combinazioni, un numero finito di numeri naturali. Il criterio per farlo può variare ad arbitrio, dipendendo dalla lingua usata e/o da ogni altra nostra preferenza. Per esempio, è probabile che si decida di assegnare ogni stringa del tipo "00...01" al numero 1, cioè al successore di 0. Anche "il successore di 0", se siamo italiani, sarà probabilmente considerata una definizione di 1. Uno stesso numero, dunque, potrà avere più di una definizione; mentre, per semplicità, possiamo stabilire che ogni proposizione definisca al più un solo numero naturale[27]. Immaginando di passare in rassegna tutte le possibili combinazioni, è del tutto probabile che ne scarteremo parecchie: alcune, in quanto prive di un significato convenuto (come <<ahT_l&Kak>>), altre perché si riterrà che non definiscono numeri naturali (come <<il gatto non ha digerito il topo>>). Ovviamente, nulla ci vieta di convenire che certe stringhe più o meno strane, come <<il mio numero fortunato>> o <<il numero dei vizi capitali>> definiscano certi numeri naturali. Prima o poi, ci imbatteremo nella misteriosa sequenza: <<il numero naturale successivo al più grande definibile con meno di 100 caratteri">>. Che fare? Ammetteremo che Antonio decida di non associarvi alcun numero, mentre Francesca, forse in base a certi studi, la considererà la definizione di un determinato naturale, per esempio di 239987. Terminato il nostro lavoro, riconsideriamo la frase convenendo che il suo termine "definibile" si riferisca, appunto, al nostro lungo e meticoloso lavoro. Se si ammette così, essa definisce adesso un indiscusso naturale, sia per Antonio che per Francesca. Il punto fondamentale è che, per entrambi, *la frase possiede ora un valore semantico differente* da quello prima considerato: infatti Antonio non vi aveva associato alcun numero, mentre Francesca un numero che, come si può immediatamente riconoscere, non può essere lo stesso. Per entrambi, non c'è modo di correggere le convenzioni in modo da far coincidere i due numeri, ovvero i due diversi valori semantici.

In altri termini, il "paradosso di Berry", lungi dall'essere un vero paradosso, è un chiaro segnale che un linguaggio semantico può possedere distinti livelli interpretativi, come avevamo già affermato.

[27] Ma, in ciò che segue, non cambierebbe assolutamente nulla se invece definisse un numero qualsiasi, purché *finito*, di numeri naturali.

Se nel "paradosso di Berry" intendiamo per "definizione", ovunque appaia, il concetto semantico più ampio possibile, cioè tutti i possibili modi di definizione, si ottiene una metadimostrazione per assurdo (semantico) del fatto che un numero finito di proposizioni simboliche è capace di definire, mediante l'intervento della semantica, un numero infinito di numeri naturali. Ma quante devono essere, almeno, tali proposizioni simboliche per poterlo fare? Di quanto può essere abbassato il numero 100? Non si vedono criteri logici che possano caratterizzare tale numero minimo. E in effetti non ne esistono! Un solo carattere, come "a", può rappresentare un qualsiasi prefissato numero e, se lo conveniamo, può rappresentarne più d'uno. Ad esempio, possiamo convenire che rappresenti sia 3 che 8774; si pretenderà di capire dal contesto, ogni volta che appaia "a", se esso indica 3 o 8774. Ma può anche rappresentarne infiniti. Pensiamo a quante rette diverse indica la lettera "r" in un comune libro di Geometria o più in generale nell'intera letteratura matematica. Perché dovrebbe esserci un limite a tale numero? Finché il contesto chiarisce di quale retta stiamo parlando, non c'é alcun problema. Certo, l'inevitabile prezzo pagato è il pericolo di confusione; ma in ambito semantico tale rischio può sussistere. In generale, più oggetti sono rappresentati dalla stessa sequenza, maggiore è il grado di significatività (e di possibile confusione[28]) della lingua. Così, in principio, un solo simbolo sarebbe sufficiente per denotare individualmente ciascun numero naturale o reale o elemento di un qualsiasi insieme o collezione arbitrariamente grande, come quella stessa di tutte le espressioni semantiche S. Naturalmente, questo rappresenta il caso limite esasperato. I contesti interpretativi variabili normalmente usati dalla metamatematica non hanno alcun bisogno di essere rischiosamente ambigui: ciò, anzi, non è mai conveniente né opportuno. Di solito, in effetti, non ci sono difficoltà per renderli meno equivocabili arricchendo e raffinando il vocabolario.

Il "paradosso di Richard", è un altro pseudo-paradosso della stessa specie. In esso si suppone che i numeri reali compresi tra 0 e

[28] E, aggiungiamo, di fascino, pensando al greco antico. Certo, col trascorrere del tempo, le lingue si specializzano e si arricchiscono di vocaboli, guadagnando in precisione, ma anche in "freddezza".

1, *definibili tramite definizioni individuali*, siano numerabili e se ne fa una lista. Poi si definisce un numero reale tra 0 e 1 con il medesimo criterio della diagonale di Cantor, prima descritto. Il numero reale suddetto non sta nella lista eppure è stato definito, assurdo. Di nuovo, non si tratta di un vero paradosso: quando si ammette che *tutte* le definizioni individuali sono numerabili, si assume per esse un tipo di semantica limitato, che equivale ad una semplice denotazione. Poi, invece, si tira fuori una definizione di carattere irriducibilmente retrospettivo: essa, per funzionare, deve riferirsi, guardandola dall'esterno, all'intera lista considerata; e, pertanto, non può farne parte. In altri termini, dev'essere di un diverso tipo logico rispetto a quelle della lista. Nuovamente, l'assurdo deriva dalla confusione di tali differenti valori semantici del verbo "definire". Analogamente al precedente pseudo-paradosso, se le definizioni vengono sempre considerate nel senso semantico più ampio, il "paradosso di Richard" può essere letto come una metadimostrazione del fatto che le definizioni semantiche individuali non sono numerabili e quindi sono in grado, almeno teoricamente, di definire un numero di oggetti superiore al numerabile (come i numeri reali): una medesima stringa, diversamente interpretata, può essere usata per definire un numero a priori illimitato di numeri. Un ragionamento più solido di quello epistemologico fatto all'inizio del paragrafo; ma anche meno generale, in quanto non esclude la possibilità che il numero delle espressioni semantiche sia un altro cardinale superiore a $\aleph_0$. Ma è probabile che su questa linea possa realizzarsi una metadimostrazione generale.

Ovviamente, un particolare linguaggio semantico può avere un qualunque numero inferiore all'*iperinnumerabile* di proposizioni: di una qualunque cardinalità (innumerabile o numerabile) e anche finito. D'altra parte i Sistemi formali, il cui linguaggio non è semantico, hanno un numero di proposizioni finito o infinito numerabile, come osserveremo presto. Dunque, un linguaggio con un numero di proposizioni finito o infinito numerabile, può essere sia formale che semantico. Invece, un linguaggio che consta di un numero di proposizioni superiore al numerabile, è necessariamente semantico. Infatti, se possiede un numero finito di simboli, può adoperare solo una quantità numerabile di stringhe finite. Dovendo con esse formulare un numero superiore a $\aleph_0$ di proposizioni, deve essere capace di associare più di una proposizione ad una medesima sequenza finita di simboli (ovvero, adottare un contesto interpretativo variabile); ma ciò può farsi solo assegnando *valori diversi* alla stessa stringa. Ciascun *valore* costituisce[29], appunto, un *significato* e la sua assegnazione, l'interpretazione semantica. Si noti come l'*ineliminabilità* di tale valore semantico derivi proprio dall'obbligatorietà di differenziare una medesima stringa in più frasi significative. In altri termini, l'uso di un contesto interpretativo variabile rappresenta l'aspetto logico caratteristico della semantica intrinseca, cioè non eliminabile.

Ricordando i risultati del paragrafo precedente, possiamo dunque affermare che la Teoria TI è in grado di operare sintatticamente su oggetti la cui natura intrinseca è semantica: gli insiemi innumerabili; tuttavia, con delle limitazioni, come evidenzieremo nei prossimi paragrafi.

II.14. I numeri dei Sistemi assiomatici classici

Quante sono le proposizioni e i teoremi di un Sistema classico? La risposta *formale* alla domanda richiede di rappresentare il Sistema in TI: solo qui la cardinalità è un concetto formalizzato. Per brevità, diremo che un Sistema classico è *numerabile*, se l'insieme delle sue proposizioni è numerabile. In un Sistema numerabile, l'insieme dei teoremi non può che essere o numerabile o finito (un caso banale che, come già detto, possiamo escludere). Invece, in un Sistema innumerabile (cioè in cui l'insieme delle proposizioni è innumerabile), l'insieme dei teoremi potrebbe essere numerabile. Tuttavia in questo caso è sempre possibile considerare un Sistema numerabile S' (e *ben definito* se lo è S), che abbia gli stessi teoremi di S. Ad esempio, si può definire S' in modo che le sue proposizioni coincidano con i teoremi di S e dotato delle stesse regole deduttive di S. S' può allora sostituire perfettamente S, se quello che interessa

[29] Verrebbe di aggiungere "per definizione", ma chiaramente sarebbe presuntuoso.

del Sistema è il suo ambito deduttivo. In altri termini, lavorare in S rappresenterebbe una complicazione praticamente inutile, che ci obbligherebbe a differenziare la cardinalità *proposizionale* da quella *deduttiva*, senza alcun risvolto speciale circa l'ambito deduttivo del Sistema, che è quello di concreto interesse. Per ragioni di semplicità, pertanto, nel seguito supporremo sempre che la cardinalità (numerabile o innumerabile) di un Sistema sia determinata dalla cardinalità dell'insieme dei suoi teoremi; ovvero, che coincida con la *cardinalità deduttiva*.

Se si rappresenta un qualsiasi Calcolo predicativo classico formale del primo ordine in TI, si dimostra facilmente che gli insiemi delle proposizioni, P, e dei teoremi, T, sono numerabili. Infatti, essi sono sottoinsiemi dell'insieme di tutte le sequenze ordinate finite dei caratteri ammessi nel Sistema: senz'altro un insieme numerabile, visto che il numero dei caratteri è finito e che alle stringhe non può assegnarsi significato. Un generico Sistema classico, modificherà gli insiemi P e T con le premesse *proprie*; in particolare T mediante gli schemi assiomatici che esso aggiunge alle regole deduttive classiche. Nella rappresentazione insiemistica del Sistema, tali schemi assiomatici si traducono in enunciati di TI e pertanto sempre al primo ordine, qualunque sia l'ordine espressivo di essi nel Sistema originario. Supponiamo che ne risulti un insieme di assiomi, e quindi di teoremi T, innumerabile. Se ne concluderebbe, per quanto osservato nel precedente paragrafo, che solo un linguaggio semantico potrebbe enunciare tutti i teoremi. Dunque il Sistema classico considerato deve ammettere semantica per le sue proposizioni e pertanto *non può essere formale*. Abbiamo già osservato, inoltre, che tale semantica, dovendo adottare un contesto interpretativo variabile, è *ineliminabile*. Per questa ragione, diremo che i Sistemi classici innumerabili sono *intrinsecamente* semantici.

Viceversa, non è detto che un Sistema classico numerabile sia necessariamente formale: infatti, le proposizioni possono possedere un valore semantico indipendentemente dal loro numero cardinale, incluso nel caso in cui esso sia finito.

La scelta di allargare il campo di rappresentabilità in TI ai Sistemi classici innumerabili si chiama (forse infelicemente) della *Semantica standard*. Purtroppo, quasi mai viene chiaramente precisato che essa implica, appunto, di rappresentare insiemisticamente anche Sistemi assiomatici necessariamente *non formali*, perché con ineliminabile semantica nelle loro proposizioni. Tipicamente, e lo esemplificheremo presto, la definizione in TI di un certo sottoinsieme innumerabile dell'insieme dei teoremi (in particolare, di assiomi, in base alla convenzione fatta) di un Sistema classico di questo tipo, si realizza mediante una sequenza della forma "...$\forall$ A$\in$ I...", dove I è un insieme innumerabile. La convenzione, fedele ai principi dell'assiomatica formale, di limitarsi alla considerazione dei soli Sistemi classici *formali* e quindi numerabili, si chiama invece (ancora meno felicemente) *Semantica generale* (o *di Henkin*)[30]. Non è che in essa, ovviamente, si proibiscano espressioni di tale tipo (che sono perfettamente corrette e formali); è semplicemente il loro uso in ambito definitorio dell'insieme dei teoremi o delle proposizioni di un Sistema assiomatico che non può ammettersi, qualora tale Sistema sia stato, appunto, supposto formale.

Quale delle due Semantiche "ha ragione"? Se si è seguito quanto detto, la domanda corretta sarebbe piuttosto: perché si deve considerare la *Semantica standard*? A cosa serve? La risposta è, in un certo senso, irridente: non solo i Sistemi innumerabili sono i più antichi, ma, nella pratica, essi continuano ad essere i più usati. Consideriamo, come esempio importante, la *Teoria aritmetica integrale*. In tale Sistema assiomatico classico (che abbrevieremo con AI), per il resto identico a PA, il principio di induzione si generalizza cosí:

"*nell'espressione seguente:*

(A(0) *e* $\forall$ x((A(x) *e* $\underline{\text{S}}$(x,y))$\rightarrow$A(y))) $\rightarrow$ $\forall$ xA(x)

sostituendo ad A(x) una qualsiasi proprietà di x, si ottiene un assioma".

È chiaro che se diciamo "qualsiasi proprietà", includiamo anche proprietà non esprimibili nel Calcolo predicativo classico del primo ordine con uguaglianza; ad esempio, facenti uso di espressioni di ordine superiore al primo. Ma, più criticamente, anche proprietà

30 In realtá, la sua usuale definizione è diversa. Tuttavia, dovrebbe essere equivalente definirla in questi termini.

specificamente semantiche di numero senz'altro *iperinnumerabile*. Pertanto, si può già arguire che il Sistema sarà innumerabile e dunque intrinsecamente semantico e non formale. Ma esso è l'originario Sistema per i naturali, introdotto, indipendentemente, da Dedekind e da Peano. TI ci permette di rappresentarlo, anche se parzialmente, nei sensi che preciseremo. Anzitutto, bisogna formalizzare il concetto di *proprietà* A(x), rendendolo il più generale possibile. Seguendo l'esempio dei *predicati*, sembra indubbio che alla formulazione di una qualsiasi *proprietà* dei numeri naturali, debba farsi corrispondere una loro sotto-collezione. Chiaramente, l'ipotesi di base è che tale sotto-collezione sia esprimibile in linguaggio insiemistico, cioè che sia propriamente un *sottoinsieme*. Inoltre, dovendo generalizzare il più possibile, sembra spontaneo imporre anche il viceversa, cioè che *un qualsiasi sottoinsieme di naturali rappresenti una proprietà*: quella che caratterizza ogni elemento che vi appartiene. Pertanto, la *proprietà* A(x) di cui si parla nella regola induttiva *integrale* (normalmente chiamata *induzione completa*), si farà corrispondere con un *arbitrario sottoinsieme dell'universo*. Da qui deriva la prima inevitabile limitazione della rappresentazione in TI del Sistema, che riduce la sua *iperinnumerabilità*, non trattabile in linguaggio matematico, a una cardinalità innumerabile ($2^{\aleph_0}$, come vedremo); ma più avanti ne scopriremo un'altra. Confermeremo che tale corrispondenza impone di considerare non soltanto le usuali proprietà formali [di cui sono esempi: "divisibilità per 2 (il sottoinsieme dei numeri pari)", "che sommati a 3 diano 8" (il sottoinsieme {5}), "dei numeri primi pari maggiori di 2 (il sottoinsieme vuoto) "dei numeri pari che soddisfano la congettura di Goldbach" (un sottoinsieme ancora sconosciuto, ma un sottoinsieme formale)], ma anche proprietà non esprimibili con simboli privi di significato: esprimibili, dunque, con un linguaggio metamatematico intrinsecamente semantico.

Cominciamo a definire l'insieme dei teoremi, T, di questa Teoria. Ai suoi assiomi corrispondono le condizioni definitorie:

(1) $(\exists^*, x^*,(^*,x^*, =^*,0^*,)^*) \in T$
(2) $(\forall^*, x^*, (^*,\exists^*, y^*, (x,y)_S,)^*) \in T$

(3) $(\forall\ *,\ x^*\ ,\ (x,y)_S,\ \rightarrow*,\ y^*, \neq *,\ 0^*) \in T$
....
....
....

dove, per completezza, abbiamo introdotto un simbolo-insieme anche per le parentesi (le quali, ricordiamo, non sono necessarie). Ai fini di generalizzare il principio di induzione ad un arbitrario sottoinsieme (A) dell'universo (U), possiamo intanto stabilire il criterio di indicare con la sequenza "A,(*,x*,)*" la proprietà corrispondente al fatto che x* appartenga ad A. Tale convenzione grammaticale rende innumerabile l'insieme delle proposizioni di AI (infatti, scopriremo presto che risulta U=N). Inoltre, per far sì che la nuova sequenza sia equivalente alla vecchia sequenza dei simboli-insieme che esprime, in tutti i casi in cui è possibile, la proprietà, possiamo convenire il seguente schema assiomatico "di comprensione":

$$(\forall\ *,x^*,(\ *,A^*(x^*),\leftrightarrow *,A,(*,x^*,)^*,\ )^*) \in T,\ \ \forall\ A^*(x^*) \in P_1$$

dove $A^*(x^*)$ è la sequenza dei simboli-insieme che esprime la proprietà, P_1 l'insieme di tutte le proposizioni formali di AI (in concreto, tutte e sole quelle definite *prima* di stabilire la possibilità della nuova sequenza) con almeno una variabile libera (chiamata x*) e A l'insieme: $A=\{x^* \in U(A(x^*))\}$, in cui $A(x^*)$ è l'espressione *insiemistica corrispondente* a $A^*(x^*)$[31].

[31] Il lettore potrebbe, giustamente, dubitare della formalizzabilità in TI della *corrispondenza insiemistica* e dunque dell'intero schema assiomatico appena abbozzato. A tale scopo, piuttosto che cimentarsi con il complicato linguaggio di TI (pur nella sua forma ingenua) possiamo ricorrere a una scappatoia: nella terza Parte (par. III.3) vedremo che il linguaggio di TI è capace di rappresentare logicamente il comportamento di una qualsiasi *macchina*. Si pensi, allora, ad una macchina che, data una sequenza di simboli-insieme, sia capace di costruire l'espressione insiemistica corrispondente e viceversa: basta togliere/aggiungere asterischi e virgole!

Segnaliamo inoltre che sarebbe stato equivalente concludere lo schema assiomatico di comprensione, anzichè con "$\forall\ A^*(x^*) \in P_1$", con "$\forall\ A \in P(U)_1$", dove $P(U)_1$ è l'analogo di quello definito in una nota del paragrafo II.10.

Tale schema assiomatico insiemistico genera un numero di assiomi della rappresentata AI, uguale alla cardinalità di P_1, che è infinito numerabile. P_1, infatti, differisce dall'insieme delle proposizioni del Calcolo logico classico formale con uguaglianza (che è numerabile), soltanto a causa della formalizzazione dei simboli *propri* (come "+*"): un gruppo di condizioni che non altera certo la cardinalità.

Ciò posto, l'induzione completa si può adesso rendere con:

$$(A,(*,0*,)*,e*,\forall *,x*,...,\rightarrow*,\forall *,x*,(*,A,(*,x*,)*,)*)\in T,$$
$$\forall A\in P(U)$$

Quest'ultima condizione rende T innumerabile, perché gli viene assegnato un elemento per ogni elemento di P(U). Ne segue che l'originale Teoria AI non è formale e che la suddetta definizione è ammessa solo in Semantica standard. Ovviamente, ciò non significa che l'espressione "$\forall A\in P(U)$" abbia qualcosa di informale: essa è perfettamente definita e formalizzata in TI. È il semplice fatto che T sia innumerabile che fa concludere (metamatematicamente) che la Teoria originale non può essere formale. Il Sistema TI, in quanto formale, non può che riprodurne solo i suoi enunciati formali. Cioè a dire, la rappresenta parzialmente, potendo effettivamente esprimere solo la sua parte formale (la quale coincide con PA). Questa costituisce la seconda limitazione di cui parlavamo. Ciò non toglie che lo stesso Sistema TI, indicandoci che P(U) è innumerabile, sia in grado di farci concludere metamatematicamente che l'originale AI è una Teoria informale ben più ampia.

Vista dalla prospettiva degli assiomi di comprensione, ci sono infiniti casi (e precisamente l'invariato $2^{\aleph_0}$) in cui la sequenza "A,(*,x*,)*", ovvero la definizione dell'insieme A, non è codificabile in simboli privi di significato.

Per costruire un modello dell'Aritmetica integrale e dimostrare che U=N, si possono poi ripetere gli stessi passi visti per PA. Poiché abbiamo rappresentato la generica proprietà A(x) con un arbitrario elemento di P(U), si riconosce subito che la condizione insiemistica corrispondente al principio di induzione completa è *identica* alla condizione 9) che definisce l'insieme dei numeri naturali (par. II.6).

Dunque, stavolta le condizioni per il generico universo di un modello dell'Aritmetica integrale, *coincidono* con le condizioni su N. Ripetendo gli stessi passaggi del paragrafo II.10, si costruirà allora il medesimo *modello standard* con U=N, con la differenza che ora si può affermare che esso è *l'unico modello possibile per tale Teoria*, a meno d'isomorfismi (cosa che gli viene dalla stessa unicità di N, a meno d'isomorfismi). Si noti che non abbiamo potuto concludere lo stesso per PA, "per colpa" della condizione (9) sul suo universo (par. II.10), che è più debole della 9) di N. È il momento di approfondire oltre, osservando in concreto la differenza di PA con l'Aritmetica integrale.

La rappresentazione in TI dell'insieme T di PA differisce dal caso di AI soltanto per quanto riguarda la condizione relativa al principio di induzione, che è più debole. Essa, senza l'impiego di alcun assioma di comprensione, si può esprimere semplicemente con:

$$(A^*(0^*),\ e^*, \forall\ ^*,x^*,..,\rightarrow^*, \forall\ ^*,x^*,(^*,A^*(x^*),)^*) \in T,\ \forall\ A^*(x^*) \in P_1$$

dove P_1 è l'insieme, infinito numerabile, di tutte le proposizioni di PA con almeno una variabile libera. In alternativa (per un confronto più diretto con AI) si può usare lo stesso schema di comprensione precedente e poi definire l'induzione semplice mediante:

$$(A,(^*,0^*,)^*,e^*, \forall\ ^*,x^*,..,\rightarrow^*, \forall\ ^*,x^*,(^*,A,(^*,x^*,)^*,)^*) \in T, \forall\ A \in P(U)_1$$

dove $P(U)_1$ è stato già definito in una nota del paragrafo II.10: a parole, è il sottoinsieme di P(U) di quegli insiemi la cui corrispondente proprietà è esprimibile con il linguaggio di PA (che è formale). Tale insieme ha la stessa cardinalità di P_1, cioè infinito numerabile.

In definitiva T, e quindi PA, sono numerabili e la precedente definizione è rispettosa della Semantica generale. Adesso sappiamo che la risposta alla domanda lasciata in sospeso nel paragrafo II.10 è un "energico no": poiché P(N) è innumerabile, esiste un numero enorme (e precisamente lo stesso invariato $2^{\aleph_0}$) di sottoinsiemi di N i cui elementi non possono essere caratterizzati da alcuna condizione esprimibile in PA. Il principio di induzione in PA non è equivalente, ma infinitamente più debole della condizione 9) del paragrafo II.6; cioè del principio di induzione completa.

Dobbiamo ora discutere di una confusione, purtroppo molto diffusa. Premettiamo un'osservazione. Come abbiamo visto, la rappresentazione in TI di un generico Sistema assiomatico fa corrispondere ai predicati n-ari del Sistema, dei sottoinsiemi di U^n; quindi un predicato, considerato come variabile, varia in un sottoinsieme di $P(U^n)$. Nei casi non banali di Sistemi con modelli, l'insieme universo, U, è infinito; da ciò segue che $P(U^n)$, per ogni n, ha cardinalità almeno $2^{\aleph_0}$, senz'altro innumerabile. Da ciò segue che, se nel Sistema è consentito il secondo ordine espressivo, cioè se è permesso quantificare sui predicati, *potrebbe* succedere che il Sistema sia innumerabile. Ad esempio, ciò si avrebbe qualora un assioma originale di una tale Teoria usasse una sequenza del tipo "...$\forall$ $\underline{Q}$...", con $\underline{Q}$ un generico predicato, senza che ulteriori assiomi riducano la cardinalità, in difetto innumerabile, della collezione dentro cui $\underline{Q}$ può variare: la corrispondente rappresentazione in TI del Sistema sarebbe consentita in Semantica standard, mediante un'espressione del tipo "...$\forall$ $Q\in P(U^n)$..." con $P(U^n)$ innumerabile (o, più generalmente, con "...$\forall$ $Q\in R$...", dove R è un sottoinsieme di $P(U^n)$ ancora innumerabile). Da questo indiscutibile fatto, principalmente, discende la confusione di ritenere che tutti (di norma, anzi, che tutti e soli) i Sistemi del secondo ordine siano innumerabili. Anzitutto, se un Sistema usa un qualsiasi ordine superiore al primo, può benissimo essere numerabile; lo sarà sempre, per esempio, se è davvero *formale*. Come già detto nel paragrafo I.6, il rispetto della *formalità,* ovvero della Semantica generale, impone di esplicitare in concreto, eventualmente con ulteriori assiomi specifici, tutto ciò che può dedursi sintatticamente a partire da un qualsiasi enunciato; sia questo del primo, del secondo o di un qualsivoglia altro ordine. Non ci sono speciali peculiarità nel farlo nel caso di un ordine espressivo superiore al primo; e, del resto, la traduzione in TI converte l'espressione, in tutti i casi, in un enunciato del primo ordine. Nell'esempio in esame, il rispetto della formalità per la Teoria, impone semplicemente di far seguire, all'assioma che usa l'espressione "...$\forall$ Q...", altre premesse che esplicitino in concreto come deve dedursi sintatticamente dalla stringa "$\forall$ Q". La corrispondente rappresentazione in TI darà luogo a un enunciato definitorio dell'insieme dei teoremi del Sistema del tipo "...$\forall$ Q$\in$ S...", in cui S, se la formalità è rispettata, dovrà essere un sottoinsieme necessariamente numerabile di $P(U^n)$[32]. Per osservare in concreto un caso di questo tipo, modifichiamo la Teoria PA togliendo lo schema assiomatico dell'induzione e introducendo, in sua vece, l'assioma:

$$\forall \underline{A}\ ((\underline{A}(0)\ e\ \forall x\ ((\underline{A}(x)\ e\ \underline{S}(x,y))\rightarrow\underline{A}(y)))\rightarrow\ \forall x\ \underline{A}(x))$$

dove sappiamo che il predicato A deve variare nella collezione delle "proposizioni con almeno una variabile libera" affinchè la nuova Teoria coincida con PA. Il Sistema è adesso del secondo ordine e, se non si aggiunge null'altro, certamente informale, dato che "$\forall$ A" si deve interpretare semanticamente. Tuttavia, la formalità è ripristinabile. Come detto, il fatto che il Sistema sia del secondo ordine non implica che debba essere inevitabilmente informale. La formalità potrebbe ristabilirsi aggiungendo altri assiomi del secondo ordine che specifichino le opportune deduzioni sintattiche a partire dalla sequenza "$\forall$ A"; ma, certamente, ci sono due modi molto più semplici. Il primo è quello di ricostituire l'originale PA, sostituendo l'assioma con uno schema assiomatico metamatematico. Il secondo, sempre infallibile, è quello di rappresentare il Sistema in TI (il che rende superfluo l'intervento dell'ingegnosità): così facendo, l'assioma induttivo del secondo ordine viene convertito, nell'identico modo che abbiamo descritto, in uno schema assiomatico insiemistico che genera un'infinità numerabile di enunciati privi di significato esplicito; rispettando, dunque, la formalità. In particolare si è osservato che, proprio come abbiamo predetto, lo schema contiene la sequenza "...$\forall$ A$\in$ $P(U)_1$..." dove $P(U)_1$ è un sottoinsieme numerabile di P(U).

[32] Si legga, a sostegno: H. B. Enderton, *Second-order and Higher-order Logic*, Standford Encyclopedia of Philosophy (2007), sul WEB: http://plato.stanford.edu/entries/logic-higher-order/

In secondo luogo, un Sistema che ammetta soltanto espressioni del primo ordine può benissimo essere innumerabile. Null'altro che la semantica che definisce le *premesse* decide come dev'essere il Sistema. Come esempio, basta supporre, nella Teoria, la presenza di uno schema assiomatico che definisca un assioma del primo ordine, in funzione di una variabile che varia entro un insieme non numerabile. In un tal caso, la rappresentazione in TI introdurrà uno schema assiomatico insiemistico che genererà una quantità innumerabile di teoremi (del primo ordine, anche rispetto alla Teoria rappresentata). Questo è precisamente ciò che si è ottenuto per l'induzione completa di AI (anche se in questo caso l'originale AI non è del primo ordine, perchè lo schema induttivo metamatematico ammette assiomi di qualunque ordine espressivo). Di nuovo, il Sistema originale non è formale e la definizione appartiene alla Semantica standard.

Oppure, nella definizione metamatematica delle *premesse* di un Sistema del primo ordine, si potrebbe stabilire esplicitamente di usare un valore semantico che rende innumerabili le sue proposizioni. Per esempio, ammettendo la possibilità di interpretarle "simultaneamente" in tutti i modelli possibili. Più avanti analizzeremo questo criterio, che chiameremo *l'uso intrinsecamente semantico* di un Sistema formale. E lo osserveremo per lo stesso Sistema TI.

Certamente, le sconfinate capacità della semantica non sono necessariamente vincolate al secondo ordine espressivo, né ad un qualsiasi altro in particolare; e sono capaci di espletare tutta la loro potenza *iperinnumerabile* anche limitandosi al primo ordine. Sfortunatamente, la confusione si consolida a causa di altri due equivoci. Il primo è l'estendere il significato dell'espressione "Logica classica del primo ordine" (cioè la collezione di tutti i "Calcoli predicativi classici formali del primo ordine": Sistemi che hanno la definizione precisata nel paragrafo I.6, a parte i predicati *propri* che, comunque, devono obbedire ad assiomi classici generali; e che, come abbiamo visto, sono sempre *numerabili*) a quello di un generico "Sistema classico del primo ordine" (una Teoría che, invece, può aggiungere al Calcolo predicativo classico formale del primo ordine su cui si basa, degli schemi assiomatici *propri* che nulla vieta possano generare anche *innumerabili* assiomi, pur espressi al primo ordine). Il secondo, è legato all'enunciato del teorema di Lindström, di cui oltre parleremo.

Naturalmente, questo malinteso ne implica altri; ad esempio, spesso si critica il carattere non formale dei "Sistemi del secondo ordine", sulla base dell'intrinseca semanticità di *alcuni* di essi. E altri, anziché evidenziare che il problema non risiede nel tipo di ordine espressivo ma, semmai, nell'innumerabilità degli enunciati, ribattono che anche alcuni Sistemi del secondo ordine possono ricevere una veste perfettamente formale come "quelli del primo" (in tutti i casi, come *alcuni* del primo, rettificheremmo noi). E così via[33]. In questo grave frainteso si collocano perfino gli usuali nomi che vengono usati per le Teorie PA e AI; rispettivamente: "Aritmetica del primo ordine" e "Aritmetica del secondo ordine". Se si decide di trattare entrambi i tipi di induzione come degli schemi assiomatici metamatematici, è pur vero che l'Aritmetica di Peano viene ad essere *del primo ordine*, ma risulta che l'Aritmetica integrale può ammettere enunciati di un *qualunque ordine espressivo* (almeno fintantoché, nel principio di induzione completa, non si restringa il significato dell'espressione "qualunque proprietà"). Se, invece, ciascun tipo di induzione si vuol rendere mediante un unico enunciato simbolico, ne risulterà *in entrambi i casi* un'espressione del secondo ordine (lo abbiamo da poco osservato per PA): pertanto in questo caso, sia PA che AI saranno *del secondo ordine*. Benchè il primo formalizzabile, il secondo no (l'unica faccenda, infine, di concreto interesse). Quest'ultima conclusione si consegue rappresentando ciascuna Teoria all'interno di TI, dove, peraltro, si ristabilisce *per entrambe il primo ordine espressivo*.

In definitiva, la classificazione dei Sistemi assiomatici classici in base all'ordine espressivo è certamente fuorviante, in generale, delle loro proprietà logiche fondamentali; le quali sono legate, *in primis*, al rispetto o al non rispetto della *formalità*.

[33] Si giunge pertanto all'errore di considerare, spesso tacitamente, sempre come *del primo ordine* un qualunque Sistema *formale* (anzi, più in generale, un Sistema per il cui linguaggio valga il Teorema di s-completezza, un concetto che definiremo poco più avanti).

II.15. Sistemi innumerabili

Se un linguaggio semantico è numerabile, si può sperare che un'assiomatizzazione lo renda formale; ma se è innumerabile e dunque intrinsecamente semantico, questo è impossibile. Ci si chiede, pertanto, quali problemi sorgano in quest'ultimo tipo di Sistemi assiomatici, la cui rappresentazione in TI è consentita in Semantica standard.

Anzitutto, dobbiamo decidere se TI è "numerabile" o no. Le virgolette si devono al fatto che la cardinalità non può essere definita formalmente per le collezioni delle proposizioni e dei teoremi di TI, in quanto queste non sono *insiemi*. La questione, peraltro, ha un unico e immediato responso. Posto che il Calcolo predicativo classico del primo ordine con uguaglianza che fonda TI è formale, la stessa cosa si concluderà per TI, il quale aggiunge una schiera finita (o infinita "numerabile", in altre versioni) di assiomi propri senza significato esplicito. Confermato come fatto spontaneo che TI sia un Sistema formale, si osserverà allora un primo fatto sconcertante: il linguaggio di TI, "numerabile", non è sufficiente nemmeno a *denotare* individualmente tutti gli elementi di P(N) (che sono ancora insiemi), essendo tale insieme innumerabile; né dei successivi P(P(....(N))), di cardinalità ancora maggiore. Questa situazione, in sé, non è peculiare e si ripete per altri Sistemi. Ad esempio, per la Teoria assiomatica formale dei reali di Tarski (di cui parleremo meglio), numerabile, votata allo studio dei numeri reali, innumerabili. Ci sarebbe un'aggravante per TI a causa della sua natura fondazionale? Solo su un piano epistemologico. Si ha che la Teoria, definita per studiare certi oggetti fondamentali, non è neppure in grado di denotarli tutti in modo esclusivo: non sarebbe più logico ridefinirla solo per quegli oggetti per cui può farlo? La risposta è che ciò non si può fare se si conserva l'assioma delle parti, che stabilisce l'esistenza di insiemi innumerabili; ma tale assioma è necessario per definire il modello standard della Teoria dei numeri reali (a partire da quello standard di PA, come accennato nel par. II.10): senza di esso i reali non avrebbero la consueta descrizione insiemistica che gli assegna la cardinalità di P(N). Una condizione che non offre nessun vantaggio ma soltanto più limitazioni. Sembra preferibile accettare la situazione precedente, la quale, peraltro, non è in sé contraddittoria. Comunque, come chiariremo più tardi, sono possibili due diversi criteri per aggiustare le cose sul piano epistemologico. Il primo è legato allo stesso carattere informale della "numerabilità" del linguaggio di TI (cioè, appunto, alle virgolette) e in pratica fa sparire il problema; ma è piuttosto *ad hoc*. Il secondo, più radicale, è un'opportuna strategia, di fatto normalmente sottintesa, che permette a TI di descrivere effettivamente ogni oggetto per cui è stato pensato, anche se tale criterio *non rispetta la formalità* del Sistema.

Ritornando ai Sistemi innumerabili, si osserverà ora che, malgrado TI possa rappresentarne perfettamente l'insieme T, esso non è in grado neppure soltanto di denotare individualmente tutti i suoi elementi, cioè tutti i teoremi del Sistema, essendo questi innumerabili. Questo è il secondo senso (che già abbiamo rilevato in AI nel precedente paragrafo) per cui, in siffatti Sistemi, la rappresentabilità in TI non può dirsi pienamente realizzata. Diremo in breve che un Sistema innumerabile non è *totalmente* rappresentabile in TI. Viceversa, ogni Sistema formale ben definito è, chiaramente, *totalmente* rappresentabile in TI: infatti TI è capace di riprodurre qualsiasi suo enunciato (cioè, qualunque sequenza finita di caratteri senza significato). Ovviamente, una rappresentazione *non totale* è anche *non fedele*, perché se TI non può menzionare alcuni teoremi della Teoria riprodotta, fallirà pure nel dedurli tutti. D'altra parte, ricordiamo che il fatto che una rappresentazione sia *totale* non implica che sia *fedele* (in realtà, finora è solo un sospetto, ma lo confermeremo).

Qualche perplessità potrebbe sorgere circa la natura dei modelli dei Sistemi innumerabili: poiché a ciascuna stringa è associato più di un significato, sembrerebbe che non possa rispettarsi la condizione b) del paragrafo II.3 e quindi nemmeno realizzarsi la formalizzazione in TI di un loro modello. In verità, basta osservare che si possono distinguere, su un piano logico, due distinti livelli di interpretazione. Il primo è in grado di associare più significati a una stessa stringa e genera un numero innumerabile di enunciati. Il secondo livello semantico è quello vero e proprio del modello e si realizza normalmente: infatti la condizione b) richiede un significato per ogni *enunciato* e non per ogni stringa. L'unica peculiarità è che la funzione di verità coinvolge un numero innumerabile di enunciati. Tuttavia, non deve sfuggire una differenza fondamentale col caso formale, dovuta al semplice fatto che i due suddetti livelli semantici non sono necessariamente distinti in realtà (anzi, nei casi comuni sono un tutt'uno o intimamente legati). Da tale fatto segue che l'operazione di "cambiare il modello" con un altro non isomorfo, ovvero di cambiare *il secondo* livello interpretativo con un altro, può sconvolgere anche il primo; col risultato che si potranno modificare gli enunciati e pertanto lo stesso Sistema in esame. Questa osservazione, quindi, suggerisce un'ulteriore difficoltà, in generale elevata, a che un Sistema innumerabile possieda distinti modelli non isomorfi. E i casi comuni lo confermano: come quello, già visto, dell'Aritmetica integrale.

In quanto alla *correttezza*, mantenendo la convenzione di introdurre soltanto schemi assiomatici, evitando nuove regole deduttive, essa continua a valere per tali Sistemi, poiché vale per le regole deduttive classiche.

A parte i limiti della loro rappresentazione in TI, i Sistemi innumerabili hanno altri due difetti: in primo luogo, proprio il fatto che non solo per dedurre, ma anche soltanto per enunciare individualmente tutti i teoremi, si richiede per essi stessi irriducibile semantica. Non è possibile svuotare totalmente di significato tutti gli enunciati, come vorrebbe il formalismo hilbertiano. Il secondo difetto è che per essi, come vedremo nel prossimo paragrafo, non vale, in generale, il teorema di completezza semantica. Non essendo assicurato che siano s-completi, potranno allora aversi le negative conseguenze discusse nel paragrafo II.9: in particolare, non è detto che si sappiano distinguere tutti gli enunciati indecidibili; e, tra questi, potrebbero essercene di *validi*, cioè veri in ogni modello. Consideriamo per esempio il caso dell'Aritmetica integrale; abbiamo visto che il suo modello standard è unico, a meno di isomorfismo (pertanto, ciò che è vero per esso è anche *valido*). Qualora tale Sistema non fosse s-completo, potrebbero esistere enunciati veri nel modello standard (e, dalla sua unicità, non interpretabili come *falsi* in nessun modello) che non sono teoremi (né negazioni di teoremi:

pertanto, indecidibili). E, ciò che è peggio, non riconoscibili metamatematicamente come indecidibili. Considerazioni analoghe (compresa l'unicità del modello standard a meno d'isomorfismo), si ripetono per la *Teoria integrale dei reali*, che definiremo più oltre.

Come detto, la considerazione di siffatti Sistemi, più che una necessità, è una presa di coscienza: essi si sono usati, si usano e si useranno sempre, in Matematica. Nel caso delle Teorie integrali dei naturali e dei reali, si può anzi dire che tali Sistemi sono quelli che il matematico *normalmente e spontaneamente* considera nelle sue analisi. La ragione si deve alla possibilità di "sommare" al potere deduttivo *formale*, il vantaggio dovuto all'unicità del modello a meno di isomorfismi (infatti, vedremo che tale unicità non vale per i Sistemi classici *formali*). In sintesi, la convenienza è il *possibile* uso della *verità*, riferita all'unico modello standard, per "dedurre" (non sempre teoremi; da qui, le virgolette). In effetti, dato che le *falsità* non possono interpretarsi correttamente, poco importa, epistemologicamente, se non tutte le "deduzioni" ottenute tramite il concetto di verità sono teoremi.

Vedremo che lo stesso linguaggio di TI, cioè l'ossatura dell'intera Matematica, viene normalmente interpretato semanticamente; e, addirittura, in modo del tutto "libero", cioè ammettendo la possibilità di usare tutti i suoi possibili "modelli". Ciò – che costituisce il già accennato *uso intrinsecamente semantico* del Sistema – significa trattare di fatto la Teoria come innumerabile e quindi non formale.

II.16. Teorema di completezza semantica e sue prime conseguenze

Finalmente, è possibile formalizzare in TI il Teorema di completezza semantica. Ricordiamo che esso afferma l'esistenza di almeno un modello qualora il Sistema sia coerente e che implica la s-completezza. Anche la sua versione formalizzata ha carattere *non costruttivo*. La dimostrazione si può generalizzare a *tutti i Sistemi* *classici formali* (di qualunque ordine espressivo)[34]. In altri termini, il Teorema di completezza semantica vale per qualsiasi Sistema assiomatico classico il cui linguaggio rispetti la formalità.

Diremo che il Teorema di s-completezza *vale per il linguaggio* di un dato Sistema classico, quando non soltanto esso vale per il Sistema, ma si verifica pure che, se modifichiamo i suoi assiomi togliendone qualcuno o aggiungendo ad essi una collezione, al più infinita numerabile, di enunciati dello stesso Sistema (includendo la possibilità di aggiungere nuovi simboli non semantici senza modificare le regole grammaticali e deduttive) in modo da riottenere comunque un nuovo Sistema coerente, allora anche tale Sistema avrà modelli. Come esempio elementare, il Teorema di s-completezza vale per il linguaggio di un qualsiasi Sistema classico formale, cioè *per il linguaggio formale*; ma, in principio, non è escluso che possa valere anche per un linguaggio semantico. Evidentemente, *la validità del Teorema di s-completezza per il linguaggio di una Teoria è una condizione più forte della semplice s-completezza:* essa implica la s-completezza della Teoria stessa ma non viceversa. Più avanti porteremo un esempio (importante) di un Sistema intrinsecamente semantico per il cui linguaggio non vale il Teorema di s-completezza, ma che risulta ugualmente s-completo (e anche completo).

Il Teorema di s-completezza ha conseguenze molto importanti che richiedono paziente riflessione.

Cominciamo con l'enunciare il teorema di Lindström; esso afferma che *un Sistema classico per il cui linguaggio vale il Teorema di s-completezza*[35] *è esprimibile al primo ordine*. Ma si noti che il teorema non afferma né che il primo ordine è sempre produttore di s-completezza, né che per un linguaggio di ordine superiore al primo non valga mai il Teorema di s-completezza. Soltanto che, in quest'ultimo caso, se esso vale, allora il suo

[34] L. Henkin, *Completeness in the Theory of Types*, Journal of Symbolic Logic, 15 (1950).

[35] In verità, il teorema originale (P. Lindström, *On Extensions of Elementary Logic*, Theoria, 35 (1969)) ha come ipotesi che valgano il teorema di compattezza semantica e quello di Löwenheim-Skolem. Qui consideriamo, per semplicità, un'ipotesi più stretta: infatti, vedremo che questi due teoremi discendono dalla validità del Teorema di s-completezza per il linguaggio della Teoria.

linguaggio *potrebbe* sempre essere sostituito, ridefinito, da un altro che faccia uso soltanto del primo ordine espressivo. Certo, questo fatto dà al primo ordine una particolare importanza (del resto già evidenziatasi con le proprietà di TI: ogni Sistema formale, infatti, in quanto *totalmente* rappresentabile in TI, è certamente esprimibile al primo ordine). Ma ciò non giustifica di confondere, in generale, il linguaggio del secondo ordine con la non validità del Teorema di s-completezza, né quello del primo ordine con la sua validità o con la formalità del linguaggio[36].

Passiamo alle ripercussioni del Teorema di s-completezza sul "numero" e tipo di modelli dell'arbitraria Teoria classica per il cui linguaggio esso vale. Cominciamo intanto con l'osservare che se detta Teoria è incompleta, allora esistono suoi modelli tra loro non isomorfi. Infatti, se I è un enunciato indecidibile, in base al teorema devono esistere almeno due modelli del Sistema in cui I non ha lo stesso valore di verità e pertanto non isomorfi. Ma qual è il problema rappresentato da modelli non isomorfi?

Per fare un parallelo fisico, consideriamo un motore elettrico reversibile. Si tratta di un oggetto capace di funzionare in due modi complementari: se attraversato da una corrente, esso produce lavoro (motore). Viceversa, esso produce una corrente elettrica se si compie lavoro facendo girare il suo asse (dinamo). Le due interpretazioni dell'oggetto, "è un motore", "è una dinamo" sono ugualmente corrette (sarebbero allora "modelli" dell'oggetto). Ma sono profondamente differenti. Ad esempio, l'affermazione "l'oggetto produce lavoro durante il suo funzionamento", ha diversi valori di

[36] Spesso tale teorema viene enunciato dicendo che *nessun Sistema che usa un ordine espressivo superiore al primo può soddisfare il teorema di compattezza semantica e quello di Löwenheim-Skolem*. Evidentemente, in quest'ultima forma dell'enunciato, si sottintende di considerare ogni Sistema *formale* (o, più in generale, per il cui linguaggio vale il Teorema di s-completezza) di ordine superiore al primo, come "del primo ordine a più uscite". Una posizione, palesemente inutile, ambigua e forzosa che si spiega solo con la scorretta categorizzazione degli ordini espressivi di cui abbiamo parlato. Si legga a sostegno: M. Rossberg, *First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness,* Hendricks et al. (eds.) Logos Verlag Berlin (2004), sul WEB: http://www.st-andrews.ac.uk/~mr30/papers/RossbergCompleteness.pdf, p. 307 e seguenti.

verità nei due "modelli". Allora, in questo parallelo orientativo, i due "modelli" non sarebbero "isomorfi". I problemi? Semplicemente che l'oggetto non può definirsi né motore né dinamo; non è un rappresentante esclusivo di nessuna di queste due classi di oggetti. Se un Sistema assiomatico ha un modello non isomorfo al modello "spontaneo" per cui il Sistema stesso era stato pensato (tipicamente, un modello *standard*), significa che il Sistema non è esclusivo di questo modello, non caratterizza soltanto gli oggetti *standard*; ma può rappresentare ugualmente bene oggetti di natura differente (spesso clamorosamente) da questi. Non solo non ci sono ragioni di natura sintattica, ovvero puramente matematica, per preferire un modello anziché un altro, ma nessuno strumento formale della Teoria è capace di differenziare i due modelli: dal punto di vista del linguaggio matematico, essi sono assolutamente indistinguibili. Le conseguenze sono, quindi, di tipo semantico e, come vedremo, compromettono la rappresentabilità matematica di concetti metamatematici assai fondamentali. Ma hanno anche dei pregevoli risvolti fruttiferi. La mancanza di unicità del modello a meno di isomorfismo (in breve: di *categoricità*), fu vista subito come un difetto. Hilbert suppose tacitamente che la completezza sintattica implicasse, oltre alle cose gradevoli che abbiamo già evidenziato, anche la *categoricità*. In effetti, si ha che in un Sistema classico completo, due qualsiasi modelli distinti devono essere *elementarmente equivalenti* (par. II.11): se l'interpretazione di un certo enunciato è vera nel primo, allora tale enunciato non può essere il negato di un teorema e pertanto è un teorema; ma allora sarà anche vero se interpretato nel secondo modello e viceversa. Tuttavia vedremo che ciò non è sufficiente per assicurare la categoricità, cioè che i due modelli siano isomorfi.

Dato un Sistema classico S, definiamo *sotto-Sistema finito* di S, ogni Sistema classico che ha come assiomi un sottoinsieme finito degli assiomi di S. Il teorema di *compattezza sintattica*, valido in ambito del tutto generale, afferma che *S è coerente se e solo se ogni suo sotto-Sistema finito è coerente*. Esponiamo una sua facile *meta*dimostrazione che fa uso dell'ipotesi di *buona definizione* per il Sistema. La condizione necessaria è immediata: supponiamo che S sia coerente e che, per assurdo, esista un suo sotto-Sistema incoerente. Ma allora sarebbe incoerente anche S, che contiene tutti i suoi assiomi: assurdo. Supponiamo, ora, che ogni sotto-Sistema finito di S sia coerente ma che, per assurdo, S sia incoerente. Dunque, se E è un enunciato qualsiasi, esiste una dimostrazione in S di E e un'altra di *non*E. Dalla *buona definizione* di S, le due dimostrazioni usano, assieme, una quantità finita di assiomi di S. Ma allora un qualsiasi sotto-Sistema finito che li include è capace di derivare la stessa contraddizione e pertanto è incoerente: assurdo.

In un Sistema per il cui linguaggio vale il Teorema di s-completezza, vale in particolare anche il teorema di *compattezza semantica*: *il Sistema ha modelli se e solo se ogni suo sotto-Sistema finito ha modelli*. Esso segue immediatamente dal precedente teorema, dato che ogni Sistema coerente ha modelli.

Soffermiamoci ora su PA. Si tratta di un Sistema formale, al cui linguaggio, allora, poter applicare il Teorema di s-completezza e quello di compattezza semantica. Consideriamo il Sistema, PA', ottenuto aggiungendo alle premesse di PA, gli infiniti assiomi:

$c \neq 0$
$\underline{S}(0,y) \rightarrow c \neq y$
$(\underline{S}(0,y)$ *e* $\underline{S}(y,z)) \rightarrow c \neq z$
$(\underline{S}(0,y)$ *e* $\underline{S}(y,z)$ *e* $\underline{S}(z,t)) \rightarrow c \neq t$
....

dove c è un *nuovo* simbolo di costante. Ovvero, indicando sinteticamente con s(x) il successore di x:

$c \neq 0, \quad c \neq s(0), \quad c \neq s(s(0)), \quad c \neq s(s(s(0))),$ ....

o, ancora più semplicemente (par. II.1):

$c \neq 0, \quad c \neq 1, \quad c \neq 2, \quad c \neq 3,$ ....

I puntini di sospensione sono un espediente semantico perfettamente ammissibile (perché perfettamente chiaro) in questo contesto, che è il contesto metamatematico dello schema assiomatico. Tuttavia, quando si formalizzi PA' in TI, l'insieme di questi infiniti assiomi può essere rigorosamente definito come l'insieme che contiene la generica stringa "c*, $\neq$ *,n*", $\forall$ n*$\in$ N, dove N è l'insieme dei numeri naturali, unico a meno di isomorfismi, che costituisce l'universo del *modello standard* di PA (cioè costruito, ricordiamo, tramite la soddisfazione delle nove condizioni del par. II.6). Ora, consideriamo un arbitrario sotto-Sistema finito di PA' e costruiamo un suo modello a partire dal modello standard di PA. Se non contiene nessuno dei nuovi assiomi è lo stesso modello standard di PA. Se contiene un numero finito dei nuovi assiomi, basta considerare l'interpretazione costituita dal modello standard di PA unitamente all'interpretazione di c con una costante sufficientemente grande del suo universo N; per esempio, i tre assiomi: $c\neq 0$, $c\neq 57$, $c\neq 8202$ sono tutti veri per c=42307. Per il teorema di compattezza semantica, allora, il Sistema PA' ha un modello, diciamolo M'; il quale, in particolare, è anche modello di PA.

In definitiva, esiste un modello di PA che ammette una costante, c, che non coincide con nessuna costante standard: infatti, è diversa da 0, 1, 2, ...etc. In termini più rigorosi: l'interpretazione della costante c in M' non può essere associata isomorficamente a nessuna interpretazione standard. Tale modello non è dunque isomorfo al modello standard; in breve, basta dire che "non è standard".

Quindi, il Sistema PA si adatta perfettamente anche alla descrizione di oggetti, come c, affatto diversi dai numeri naturali insiemistici. Tali numeri soddisfano tutti gli assiomi di PA: ammettono un unico successore e predecessore[37] (anch'essi, ovviamente, non standard), delle operazioni di somma e prodotto, e quant'altro di derivabile dagli assiomi di PA. La spontanea interpretazione di tali numeri, essendo ciascuno di essi maggiore di ogni numero naturale, è che siano di "grandezza infinita"[38].

Ammesso che i numeri naturali insiemistici siano una soddisfacente rappresentazione dei numeri naturali metamatematici (cosa che, come anticipato, verrà presto messa in discussione anche

[37] Si può facilmente dimostrare per induzione che ogni naturale, eccetto "0", ammette un unico predecessore, ovvero è il successore di qualche naturale.

[38] Altre curiosità su tali numeri sono sinteticamente presentati in G. Lolli, *È possibile concepire gli infinitesimi?*, sul WEB:
http://homepage.sns.it/lolli/articoli/InfinitesimiRoma.pdf

per la più appagante delle scelte dell'insieme che soddisfa le nove condizioni del par. II.6), risulta, quindi, che il Sistema PA non può caratterizzarsi come *quello* dei numeri naturali insiemistici. Ecco giustificato perché i naturali "intuitivi" non possono neppure definirsi come *il* modello di PA, come anticipato nel paragrafo II.1. Possono invece definirsi come *il* modello dell'Aritmetica integrale, a meno di isomorfismi; ma ciò non ci soddisfa che parzialmente per via dell'irriducibile carattere non formale di tale Teoria.

La metadimostrazione vista non sembra dipendere dalla completezza o incompletezza sintattica di PA. Come vedremo nella Parte terza, PA è in effetti incompleto; ma la metadimostrazione ora vista si può ripetere analogamente per il Sistema formale dei reali, dimostrato completo da Tarski.

II.17 Altre conseguenze del Teorema di completezza semantica

La Teoria *integrale* dei numeri reali ammette, tra le premesse proprie, che *ogni insieme di numeri reali limitato superiormente ha estremo superiore*. Il suo universo, R, è un insieme infinito e pertanto P(R) è innumerabile. Si può dimostrare in TI che l'insieme di tutti i sottoinsiemi di reali limitati superiormente ha la stessa cardinalità di P(R). Pertanto, se si interpreta il suddetto principio come uno schema assiomatico, risulta che esso genera una quantità innumerabile di assiomi[39]. Allora, il Sistema è intrinsecamente semantico (non formale). Si può dimostrare in TI che tale Sistema è categorico (si tratta di un ordinario teorema di unicità). Dunque, possiamo affermare che, a meno di isomorfismo, *il* suo modello è quello dei numeri reali, con i limiti, già descritti, dovuti alla sua non formalità. Per superare la natura non formale, si può considerare una versione ridotta del Sistema, che limita i suddetti assiomi ad una quantità numerabile: l'analogo di PA, per il caso dei naturali. Tale

[39] Questo è l'unico fatto che qui ci interessa. Chi desiderasse sapere quali esatte proprietà matematiche significhino "limitato superiormente" ed "estremo superiore", può consultare un qualsiasi libro di analisi.

Teoria formale dei reali (nel seguito, TFR) è sintatticamente completa, come dimostrato da Tarski. Per inciso, da ciò segue che anche la GE è completa: infatti, a un suo enunciato indecidibile, tramite l'interpretazione dello *Spazio cartesiano*, equivalente al modello euclideo, corrisponderebbe un enunciato indecidibile di TFR. Essendo TFR formale, per il suo linguaggio vale il Teorema di s-completezza e di compattezza semantica. Consideriamo il Sistema TFR' che aggiunge a TFR la seguente collezione infinita di assiomi:

$$\exists c(c>0),\ \exists c(1/2>c>0),\ \exists c(1/3>c>0),\ \exists c(1/4>c>0),\ \ldots$$

dove c è un nuovo simbolo di costante. Anche in questo caso tale collezione può essere definita formalmente in TI. Ogni suo sotto-Sistema ha un modello. Infatti, per ogni fissato n, è possibile determinare, in TFR, un reale positivo r tale che $r<1/n$; tale r fará sì che siano verificati tutti gli enunciati: $\exists c(c>0), \exists c(1/2>c>0), \ldots, \exists c(1/n>c>0)$. Per il teorema di compattezza semantica, allora, tale Sistema ha un modello, che, quindi, è anche modello di TFR. Si conclude subito che tale modello non è isomorfo al modello standard. Infatti, esso ammette una costante, c, che è minore di 1/n qualunque sia n; ma tale costante non può interpretarsi nel modello standard, dato che qui la quantità 1/n si fa minore di un qualsiasi prefissato numero reale, a partire da un certo n. Pertanto, anche la Teoria formale dei reali, completa, ammette modelli non standard (anche se, come osservato, tutti *elementarmente equivalenti* al modello standard) e, conseguentemente, non può caratterizzare unicamente i numeri reali, così come normalmente sono intesi. La categoricità non è implicata dalla completezza sintattica, come supposto da Hilbert. Purtroppo, questo equivoco si prolungò ben oltre l'annuncio del Teorema di s-completezza (1930), presso tutti i Logici del tempo, compresi Skolem e Gödel (cosa che, data la peculiarità delle metadimostrazioni appena viste, non deve poi scandalizzare troppo). Solo a partire dal 1934 tali singolari implicazioni del Teorema cominciano a delucidarsi nello stesso Skolem; ma la totale comprensione di essi (con la piena interpretazione del teorema di

Löwenheim-Skolem, che vedremo fra poco) si raggiungerà non prima del 1936, con Malcev[40].

Le metadimostrazioni considerate permettono anche di concludere che *i linguaggi* dell'Aritmetica integrale e della Teoria integrale dei reali sono semanticamente incompleti. Infatti, esse si possono ripetere, inalterate, per questi due Sistemi non formali, ma applicando il teorema di compattezza *sintattica* anziché semantica. Si formeranno dei nuovi Sistemi che aggiungono gli infiniti assiomi suddetti, coerenti per il teorema di compattezza sintattica. Ora, ammettere che questi Sistemi abbiano modelli contraddirebbe la categoricità dei Sistemi originali; infatti tali modelli sarebbero anche modelli non isomorfi (per le stesse ragioni spiegate) dei Sistemi iniziali. Dunque, esistono estensioni coerenti ma senza modelli di tali Teorie integrali.

Ma che per i linguaggi delle Teorie integrali dell'Aritmetica e dei numeri reali non valga il teorema di s-completezza, non implica che tali Sistemi debbano essere necessariamente s-incompleti. Questo argomento merita un pò di attenzione anche per il fatto che su di esso non abbiamo potuto rintracciare alcuna bibliografia. Intanto, un esempio. Si consideri il Sistema classico i cui assiomi sono tutti e soli gli enunciati *veri* della Teoria aritmetica integrale; naturalmente, *veri* nel suo modello standard, unico a meno di isomorfismo. Tale Sistema può essere ottenuto a partire dall'Aritmetica integrale, aggiungendo appunto, come schema assiomatico, "tutti gli enunciati veri nel modello standard". Si tratta, invero, della più potente Teoria aritmetica disponibile. Naturalmente, essa ammette ancora il modello standard come unico modello a meno di isomorfismo; inoltre, è completo ed s-completo per costruzione. [Più in generale, *per un Sistema categorico, la completezza e la s-completezza sono equivalenti*. Infatti, sia E un enunciato arbitrario di un Sistema s-completo e categorico. Se è vero per l'unico modello (a meno di isomorfismo) sará un teorema, per la

[40] Per un dettagliato resoconto storico, consigliamo: P. Mancosu, R. Zach, C. Badesa, *The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1900–1935*, da pubblicarsi presso ed. Leila Haaparanta, Oxford University Press, bozza finale (maggio 2004), reperibile sul WEB all'indirizzo:
http://www.ucalgary.ca/~rzach/papers/history.html

s-completezza; se è falso, *non*E sarà vero e sará un teorema per la stessa ragione. Pertanto, il Sistema è completo. D'altra parte, sappiamo che se un Sistema qualsiasi possiede almeno un modello ed è completo, è anche semanticamente completo (par. II.9).]

Eppure, *per il linguaggio* del Sistema appena definito non vale il Teorema di s-completezza. Per concluderlo, basta ripetere la solita metadimostrazione che aggiunge i suddetti infiniti assiomi: il nuovo Sistema che si forma è coerente, per il teorema di compattezza sintattica, ma non ha modelli o si violerebbe la categoricità. Un discorso perfettamente analogo può farsi per il Sistema classico i cui assiomi sono tutti e soli gli enunciati *veri* per il modello standard della Teoria integrale dei reali.

Ritorniamo ora ai Sistemi integrali dell'Aritmetica e dei reali. È possibile che essi siano completi, ovvero s-completi, cioè che *coincidano* con i due rispettivi Sistemi ampliati appena considerati? L'incompletezza semantica del loro linguaggio non lo vieta. Riprenderemo questo discorso nella terza Parte. Comunque, possiamo già commentare che la (s-)completezza di tali Sistemi ci rivelerebbe che ogni ulteriore tipo di "deduzione" semantica, come quella che si basa sulla considerazione dei modelli (nel nostro caso, dell'unico modello) per "dedurre" (cioè, impiegando il concetto di verità), è in teoria inutile perché non sarebbe capace di concludere nient'altro di nuovo (anche se ciò non toglie che in pratica potrebbe ugualmente risultare utile). Ma, ovviamente, resta il fatto che, data l'intrinseca non formalità di tali Sistemi, le stesse deduzioni sintattiche, cioè realizzate solo in base alle *premesse*, richiedono comunque valore semantico per le proposizioni.

La non categoricità delle Teorie formali dell'Aritmetica e dei numeri reali è stata conclusa da metadimostrazioni particolari che non è detto che possano ripetersi per ogni altro Sistema formale. Quindi, non sembra che ci sia ancora nulla che vieti che altri Sistemi formali possano essere categorici. Un'altra speranza è che gli universi dei modelli non standard abbiano sempre cardinalità diversa rispetto a quelli dei modelli standard. Per esempio, riconsideriamo il caso di PA. In base ai suoi assiomi (par. II.1), ogni modello di PA deve contenere almeno tutti i numeri del tipo 0, s(0), s(s(0)), ..., ovvero, 0, 1, 2, …., cioè degli oggetti isomorfi ai naturali insiemistici standard. Se il modello non contiene altri enti è (isomorfo a quello) standard, altrimenti è non standard. Quello non standard da noi prima considerato, contiene anche la costante non standard c e tutti i numeri non standard da essa ottenibili mediante i predicati "successore" e "predecessore"; quindi, il suo universo sembra "più grande" di N. Forse è possibile distinguere i modelli non isomorfi in base alla differente cardinalità dei loro universi?

Il teorema di Löwenheim-Skolem frustra queste speranze, almeno per quanto riguarda il caso di modelli con universi di cardinalità infinita (nel seguito diremo brevemente: *modelli di cardinalità infinita* o addirittura *modelli infiniti*). Bisogna aggiungere subito che il caso di modelli con cardinalità infinita è il caso ordinario, cioè delle Teorie matematiche di maggior interesse; tuttavia, esiste un settore matematico dedicato allo studio dei *modelli finiti*, in Sistemi che hanno applicazioni nel campo della computazione. Nel seguito, comunque, prenderemo in considerazione il solo caso di modelli infiniti.

Il teorema di Löwenheim-Skolem (spesso L-S, nel seguito) si applica, ancora, a quei Sistemi per il cui linguaggio vale il Teorema di s-completezza; e quindi a tutti i Sistemi formali. Esso si può dimostrare in TI a partire dal teorema di compattezza semantica (della cui formalizzazione in TI parleremo più avanti) e dall'assioma di scelta; ed afferma: *Sia dato un Sistema, dotato di un modello infinito, per il cui linguaggio vale il Teorema di s-completezza e tale che le sue proposizioni abbiano cardinalità maggiore o uguale al numerabile. Allora esso ammette modelli di una qualsiasi cardinalità infinita*[41]. Dunque, non soltanto non vale mai la categoricità per tali Sistemi (modelli di cardinalità diversa, chiaramente, non sono isomorfi per definizione di *cardinalità*: i loro universi non sono equipotenti), ma ciò che per essi si verifica sempre è una "esplosione" di modelli di tutte le possibili cardinalità. Ritornando al Sistema PA', per esempio, poiché esso è numerabile (cioè lo è l'insieme delle sue proposizioni) e l'universo di ogni suo modello dev'essere infinito (in base alla definizione formalizzata di *infinito* introdotta nel par. II.12), si ha che esso ammette modelli di

[41] Con tale formulazione, pretendiamo includere sia la versione *all'ingiù* che *all'insù* di tale Teorema.

qualsiasi cardinalità, tutti non standard. In particolare, ne ammette anche di numerabili; che saranno anche modelli non standard di PA. Quindi, PA ammette modelli numerabili standard e non standard! Lo stesso si ripete per TFR: esistono suoi modelli non standard della stessa cardinalità, $2^{\aleph_0}$, di quello standard. Inoltre, esiste anche un suo modello numerabile! Il Sistema TFR, pensato per la descrizione dei numeri reali, di cardinalità $2^{\aleph_0}$, descrive perfettamente anche oggetti, completamente diversi, di cardinalità numerabile. Ma, dopotutto, ciò non deve sorprendere troppo: infatti, anche quando TFR descrive l'usuale universo R, di cardinalità $2^{\aleph_0}$, non può che farlo parzialmente, in quanto le sue proposizioni, numerabili, non sono sufficienti neanche a denotare individualmente tutti gli elementi di R.

Non presenteremo certo la complessa dimostrazione formale del teorema di Löwenheim-Skolem; tuttavia, una giustificazione dell'esplosione di modelli implicata dal teorema non è poi così lontana dall'intuizione. Consideriamo un Sistema classico il cui insieme delle proposizioni abbia una certa cardinalità, dotato di un modello infinito M. Tenendo presente che esiste comunque la possibilità di aggiungere nuovi simboli, anche semantici, sembra ragionevole che sia sempre possibile ingrandire il Sistema e il suo linguaggio, eventualmente anche aumentandone senza limiti la cardinalità, mantenendone la coerenza. Se l'ingrandimento è spinto sufficientemente, si forma un Sistema coerente che non può più avere M come modello (ad esempio, se le costanti del Sistema eccedono gli elementi del suo universo). Di conseguenza, nel caso in cui per il linguaggio valga ancora la s-completezza, esiste sempre un altro modello di tale Sistema ampliato, che è anche modello del Sistema originale e che non è isomorfo a M; considerato che tale discorso si può ripetere all'infinito, ecco giustificata l'esplosione di modelli non isomorfi. D'altra parte se il Sistema originale è categorico, allora nessuna estensione coerente del Sistema spinta abbastanza fino a rendere M inadeguato ad essere un modello, può avere modello; il che indica che per il linguaggio di un tale Sistema non può valere il Teorema di s-completezza. Il teorema di L-S ci chiarisce dunque che *categoricità e validità del Teorema di s-*

completezza per il linguaggio di un Sistema con modelli infiniti, sono proprietà complementari, impossibili ad essere simultaneamente soddisfatte.

A questo punto, giunge opportuno accennare a un'utile applicazione dei modelli non standard, dovuta a Robinson: essa rivela che, dopotutto, la categoricità ha anche un risvolto negativo. Infatti essa inibisce lo sviluppo dei Sistemi, per il fatto stesso che l'aggiunta di nuove premesse può far decadere le loro valide interpretazioni, cioè i loro modelli. Ritorniamo al Sistema TFR'. In esso, la costante c ha tutta l'aria, stavolta, di un *infinitesimo*. Tale concetto non trova una corretta interpretazione nel modello standard dei reali. Risulta tuttavia molto utile usarlo in pratica: stiamo parlando di quegli oggetti indicati di norma con dx, dy, df, etc., usatissimi nel Calcolo non a caso chiamato *infinitesimale*. Sono quantità nulle o non nulle? A seconda di come conviene, parrebbe... La storia degli infinitesimi in Matematica è molto interessante ma non è questa la sede più opportuna per parlarne. Diciamo soltanto che si sono sempre usati senza la preoccupazione di definirli formalmente né interpretarli nitidamente. Ma i nuovi infiniti assiomi di TFR' sono capaci di definirli formalmente, per il tramite della costante c, come numeri come gli altri. Poi, c'è il fatto fondamentale che modelli di TFR' esistono e sono anche modelli (non standard) di TFR. Resta solo da costruire un modello di TFR' che può considerarsi come un ampliamento dei reali standard (chiamato talvolta degli pseudo-reali); cosa che, effettivamente, si può fare[42]. E il discorso si chiuderebbe qui. Soltanto che, comprensibilmente, non merita la pena lavorare in TFR' solo per poter disporre formalmente degli infinitesimi; e neanche sforzarsi di interpretare TFR con il nuovo modello non standard: ci basta il risultato che il loro uso informale all'interno del modello standard (del resto non necessario), è comunque legittimato in un ambiente più generale.

[42] Come rilevato per la prima volta da A. Robinson, nel 1960; la sua più recente pubblicazione in merito è: *Non-standard Analysis*, Princeton University Press (1996).

L'uso dei modelli non standard, peraltro, non ha risolto solo problemi concettuali come questo, ma anche concreti problemi matematici prima irrisolti[43].

Quando il teorema di Löwenheim-Skolem si applica allo stesso Sistema TI, si hanno conseguenze indubbiamente drammatiche; ma esse sono state esagerate – e talvolta lo sono ancora – in modo incondivisibile, come cercheremo di mostrare.

II.18. Limiti espressivi dei Sistemi formali

Consideriamo un qualsiasi Sistema assiomatico classico formale dotato di un modello con un universo U. L'ingenua pretesa normalmente sottintesa, di fronte a una tale Teoria, è che essa sia capace di descrivere e chiarire ogni aspetto delle proprietà di U. Per esempio, sembra ragionevole sperare che la Teoria formale dei numeri naturali, cioè PA, sia capace di decidere ogni *proprietà* dei numeri naturali. Ebbene, nel caso in cui U è infinito, cioè nel caso normale, ciò si rivela un grossolano equivoco. Infatti, abbiamo visto che l'insieme di tutte le proprietà di U è rappresentato in TI dall'insieme P(U), di tutti i sottoinsiemi di U. Ma, per U infinito, la minima cardinalità di P(U) è $2^{\aleph_0}$, sempre superiore al numerabile, cioè alla cardinalità delle proposizioni del Sistema. Pertanto *il Sistema non è neanche in grado di denotare individualmente tutte le proprietà di U*. Se U è infinito, il linguaggio in cui si possono formulare tutte le proprietà dell'universo è intrinsecamente semantico; e, pertanto, sempre più ricco del linguaggio del Sistema. Più ricco, anzi, del linguaggio di un *qualsiasi* Sistema formale. È inutile, continuando l'esempio dei naturali, cercare alternative formali a PA per risolvere questo problema.

Il linguaggio dei lodevoli Sistemi assiomatici classici formali ha così un'imbarazzante, grave, insufficienza espressiva. Si ribadisce

[43] I più famosi riguardano alcune proprietà degli *operatori lineari compatti*, ad opera di Robinson e Bernstein. Altri, interessano metodi statistici di risoluzione, come in: S. Albeverio et. al. *Non standard methods in stochastic analysis and mathematical physics*, New York, Academic Press, 1986.

l'insostituibilità della metamatematica non solo nel definirli, ma anche soltanto per denotare individualmente tutte le proprietà del loro universo. Dobbiamo sottolineare che questo limite non ha nulla a che vedere col famoso Teorema di incompletezza, che vedremo oltre; eppure, esiste anche tale confusione. Evidentemente, il limite di cui stiamo parlando è indipendente dal fatto che il Sistema assiomatico sia sintatticamente completo o incompleto. Ad esempio, esso vale anche per il Sistema completo TFR, ovviamente. Se il Sistema è completo, i suoi teoremi, se interpretati in un modello, sono in grado di stabilire la verità o falsità nel modello di tutti gli enunciati che il linguaggio matematico può enunciare; ma non certo di quelli che non può enunciare. E di questi ultimi, come visto, pur limitandoci a quelli che menzionano soltanto le proprietà dell'universo, ne esiste sempre una quantità schiacciante rispetto a quelli formulabili nel Sistema.

La strategia che si potrebbe usare per cercare di superare questo limite è d'ambito interpretativo: in concreto, "cambiare" il modello. Ma ne discuteremo dopo.

II.19. Limiti espressivi fondamentali per la Matematica

Quando si prendono in considerazione i "modelli" del Sistema TI, si manifestano profonde ripercussioni sull'intera Matematica. Indichiamo con C (da Cantor) l'universo di un suo generico "modello"; esso rappresenta la collezione di tutti gli insiemi. Sappiamo già che C non può essere un insieme. Si ha un assurdo, per esempio, supponendo che C abbia una certa cardinalità α. Infatti, abbiamo visto che in TI si può dimostrare che esistono insiemi di una cardinalità superiore ad α, qualunque sia il valore di α; i cui elementi sono ancora insiemi, cioè elementi dell'universo.

Allora non potrebbero appartenere tutti a C, da cui l'assurdo[44]. Ma, anche se C non è un *insieme*, è una collezione a cui è possibile, in senso metamatematico, associare i concetti di "finito", "infinito", ed anche una "cardinalità", seppure informalizzabile. Ad esempio, non si ha alcuna contraddizione supponendo che C sia "numerabile". Tale ipotesi metamatematica implicherebbe che, in realtà, non possono esistere insiemi di "cardinalità" superiore al "numerabile"; tuttavia succede che TI non è in grado di "accorgersene". Chiariamo questo punto. Nell'interpretazione in cui C è "numerabile", quando TI dimostra, per esempio, che P(N) non è numerabile, lo fa perché non può ammettere come *funzione*, cioè come *insieme*, una corrispondenza uno a uno tra gli elementi di P(N) e N *concepita dalla metamatematica*. In altri termini, P(N) è correttamente non numerabile dentro TI, ma può essere "numerabile" al di fuori di esso, cioè in senso metamatematico: la corrispondenza uno a uno dei suoi elementi con N non può essere descritta formalmente come un insieme, ma solo metamatematicamente. Un ragionamento di questo tipo, in generale, può giustificare una qualunque "cardinalità" supposta per C: tutte le cardinalità maggiori di essa si dovrebbero soltanto alla limitatezza del linguaggio matematico e scomparirebbero in ambito metamatematico.

L'argomentazione appena vista consente anche di risolvere il problema dell'*indescrivibilità individuale* di elementi innumerabili nel linguaggio "numerabile" di TI, osservata nel paragrafo II.15. Infatti, allo stesso modo, solo su un piano metamatematico sarebbe possibile stabilire una "corrispondenza biunivoca" tra gli elementi di un insieme innumerabile e (un sottoinsieme del)le denotazioni individuali del linguaggio "numerabile" di TI. Così, il linguaggio "numerabile" di TI sarebbe davvero capace di qualsiasi descrizione individuale; ma, al solito, TI stesso non può "accorgersene". Tuttavia, questo criterio di risoluzione non è generale perché vale soltanto nel caso in cui si assume che C è "numerabile". Se lo si assume come "innumerabile" (in modo che gli insiemi innumerabili siano ammessi in metamatematica) e si considera, come di norma,

[44] Tale pseudo-paradosso è conosciuto come *"paradosso di Skolem"* e, normalmente, viene concluso dall'ipotesi che C sia numerabile; ma invero esso segue, come abbiamo visto, ammettendo per C una cardinalità qualsiasi.

"numerabile" il linguaggio di TI, il problema riaffiora. Più oltre descriveremo un diverso e più drastico criterio di soluzione, basato su un'interpretazione non convenzionale (non formale) delle proposizioni di TI.

Gli esempi ora visti sollevano i primi dubbi sulla possibilità che si debba sempre avere un'esatta corrispondenza dei concetti di *infinito* e di *cardinalità* tra il piano metamatematico e quello puramente matematico. Poi, tale incertezza esplode se si applicano le conseguenze del Teorema di s-completezza allo stesso linguaggio di TI.

Come abbiamo detto nel paragrafo II.15, sembra spontaneo considerare TI come un Sistema formale; al quale, quindi, poter applicare il *meta*teorema di s-completezza (non certo la versione formalizzata in TI stesso) e tutte le conseguenze mostrate, compreso il *meta*teorema di Löwenheim-Skolem. Ora, abbiamo visto che la definizione insiemistica di *finito*, *infinito*, *numerabile* e delle successive *cardinalità*, dipendono tutte, alla base, dall'insieme dei numeri naturali N. Ma gli elementi di tale insieme, essendo ancora insiemi, sono anche elementi dell'universo del "modello" di TI, che è soggetto all'indeterminazione dovuta al metateorema di L-S applicato a TI stesso: esistono "modelli" corretti di TI tra loro non "isomorfi" ed anche di diversa "cardinalità". Allora, se N ed N' sono gli insiemi dei naturali, ciascuno unico a meno di isomorfismo, che si riferiscono a due di tali "modelli", non è assicurato, da un punto di vista metamatematico, né che tra N ed N' ci sia "isomorfismo", né che tali insiemi debbano avere la stessa "cardinalità"[45]. Dunque, il *numerabile* relativo ad un "modello" corretto, non coincide in generale con il *numerabile* relativo ad un altro; ed entrambi, come visto, possono differire dal "numerabile" metamatematico. In altre parole, il concetto di *numerabile* e, conseguentemente, di *ogni cardinalità* successiva, non è assoluto, ma *relativo* al "modello" di TI che si sta considerando! Alla stessa critica è soggetto il concetto

[45] Ad esempio, se N' – al contrario di N – si riferisce ad un "modello" di TI che, in violazione dell'ipotesi del continuo, ammette un numero qualsivoglia di cardinalità comprese tra N' e P(N'), non è metamatematicamente garantito, chiaramente, che P(N) e P(N') abbiano la stessa "cardinalità"; lo stesso, di conseguenza, potrà dirsi anche per N e N'.

stesso di *finito*. Certamente, se non è assicurato che N sia "numerabile", non è neanche assicurato che il *finito* matematico coincida con il "finito" metamatematico. Ad esempio, in un "modello" di TI con una "cardinalità" sufficientemente alta, l'insieme N potrebbe essere "innumerabile", visto dal di fuori. Allora, anche un insieme *finito*, cioè i cui elementi sono equipotenti con tutti i numeri di N compresi tra 0 e un certo naturale n, può non essere "finito" dal di fuori, cioè in senso metamatematico[46]. Ma non solo: in analogia con quanto osservato nel paragrafo II.16, in un peculiare "modello" di TI (che potremmo ancora chiamare "non standard") l'insieme N potrebbe anche essere *numerabile* e tuttavia non standard. Se esso ammette una costante non standard c simile a quella già considerata, allora la definizione di *finito* si discosta, nuovamente, dal suo valore semantico, dato che i numeri naturali standard compresi tra 0 e c sono infiniti.

Facciamo notare, a questo proposito, una scorrettezza abbastanza comune che riguarda la formalizzazione in TI dei due teoremi di compattezza (sintattica e semantica). La loro *dimostrazione*, richiede la previa formalizzazione del concetto di *finito*. Si legge spesso qualcosa di simile: che il teorema di compattezza sintattica (che, ricordiamo, ha validità generale) implica, a ritroso, qualcosa di "assolutamente condivisibile": che ogni dimostrazione del Sistema può far uso soltanto di un numero *finito* di premesse. Quest'ultima dimostrazione, peraltro, è facile[47]. La leggerezza deriva dal dimenticarsi che ci si sta riferendo, appunto, a un concetto *formalizzato* di *finito*; pertanto, nient'affatto coincidente, in generale, con il significato di "finito" che si usa invece nella metadimostrazione (in base all'ipotesi di *buona*

---

[46] In un insieme innumerabile, i numeri compresi tra due qualsiasi numeri distinti possono essere infiniti, come si verifica nell'insieme ordinato dei numeri reali.

[47] Sia S un Sistema coerente e sia T un suo qualsiasi teorema. Consideriamo il Sistema, pertanto incoerente, S'=S+*non*T. Per il teorema di compattezza sintattica, esiste un suo sotto-Sistema finito, Σ', incoerente. Σ' deve contenere *non*T tra gli assiomi: altrimenti, sarebbe coerente per il teorema di compattezza sintattica applicato a S. Allora, possiamo indicarlo con Σ'=Σ+*non*T, dove Σ è un sotto-Sistema finito di S. Essendo Σ+*non*T incoerente, T è deducibile da Σ ("per assurdo", in base al metateorema di deduzione), con un numero, pertanto, finito di assiomi.

definizione per il Sistema assiomatico), cioè con il significato intuitivo che si vuol vendere. La proclamata ragionevolezza del corollario, a rigore, è soltanto un'illusione. Se si vuol seguire il cammino formale e *dimostrare* il teorema di compattezza sintattica, allora la sua plausibilità intuitiva, cioè basata sul concetto propriamente semantico di finito, è tutta da accertare (in ogni caso, metamatematicamente): essa, infatti, sarebbe in relazione con la presunta "spontaneità" del "modello" di TI a cui il *finito* matematico si riferisce. Discuteremo presto se sia effettivamente possibile scegliere qualcosa come "lo spontaneo (o standard) modello" corretto per TI: un argomento soggetto a inevitabile nebulosità, come si vedrà.

Indiscutibilmente, tutto ciò ha conseguenze drammatiche per la Matematica. Proviamo a riassumerle. Dal concetto matematico di *finito*, minato da tale relativismo, dipende, come abbiamo visto nel paragrafo II.12, la definizione insiemistica metamatematicamente più appagante dell'insieme dei numeri naturali; che risulta, allora, egualmente relativa a un "modello" prefissato di TI e non necessariamente in accordo con l'intuitivo concetto semantico di "numero naturale". Anche il concetto di *infinito* possiede, dunque, lo stesso tipo di relativismo e, conseguentemente, anche l'applicabilità del teorema di L-S! Ma la relatività del concetto di "cardinalità", fa sì che la stessa suddivisione dei Sistemi in "numerabili" e "non numerabili" (e quindi anche "formali" e "non formali", per il cui linguaggio valga il Teorema di s-completezza e no...) debba essere inevitabilmente sottoposta ad un assenso di tipo metamatematico; perché non può essere formalizzata in modo *certamente* corrispondente ai relativi spontanei concetti semantici. Perfino la stessa "categoricità" è soggetta a una simile critica: che di N ce ne sia uno solo, a meno di isomorfismo, è vero solo in riferimento ad un prefissato "modello" di TI. Ma se si considera l'esplosione dei possibili "modelli" per TI, ecco che tale "unicità" entra in crisi.

Tuttavia, non ha molto senso trarre da questi limiti conseguenze straordinariamente deleterie. Una delle prime conclusioni derivanti dal teorema di L-S si deve allo stesso Skolem ed è a tutt'oggi condivisa da qualcuno: il teorema[48] mostrerebbe che in Matematica è inutile, forse presuntuoso, considerare modelli innumerabili: infatti, bastano i numerabili. In effetti, non si può negare che un modello di cardinalità superiore, è di dominio (epistemologico) esclusivo della semantica, come abbiamo osservato. Tuttavia, nessun "modello" di TI può in fondo mancare di tale caratteristica, anche se è "numerabile"; e lo evidenzieremo fra poco. Inoltre, TI può descrivere formalmente senza problemi insiemi, e quindi modelli delle Teorie che rappresenta, di qualunque cardinalità innumerabile, pur non potendone denotare individualmente tutti gli elementi. È vero che ciò non è necessario e fors'anche inutile; ma, in alcuni casi, come nella Teoria formale dei reali, la scelta di un modello innumerabile sembra a quasi tutti la più sensata e soddisfacente. Ciò che importa – e che è indubbio – è che in nessun caso e da nessuna prospettiva tale scelta può essere considerata come contraddittoria o errata. Di conseguenza, tale critica *non può demolire effettivamente i modelli di cardinalità superiore al numerabile*, né il punto di vista di chi desidera usarli. *E neppure è capace di offrire maggior rigore o curare il descritto relativismo*: abbiamo infatti visto, nell'esempio fondamentale dei naturali, che ci sono modelli numerabili non isomorfi tra loro; analogamente, osserveremo in concreto che fissare la "cardinalità" di un "modello" di TI, non significa affatto fissare il suo "modello", anche se tale "cardinalità" è la "numerabile".

Le critiche di Quine si spingono molto più oltre. Il punto di vista che le riassume è la considerazione che due Matematici non potranno mai essere sicuri di usare uno stesso "modello" per TI; e, pertanto, neanche che i loro concetti di "insieme", "numero naturale", "numerabile", "innumerabile", etc., coincidano. In effetti, è vero che non è possibile nessun tipo di convenzione formalizzabile che assicuri tale accordo: il linguaggio di TI è, ovviamente, lo stesso per tutti i suoi "modelli", pur profondamente diversi (come succede per ogni altro Sistema formale). Tuttavia, è anche vero che ciò non significa necessariamente che tali concetti non possano essere distinti *in assoluto*. Potrebbero infatti – e, invero, non c'è altra scelta

[48] O, più semplicemente, una sua versione meno generale: *ogni Sistema con modelli infiniti per il cui linguaggio vale il Teorema di s-completezza, ammette un modello numerabile.*

– essere distinti dalla metamatematica; da un accordo di natura genuinamente semantica. Ovviamente, si può dubitare di questo potere, come si può dubitare di qualunque convenzione semantica che fonda la metamatematica; ma, ripetendo quanto da noi già osservato nella prima Parte, se si vuol credere che un tipo qualsiasi di comunicazione è possibile, si dovrà pure ammettere che lo è anche qualche specie di accordo semantico informale. E, nel caso fondamentale dei numeri naturali, quest'accordo sembra alla fine innegabile: si può realmente sostenere che è illusorio cercare di sviluppare uno studio delle loro proprietà, almeno quelle basilari, condiviso da tutti coloro davvero interessati ad esse? Per una critica filosofica abbastanza esaustiva contro il punto di vista di Quine, raccomandiamo la lettura di un breve, efficace, articolo di H. Hrachovec[49].

Eppure emerge una difficoltà. Ammettere che è possibile concordare un significato per i concetti di "numero naturale", "numerabile", etc., significa ammettere che è possibile convenire un "modello standard" per TI. Ma se si cerca di specificare esattamente le caratteristiche di tale spontaneo "modello", ecco che la faccenda si ingarbuglia. Anche la sua stessa "cardinalità" sarebbe discutibile, ma supponiamo di averla fissata; se si desidera, pur con la prudente "cardinalità numerabile" di Skolem. Ora, abbiamo già osservato che TI è incompleto, essendo l'ipotesi generale del continuo indecidibile (par. II.12). Aggiungiamo che si sono scoperti molti altri enunciati indecidibili[50] e che, come riconosceremo nella terza Parte, l'incompletezza di TI è ineliminabile. Il punto dolente è che nessuno di tali enunciati sembra vero o falso nel "modello spontaneo"; che, pertanto, di spontaneo ha sempre meno. Si pensi, per confronto, al caso del V postulato della Geometria euclidea: lì, il "modello spontaneo euclideo" lo indica tanto energicamente come vero da aver indotto tanti a ritenere che fosse un teorema. Qui, invece, quale "modello" abbiamo in mente: quello per cui l'ipotesi del continuo è vera o uno degli infiniti – fra loro completamente diversi – in cui è

[49] *Ontological Relativity reconsidered: Quine on Löwenheim-Skolem, Davidson on Quine*, (2005), sul WEB:
http://sammelpunkt.philo.at:8080/1078/1/quine_skolem_orig.pdf

[50] Ad esempio, *l'ipotesi di Suslin*, *di Kurepa* e *di Martin*; ma ce ne sono di altri.

falsa? E la stessa domanda si può ripetere per tutti gli altri (infiniti, come vedremo) enunciati indecidibili.

Bisogna dunque riconoscere che non si hanno affatto le idee chiare su come sia fatto il "modello" di TI che pur ci consente – lo riteniamo dopotutto innegabile – una visione comune ed unitaria della Matematica. La tangibile sensazione che si percepisce è che quanto più ci si addentri nei fondamenti della Matematica, tanto più sia illusorio cercare di delucidare inequivocabilmente ogni dettaglio.

A questo proposito è doveroso evidenziare un dato di fatto: i problemi che sono venuti alla luce non sono certo dovuti all'unificazione fondazionale realizzata da TI. Per questo aspetto, anzi, la riduzione insiemistica della Matematica opera come una lente di ingrandimento, rivelando ed accorpando tutte le ambiguità già presenti nelle Teorie che unifica: dunque, semmai, in chiave favorevole. Per esempio, supponiamo di avere il solo Sistema PA, dimenticandoci di TI; esso sarà, allora, l'unico Sistema *formale* che può essere usato per definire i numeri naturali. Ma a PA possiamo sempre applicare il *meta*teorema di L-S e ritrovare la sconcertante pluralità di modelli di tutte le cardinalità; di conseguenza, la rappresentabilità in linguaggio puramente matematico dei numeri naturali "intuitivi" entrerà in crisi in quell'analogo modo che abbiamo rilevato all'interno di TI.

Quando un problema di relativismo si manifesta solo in TI, è perché riguarda un concetto che si è formalizzato soltanto in TI (come, ad esempio, quello di *finito*): qualora si decidesse di non formalizzarlo, esso resterà, ovviamente, con la propria ambiguità semantica.

II.20. L'uso *intrinsecamente semantico* dei Sistemi formali e di TI

Si è già accennato che l'opportunità di sostituire il modello è in grado di ampliare la capacità espressiva di un Sistema assiomatico formale. Per constatarlo, è sufficiente un semplice esempio relativo al primo Sistema assiomatico da noi definito (par. I.1). Interpretiamo "A", "B", "C" e "D" come 0, 1, 2, 3 e "→" come "<", cioè "minore di"; poiché i tre assiomi sono soddisfatti, si ottiene un modello. Inoltre, se $X<Y$ e $Y<Z$, si ha, effettivamente, anche che $X<Z$: dunque, la regola deduttiva è corretta. I tre soli teoremi che si possono dedurre hanno la seguente interpretazione: $0<2$, $0<3$ e $1<3$. Tuttavia, è chiaro che se ci riferiamo al modello 0, 1, 3, 4, con lo stesso significato per "→", possiamo anche dedurre $0<4$ e $1<4$. Con questa strategia è possibile far sì che tale banalissimo Sistema, di soli tre teoremi, sia capace di dedurre infinite proprietà dei numeri naturali. Un uso di tal genere, cioè di diversi modelli, è dunque in grado di accrescere in modo spettacolare il potere espressivo della Teoria. Può anche darsi che un enunciato E interpretato nel nuovo modello M_2 esprima una proprietà *p* dell'universo dell'originario modello studiato M_1; magari, una proprietà prima incodificabile, cioè non esprimibile mediante nessun enunciato interpretato in M_1 (e abbiamo visto che ce ne sono sempre di infiniti, se M_1 è infinito). In altri termini, per enunciare ed eventualmente dimostrare la proprietà *p*, si ricorrerebbe ad un modello diverso da quello per cui la stessa *p* si era pensata. Naturalmente, tra i due modelli dovrà esserci un'opportuna *relazione*. Ci dispiace non saper riportare degli autentici, utili, esempi d'applicazione di tale criterio; è probabile che, normalmente, tali deduzioni si ottengano mediante l'uso di un diverso Sistema assiomatico, anziché di un diverso modello (cosa che sarebbe sempre possibile quando la *relazione* suddetta è propriamente matematica). È credibile, comunque, che il metodo sia sottovalutato, in particolare nel caso in cui tale *relazione* sia intrinsecamente semantica, pur metamatematicamente indiscutibile. In ogni caso, ci possiamo domandare fino a che punto il criterio descritto può risolvere i limiti espressivi della Teoria. Anzitutto, la semplice denotazione di tutte le proprietà dell'universo di un modello infinito richiederebbe un numero innumerabile di altri modelli: ce ne sono abbastanza? Il teorema di Löwenheim-Skolem sembrerebbe tranquillizzarci (!) da questo punto di vista. Quante sono tutte le cardinalità? Per quanto osservato in una nota del paragrafo II.12, sappiamo che la collezione di tutte le cardinalità ha sempre più elementi di un qualsiasi *insieme* di numeri cardinali. Si tratta, dunque, di un tipo di infinito "più forte" di quello normale (ricordiamo che una possibile definizione di insieme infinito è che l'insieme abbia "tanti elementi quanti" quelli di un suo sottoinsieme proprio). In effetti, nell'ambito delle *classi* descritte dalla Teoria degli insiemi NBG, si può definire una "corrispondenza biunivoca" (con virgolette perché non è tra insiemi e pertanto non è essa stessa un insieme) fra tale collezione e la collezione di tutti gli insiemi; per cui si può affermare che anch'essa è *iperinnumerabile* come quest'ultima. Ma anche limitandosi ai modelli tra loro isomorfi, la situazione è rassicurante: infatti, in ogni Teoria dotata di modelli, il numero di modelli isomorfi è certamente *iperinnumerabile*. Per concluderlo, basta osservare che si può sostituire l'universo del modello, i cui elementi indichiamo con a, b, c, ..., con l'universo (a,x), (b,x), (c,x) ..., dove x è un *insieme qualsiasi*. Se la presenza di x è ininfluente nelle operazioni, si ottiene un modello diverso dall'iniziale ma ad esso isomorfo. Poiché il numero di tutti gli insiemi è *iperinnumerabile*, segue la conclusione[51].

È chiaro che ammettere di poter usare uno qualsiasi degli *iperinnumerabili* modelli del Sistema per dedurre, implica considerare innumerabili enunciati interpretati e dunque trattare il Sistema come non formale. In ciò consiste quello che, pertanto, possiamo denominare *l'uso intrinsecamente semantico* di un Sistema formale: di fatto, ribadiamo, comporta di considerarlo come non formale, ammettendo per esso innumerabili teoremi. E tutto ciò senza alterare minimamente il linguaggio della Teoria (né tanto meno il suo numero d'ordine espressivo).

Per quanto riguarda l'ambito interpretativo della cruciale Teoria TI, si ha una situazione singolare. Anzitutto, l'interpretazione delle proposizioni di TI risulterebbe opportuna per l'analoga ragione di quella ora spiegata, con la differenza che, più generalmente, si vorrebbe poter descrivere tutti gli elementi di ogni insieme innumerabile; ovvero, semplicemente tutti gli insiemi. Si vorrebbe, cioè, che TI fosse capace di descrivere effettivamente ogni oggetto per cui è stato pensato, come osservato nel paragrafo II.15.

Il problema nell'interpretare TI, come abbiamo visto, è che la distinzione, la precisazione, di un qualsiasi prefissato "modello"

---

[51] Per maggiori dettagli si veda: G. Gerla, *Proprietà che si conservano*, cap. 6, appunti di Logica matematica, scaricabili dal WEB all'indirizzo: http://www.dmi.unisa.it/people/gerla/www/didattica.html

corretto, ancorché intuitivo, è incerta. Non sembra lecito sostenere che sono possibili interpretazioni del linguaggio di TI capaci di assegnare ad ogni stringa uno ed un solo, chiaro, significato. Di conseguenza, non avrebbe neanche molto senso parlare, come poc'anzi, di diversi modelli in *relazione* tra loro. D'altra parte, nella pratica si ha chiaramente l'esigenza di un'interpretazione che vada ben oltre le possibilità di un singolo "modello": basta riconoscere che *quello che normalmente si fa quando si lavora con la Teoria TI, non è dare un indiscusso significato ai suoi enunciati in base a un suo "modello prestabilito" (?); ma, inversamente, si cerca di rendere una qualsiasi affermazione semantica, correlata con concetti insiemistici, in sequenze di simboli di TI*. Ciò equivale, in un certo senso, a utilizzare il "modello" più conveniente per formalizzare la frase. Quindi, in realtà, è come se si ammettessero simultaneamente tutti gli iperinnumerabili "modelli" concepibili e disponibili, ovvero, se si preferisce, un unico "modello" di tipo "dinamico", in cui la collezione degli insiemi si adatta alle nostre esigenze. Quest'uso è, pertanto, intrinsecamente semantico: equivale a trattare il Sistema come non formale. Il suo lato positivo, chiaramente, è che è capace di soccorrere ad ogni limite espressivo di TI: di rappresentare *totalmente* e *fedelmente* (dato che qualsiasi criterio semantico relativo alle premesse può essere riprodotto dal "modello dinamico") anche i Sistemi innumerabili. Quello negativo è la perdita di formalità e il carattere sfuggente dell'interpretazione, che, tra l'altro, deve sapersi districare dalle insorgenti ambiguità del linguaggio, come tra poco evidenzieremo.

Per cercare di precisare il funzionamento di tale interpretazione "dinamica" di TI, prendiamo ad esempio la descrizione delle proprietà dei numeri naturali. Immaginiamo di fissare un tradizionale, "modello" infinito, C, della Teoria[52]; cioè un "modello" che associa un unico, indiscusso, significato ad ogni proposizione. Poiché il linguaggio "numerabile" del Sistema formale TI è incapace anche solo di denotare individualmente un numero infinito di elementi di P(N), cioè di proprietà dei numeri naturali, si ha che la

[52] E, se si vuole, lo si supponga "non numerabile", per risolvere il problema dell'insufficienza espressiva con una strategia più generale di quella descritta nel paragrafo precedente.

stessa cosa si verifica allorchè si interpretano le proposizioni nel "modello" C. Tuttavia, a tali elementi debbono potersi applicare le premesse di TI, se è vero che sono insiemi. In effetti, ciò si potrebbe fare solo *ridefinendo* C, ovvero, "cambiando" il "modello". La ridefinizione del "modello", cioè, può (e deve) consentire la descrizione propriamente matematica di proprietà, che sono ancora *insiemi*, prima incodificabili. Naturalmente, tale ridefinizione non può avvenire in modo ufficiale o conscio, dato che il "modello" è indistinto; ma, semplicemente codificando in linguaggio insiemistico la proprietà, cioè l'insieme, che di volta in volta si è interessati a studiare. Quando si fa ciò, C viene ad essere diverso da prima, potendo, al limite, avere anche un'altra "cardinalità". Allora, anche N e P(N) saranno, in verità, diversi! Dunque, considerare la collezione di tutti i "modelli" come un unico "modello dinamico" non convenzionale, dà luogo senza dubbio a una situazione di ambiguità da cui non resta che la schietta supposizione di sapersi districare; un disagio che dovevamo aspettarci. Un altro prezzo che si paga è che sorgeranno sempre nuovi insiemi non formalizzabili (tra questi, magari alcuni che "prima" lo erano). Ma, chiaramente, il "ciclo" può in teoria ripetersi all'infinito e consentire la descrizione di un qualsiasi insieme.

Naturalmente, l'uso intrinsecamente semantico di TI risolve solo apparentemente i problemi discussi nel precedente paragrafo. È vero che il Sistema – *diverso da TI* – ottenuto da TI interpretando liberamente, nel modo descritto, le sue proposizioni, può sfuggire al metateorema di s-completezza e alle sue conseguenze. Ma la pluralità di "modelli" e, con essa, la relatività dei concetti di *numero*, *finito*, *cardinalità*, *categoricità*, etc., si ritrova tutta all'interno del suo stesso "modello dinamico", per come è stato definito. Inoltre, l'uso di tale "modello dinamico" comporta, chiaramente, un'esplicita rinuncia a risolvere gli enunciati indecidibili di TI, dato che esso assorbe sia i "modelli" per cui sono veri, sia quelli per cui sono falsi. Di fatto, *quest'uso di TI equivale all'impiego della tradizionale Teoria "ingenua" degli insiemi*.

Cerchiamo, ora, di trarre alcune fondamentali conclusioni alla fine di questa seconda Parte. La Teoria assiomatica degli insiemi permette (*in teoria*, non certo *in pratica* per via dell'intrattabilità del suo formalismo) di unificare e formalizzare, pur con dei limiti, l'intera Matematica. Nel far questo, le ambiguità, prima diffuse nei fondamenti di ogni Disciplina, vengono tutte concentrate in quelli di questa Teoria. Nessuna delle "sporcizie" dell'edificio sparisce, ma si accumula nel suo basamento. Essa consente di formalizzare dei concetti molto importanti e fondamentali (come quelli di *finito* ed *infinito*), scoprendo, tuttavia, che né questi né altri possono essere conclusi come certamente corrispondenti a quelli metamatematici (che sono, naturalmente, il principale obiettivo della conoscenza). Peraltro, questo problema non è dovuto a TI, ma risiede nei fondamenti di ogni Sistema classico formale. La Teoria, inoltre, non può descrivere *fedelmente* tutti i Sistemi formali, a meno di perdere, come già anticipato, la sua basilare peculiarità deterministica di tipo "meccanico" (ciò sarà concluso e illustrato in seguito; finora, abbiamo semplicemente segnalato il dubbio che tutti i Sistemi formali siano *fedelmente* rappresentabili). Per l'ambito interpretativo, si osserva che i suoi "modelli" sono soggetti a una nebulosità che sembra inevitabile e inoltre che, per far sì che la Teoria stessa possa descrivere tutto ciò per cui si è pensata, l'unica possibilità di carattere generale è un'interpretazione libera delle sue proposizioni, ovvero ammettere l'uso "simultaneo" di tutti i suoi possibili, iperinnumerabili, "modelli". Quest'uso, che risolve tutti i limiti espressivi della Teoria, consentendo di rappresentare *totalmente* e *fedelmente* anche i Sistemi non formali, equivale tuttavia a considerare TI come innumerabile e dunque non più formale.

Per certi aspetti, dunque, la situazione sembra dar ragione a una famosa critica attribuita a Poincaré: "*la Teoria assiomatica degli insiemi è un errore da cui un giorno ci si riprenderà*". La sua unificazione, *teorica* e non *di fatto*, ha dei limiti di *fedeltà* e non risolve né migliora nessuna ambiguità. La natura dei suoi "modelli" è oscura e se ne richiede una quantità innumerabile – cioè si richiede che essa abbandoni il rigoroso formalismo, riconvertendosi in Teoria "ingenua" degli insiemi – per poter descrivere tutto ciò per cui è stata creata; ciò manifesta l'inutilità della sua veste formale e sembra giustificare un ritorno all'"ingenuità" cantoriana.

Ma sintetizzeremo la sua difesa in tre punti: 1) TI è in grado di formalizzare alcuni fondamentali metateoremi e di rappresentare *fedelmente* i più comuni e importanti Sistemi formali. 2) Ogni Teoria formale ha analoghi limiti espressivi, invalicabili nel rispetto della formalità. 3) L'accorpamento di tutte le ambiguità della Matematica nei fondamenti di un'unica Teoria, in grado di unificare tutta la Matematica più importante, è un risultato epistemologicamente pregevole che consente di riguardare la loro natura in modo unitario ed esaustivo. E, per esempio, di concludere come fatto definitivo che le radici della Matematica non possono essere delucidate interamente.

PARTE TERZA
Incompletezza e indecidibilità

III.1. Sistemi classici effettivamente assiomatizzabili

L'obiettivo principale dei seguenti paragrafi sarà approfondire la natura dei Sistemi formali. In particolare ci interessa studiare sotto quali condizioni essi possono possedere alcune gradevoli proprietà che ne accentuano il determinismo.

Ricordiamo che le dimostrazioni, dalla *buona definizione*, sono *distinguibili*. Ciò significa che, dato un oggetto qualsiasi, è possibile concludere metamaticamente se è una dimostrazione oppure no. Ma un ragionamento metamatematico può riferirsi al significato delle parole nel modo più generale ed arbitrario e quindi essere ottenuto con una strategia incatalogabile; quello che spontaneamente si desidererebbe, invero, come abbiamo già notato nel paragrafo I.5, è un metodo di conclusione "automatico", "meccanico", non legato alla fantasia o abilità del matematico. Stiamo pensando in concreto ad una *macchina* che, di fronte alle premesse di un Sistema formale, sia capace di rispondere sempre con un "sì" o con un "no" alla domanda se un qualunque oggetto sia una dimostrazione di un qualche suo teorema.

Una collezione si dice *decidibile* se è numerabile e se esiste una *procedura meccanica finitamente descrivibile*, capace di stabilire, dato un oggetto qualsiasi, se esso vi appartiene o no[1]. Una procedura

[1] Si rilevi l'importanza dell'ordine nella definizione: non è lo stesso dire: "dato un oggetto qualsiasi, esiste una procedura meccanica capace... etc.". Quest'ultima definizione non specifica che la procedura sia unica per tutti gli oggetti ed equivale ad una *distinguibilità* che introduce come unica novità il carattere meccanico delle conclusioni. Anche in metamatematica, come in linguaggio

meccanica che rende *decidibile* una collezione numerabile si dirà in breve *di decisione*. Naturalmente, la *decidibilità* è una condizione ben più forte della *distinguibilità*. Finalmente, un Sistema matematico si dice *effettivamente assiomatizzabile* (che abbrevieremo con *eff. ass.*) se la collezione delle dimostrazioni dei suoi teoremi è *decidibile*.

Ma cosa dobbiamo intendere esattamente per "procedura meccanica finitamente descrivibile"? Sembra che sia davvero il caso di definire più rigorosamente questo concetto. Presenteremo, intanto, un chiarimento informale dell'idea. Comunemente[2], ci si riferisce a una Struttura (evitiamo il termine "Sistema", per ovvi motivi), con un prefissato *programma* che:

- ammette in ingresso un numero finito di oggetti di lunghezza finita e privi di ambiguità, che chiameremo *inputs*, i quali ne avviano il funzionamento.
- È in grado di segnalare il suo *arresto*; ovvero, l'attesa di nuovi *inputs*.
- Quando si arresta dopo degli *inputs*, avrà prodotto, eventualmente, un numero finito di risultati (o *outputs*) di lunghezza finita. Anche la segnalazione di *arresto* non è che un particolare *output*. Comunque, è possibile che non si arresti mai, nel qual caso è possibile che produca infiniti *outputs* di lunghezza finita (ma, come caso particolare, è anche possibile che non produca mai alcun *output*).

Inoltre, deve possedere le seguenti altre caratteristiche:

- fissato il *programma*, ogni *output* dipende solo e soltanto dagli *inputs*. Quindi, ripetendo in un istante qualsiasi gli stessi *inputs*, si riottiene lo stesso risultato.
- Il programma è un insieme finito di *istruzioni*; ogni *istruzione* è un oggetto ben determinato che non cambia nel tempo.

---

simbolico, è importante l'ordine dei termini in un periodo; certo, non è frequente imbattersi in una simile sottigliezza nel linguaggio comune.

[2] Prendiamo qualche spunto, per esempio, da: F. Montagna, *Teoria della computabilità* (2002), reperibile nel WEB: http://docenti.lett.unisi.it/files/4/1/1/23/teocomputab.pdf

- Le *istruzioni* si traducono in operazioni semplici e necessarie che non richiedono né fantasia, né preferenza, né alcuna speciale intelligenza. Non possono coinvolgere operazioni casuali come il lancio di un dado o di una moneta[3]. Danno sempre unici risultati parziali (e quindi un unico risultato finale): non possono perciò consistere in scelte arbitrarie fra diverse azioni possibili.
- Tempo, dimensioni fisiche, energia assorbita ed altri limiti pratici, non influiscono nel funzionamento della macchina.

L'eventualità che la macchina possa non fermarsi, potrebbe sfuggire ad un'analisi frettolosa, per via dell'abitudine di avere sempre a che fare con risorse deperibili. Il lettore non avvezzo all'informatica, può pensare semplicemente ad un'automobile. L'*input* potrebbe essere "*andiamo a Madrid*". L'insieme delle istruzioni, tralasciando le normali operazioni di guida, si può riassumere con "*seguire l'itinerario marcato in rosso sulla cartina*". Il risultato è tutto ciò (o parte di esso, se lo conveniamo) che l'automobile produce: accelerazione, fumo, il transito di una collina o di Madrid, etc. Un esempio in cui la procedura non si ferma è il seguente. *Input*: "*avanzare*"; programma: "*seguire l'itinerario marcato in rosso*", in cui tale itinerario è una curva chiusa su sé stessa. Non ci interessa considerare la benzina o l'usura dell'auto e della strada; né la durata finita della vita del conducente o dell'universo. Perché, della materia che trattiamo, vogliamo scoprire i limiti teorici indipendentemente dalle difficoltà pratiche. Peraltro, il caso di non fermata non deve essere considerato, in principio, come necessariamente "negativo", come vedremo.

C'è, comunque, un'ulteriore ipotesi semplificativa che, nel nostro caso, sembra opportuno convenire circa gli oggetti sia di *input* che di *output*: che essi si limitino a stringhe alfa-numeriche (finite, come detto). Ciò, in vista dell'applicazione delle macchine ai Sistemi assiomatici concreti, in cui sono così rappresentate tanto le

[3] Questa condizione, dunque, esclude esplicitamente qualsiasi procedimento che usi qualcosa come una funzione di tipo *random* (che genera, almeno in teoria, numeri *casuali*; una tecnica di calcolo, si badi, molto usata!). Riprenderemo l'argomento nel paragrafo III.6.

proposizioni come le argomentazioni della metamatematica (come le dimostrazioni, dalla *buona definizione*). D'altra parte, da un punto di vista logico, tale ipotesi non limita in alcun modo le macchine: basti pensare che un normale computer (che maneggia soltanto stringhe binarie di "0" e "1") può rendersi in grado di comandare una qualsiasi operazione (come anche avviare un'altra macchina) e che, in quest'ottica, non ci interessa l'oggetto di *output* in sé ma soltanto una sua rappresentazione simbolica caratteristica. Come conseguenza di tale ipotesi, il *programma* di ogni macchina causa esclusivamente una elaborazione delle stringhe alfa-numeriche di *input* producendo delle stringhe alfa-numeriche di *output*.

Certo, tali chiarimenti riguardo alle macchine placano solo in parte il malcontento circa la necessità di ricorrere ad esse, a tali nuovi concetti informali. Non sarebbe ben più opportuno, per esempio, cercare di ricondurre tale "Struttura meccanica" ad un semplice Sistema matematico? Ma per ora è conveniente rimandare la risposta.

Bisogna notare che nella definizione di *decidibile* si usa il concetto informale di "numerabile" (tale termine dovrebbe, appunto, andare tra virgolette). Tuttavia, vedremo che la convenzione rappresentata dalla *Tesi di Church-Turing* consente, in effetti, di far corrispondere a una qualsiasi collezione *decidibile* un particolare *insieme numerabile*. Per questa ragione, abbiamo omesso e continueremo ad omettere le virgolette.

Se un Sistema assiomatico è eff. ass. allora è formale. Infatti, poiché l'insieme delle dimostrazioni è numerabile, lo è anche quello dei teoremi. Inoltre, in un Sistema *eff. ass.*, la macchina, selezionando in ordine di lunghezza tutte e sole le dimostrazioni, può produrre in uscita tutti e soli i teoremi del Sistema. Ciò può farsi, per esempio, se si conviene che, in ogni dimostrazione propriamente detta, l'ultima stringa debba sempre simboleggiare la conclusione, cioè il teorema stesso. Infine, essendo tutti *outputs* di una macchina, tanto le dimostrazioni come i teoremi non possiedono un ineliminabile carattere semantico. Il Sistema, quindi, rispetta la formalità per quanto riguarda i suoi teoremi e si può allora qualificare come *deduttivamente formale*. Tuttavia, ricordandoci della convenzione semplificativa fatta all'inizio del paragrafo II.14, possiamo trascurare il caso in cui esso è, ciò malgrado, informale a causa di irriducibile semantica in proposizioni che non sono teoremi: una situazione, come spiegato, poco interessante in sé, inusuale e comunque eludibile.

Viceversa: un Sistema assiomatico formale è sempre *eff. ass.*? Dato un arbitrario Sistema formale, per cercare un metodo di riconoscimento "meccanico" delle dimostrazioni, si può anzitutto considerare una generazione combinatoria ordinata di tutte le possibili stringhe finite dei finiti simboli ammessi. Se questi sono i finiti caratteri alfa-numerici, possiamo convenire che le prime "frasi" sono tutte quelle costituite da un solo simbolo in ordine alfa-numerico. Poi considereremo tutte quelle costituite da due simboli e così via, sempre rispettando l'ordine alfa-numerico. Questa sequenza può essere generata senza problemi da una macchina automatica. Prima che venga fuori una stringa che contenga enunciati del Sistema (e quindi possibilmente una dimostrazione), bisognerà "attendere" parecchio; ovvero, le combinazioni che danno luogo a frasi di tal genere sono già soltanto una piccolissima parte di quelle totali. Ma questo è un problema di carattere puramente pratico che per il momento non ci interessa. Successivamente, affinché il Sistema sia *eff. ass.*, la macchina dovrebbe discriminare le suddette frasi in dimostrazioni e non-dimostrazioni. Nulla vieta, però, che ciascuna dimostrazione dipenda in modo singolare ed esclusivo dalla particolare espressione formale dell'enunciato da dimostrare. Vogliamo dire in concreto che, se E è un generico enunciato del Sistema, il ragionamento che conclude che E è un teorema potrebbe dipendere *intrinsecamente* da E; cioè, essere *diverso* per ciascun E (pur senza associare alcun significato ad E). In tal caso, se i teoremi sono infiniti (un'ipotesi di non superfluità per il Sistema, come più volte osservato), potrebbe essere impossibile stabilire un *numero finito di indicazioni non semantiche* che bastino a riconoscere tutte le dimostrazioni. Ovvero, trasferire la logica dimostrativa del Sistema ad una procedura meccanica. Pertanto, sembra ragionevole *dubitare* che ogni Sistema formale sia effettivamente assiomatizzabile. Uno dei principali obiettivi di ciò che segue è proprio scoprire se è così o no.

In un Sistema *eff. ass.*, come abbiamo da poco osservato, la procedura meccanica di decisione delle dimostrazioni si può facilmente modificare in modo da produrre in uscita tutti e soli i teoremi del Sistema (ecco un esempio "positivo" di macchina che non termina, salvo il caso banale in cui il Sistema abbia finiti teoremi); questa proprietà si indica in breve dicendo che i teoremi sono *effettivamente numerabili*. In generale, non vale il viceversa: se una Teoria classica ha i teoremi *effettivamente numerabili* (cioè se esiste una macchina capace di elencare tutti e soli i suoi teoremi), non è detto che sia *eff. ass.* (diremo di più nel par. III.3); comunque, nei casi di interesse pratico questo caso è decisamente insolito.

Se esistessero Sistemi formali non *eff. ass.*, come per logica prudenza abbiamo supposto, i loro teoremi, sempre numerabili, potrebbero non esserlo *effettivamente*, cioè non essere generabili esclusivamente ed esaustivamente da nessuna macchina.

È importante riconoscere che l'*effettiva numerabilità* non implica la *decidibilità*: se una collezione è effettivamente numerabile, la procedura meccanica, leggermente modificata in modo da controllare se un dato oggetto si trova nella lista esclusiva ed esaustiva degli elementi che essa stessa genera, può certamente riconoscere, prima o poi, se un dato oggetto vi appartiene; ma se non vi appartiene, tale procedura non si arresterebbe e resteremmo "per sempre" col dubbio. Dunque, in un Sistema *eff. ass.* non è detto che l'insieme dei teoremi sia *decidibile*.

Affinché lo sia, è sufficiente che anche l'insieme degli enunciati che *non* sono teoremi sia *effettivamente numerabile*: infatti, presenteremmo l'enunciato E ad entrambe le procedure e attenderemmo la prima risposta di una delle due in un tempo finito[4]. La condizione, peraltro, è anche necessaria: se l'insieme dei teoremi è decidibile, la procedura *di decisione* è in grado di elencare esclusivamente ed esaustivamente tanto i teoremi come i non-teoremi: basterà inviargli in *input* tutte le possibili sequenze finite

[4] Non ci si lasci ingannare dai riferimenti al tempo, che hanno il solo scopo di illustrare meglio l'argomento: "rispondere in un tempo finito" o "rispondere prima o poi" equivale semplicemente a "concludere"; mentre "non arrestarsi mai", all'impossibilità di farlo.

dei simboli del Sistema, ordinate in lunghezza ed alfa-numericamente.

Se l'insieme dei teoremi è *decidibile* il Sistema stesso si dice *decidibile*. Bisogna subito avvertire dei pericoli di questa terminologia. Ovviamente, che un Sistema sia *decidibile* non implica che non possa contenere *enunciati indecidibili*, cioè che il Sistema debba essere completo; infatti, se un enunciato I è indecidibile, la decidibilità del Sistema comporta soltanto che una macchina sappia riconoscerlo, cioè concludere che né I né il suo negato sono teoremi. Certamente l'usuale terminologia è in questo caso un pò infelice, ma purtroppo bisogna resistere alla tentazione di modificarla per via della sua ampia diffusione. Una buona norma per scansare confusioni è evitare le forme verbali del verbo "decidere"[5] ed usare solo gli aggettivi *decidibile* e *indecidibile*, precisando sempre se ci si riferisce a un Sistema o a un singolo enunciato.

Certo, la decidibilità di un Sistema matematico, rappresenta un sommo grado di conoscibilità per esso. Avviando, per ogni enunciato E, la procedura meccanica *di decisione*, che termina sempre, con *input* E eppoi riavviandola con *non*E, si potrebbe sempre concludere se esso è un teorema, il negato di un teorema o un enunciato indecidibile. E, pertanto, anche stabilire che il Sistema è incompleto, se lo è (se invece è completo, ciò, in generale, non può concludersi sulla sola base della procedura finita di decisione). Anche il problema della coerenza sarebbe risolto immediatamente: fissato un arbitrario enunciato E, il Sistema sarà coerente se e soltanto se uno almeno dei due enunciati tra E e *non*E non è un teorema. L'estro dei matematici, in tali Sistemi, resterebbe sostanzialmente limitato alla brevità o eleganza delle conclusioni![6] Per loro fortuna, comunque, i Sistemi decidibili sono solo un'utopia. Per cominciare, nei casi reali la coerenza non può che esser sempre *supposta* come vera, come riconosceremo. E solo in qualche caso

[5] Come in: "decidere un enunciato" usato nel senso di "stabilire se è un teorema o no". Infatti, se si è "deciso" un enunciato e il suo negato come non-teoremi, l'enunciato è… indecidibile!

[6] È abbastanza diffusa l'idea che tale determinismo abbia rappresentato "il sogno" di Hilbert; tuttavia, come commenteremo in seguito, è ben più probabile che si tratti di una generalizzazione esagerata.

(che esemplificheremo presto), se essa si ammette, si conclude anche che il Sistema è decidibile.

Un caso triviale di Sistema decidibile è quello di un qualsiasi Sistema classico formale incoerente: in esso, ogni enunciato è un teorema. Pertanto, un Sistema formale *indecidibile*, cioè non *decidibile*, è senz'altro coerente.

Consideriamo ora un Sistema assiomatico *eff. ass.* e coerente. Sia E un suo enunciato qualsiasi; se E è un teorema, la suddetta procedura meccanica di confronto con i teoremi di *output* della macchina è in grado di scoprirlo. Se E non è un teorema, si hanno due casi: nel primo, E è il negato di un teorema e ciò si può scoprire controllando *non*E nel modo descritto; non sfugga che, per farlo, è necessaria l'ipotesi della coerenza. Nel secondo, in cui E è indecidibile, questo procedimento, tuttavia, fallirebbe: esso, infatti, non si arresterebbe e non potremmo concludere niente. Naturalmente, dipendendo dal Sistema, è possibile che esistano differenti procedimenti per tale conclusione; ma, in principio, non si scorgono metodi generali e bisogna quindi dubitarne. Come abbiamo osservato nel paragrafo II.9, per ogni Sistema con modelli e s-completo – e quindi anche per un Sistema formale e coerente – nell'ipotesi in cui tutti i modelli del Sistema siano individuabili (nel peggior caso metamatematicamente; tale ipotesi è *troppo* ottimistica solo per il caso del Sistema TI, come riconosceremo oltre), l'insieme dei teoremi è *distinguibile*: infatti, gli enunciati indecidibili si possono riconoscere mediante la considerazione di opportuni modelli. Quello che, allora, si è appena rilevato è che aggiungendo il fatto che il Sistema formale sia anche *eff. ass.*, oltre che coerente, le cose non cambiano in modo sostanziale: infatti, adesso si disporrà di una procedura meccanica che ci permette di riconoscere i teoremi ed i negati dei teoremi, ma per gli enunciati indecidibili resta ancora, in generale, soltanto la considerazione metamatematica di modelli.

Si direbbe, dunque, che in un Sistema *eff. ass.* e *coerente*, in generale, i matematici non devono temere di essere "rimpiazzati" dagli informatici. Non solo per le ragioni pratiche dovute alle limitazioni fisiche delle macchine; che, di fatto, come vedremo presto, rendono improponibile la risoluzione meccanica di problemi anche di modesta complessità. Ma, appunto, anche per la nonmeccanizzabilità, in generale, di domande come: "è, tale enunciato, indimostrabile?".

D'altra parte, in un Sistema *eff. ass., coerente e completo*, la procedura prima descritta è, ovviamente, *di decisione*: mancando gli enunciati indecidibili, esso classifica tutti gli enunciati in teoremi e non-teoremi, in questo caso coincidenti con i negati dei teoremi. Un tale Sistema sarà quindi *decidibile*; ma si ricordi che per questa conclusione è necessaria l'ipotesi della coerenza. Un esempio importante di questo caso è la Teoria formale dei reali (TFR), ovvero la Geometria euclidea (GE), Sistemi che, come abbiamo segnalato, sono completi: una macchina potrebbe quindi classificare, supponendo la coerenza, ogni loro enunciato. Purtroppo, però, questo fatto riveste un interesse esclusivamente teorico.

Spesso viene affermato che se una collezione è finita è decidibile. Si tratta, evidentemente, di un grave errore. Anzitutto la collezione potrebbe non essere neppure *distinguibile*, come abbiamo osservato in un caso in cui è coinvolta la non individuabilità degli enti (par. I. 12). Ma una collezione finita potrebbe essere distinguibile e non decidibile. Ció succede, ad esempio, se almeno un elemento della collezione ha un carattere irriducibilmente semantico. In questo caso, solo la metamatematica potrebbe discriminare perfettamente tutti gli elementi della collezione, mentre una macchina qualsiasi fallirá. Nel paragrafo III.9 considereremo un esempio assai fondamentale.

Ritorniamo infine all'idea, poc'anzi accennata, circa la possibilità di definire la *procedura meccanica* servendosi semplicemente di un Sistema matematico. Il punto di vista, cioè, è quello di far sì che, per ogni stringa del linguaggio in cui sono espresse le dimostrazioni, gli *outputs*: "questa stringa è una dimostrazione" o "questa stringa non è una dimostrazione", siano semplicemente *teoremi* di un opportuno Sistema matematico, diciamolo S. Non c'è nessuna difficoltà a farlo, ma il punto è che tale proprietà non sarebbe equivalente a quella di *effettiva assiomatizzabilità* prima introdotta. Per poterlo essere, se riflettiamo, dovremmo esser certi che i teoremi di S siano *effettivamente numerabili*, cioè generabili in modo unico ed esaustivo da una *macchina*. Il concetto di macchina, allora, ritornerebbe.

Per tradurre in linguaggio matematico l'idea di *procedura meccanica* è necessaria un'opportuna convenzione: la *Tesi di Church-Turing*, della quale parleremo più oltre.

III.2. Esempi di Sistemi classici *eff. ass.*. Due conseguenze dell'assioma di scelta

L'effettiva assiomatizzabilità è una condizione difficile per i comuni Sistemi classici formali? No davvero. Le quattro regole deduttive classiche posseggono un carattere perfettamente meccanizzabile[7]. Consideriamo, per esempio, il *modus ponens*; per riprodurlo esattamente su una macchina, basta semplicemente programmarla in modo che, avendo "A" e "A→B" come *inputs*, produca "B" come *output*. Qualcosa di analogo si ha per la regola di sostituzione e le rimanenti altre. È anche possibile programmare una macchina in modo da concludere o escludere se una certa deduzione, rappresentata da finiti caratteri alfa-numerici, fa un uso corretto delle sole quattro regole deduttive classiche. Ricordandoci, allora, delle nostre convenzioni generali sui Sistemi classici, cioè che non usino altre regole deduttive oltre a quelle classiche ma soltanto schemi assiomatici e regole grammaticali perfettamente chiare (in particolare fedelmente riproducibili da una macchina), si può ripetere una metadimostrazione del tutto analoga a quella del paragrafo I.9, per concludere che in ogni Sistema classico di tal tipo, *la decidibilità delle dimostrazioni è equivalente alla decidibilità degli assiomi*. In effetti, l'*effettiva assiomatizzabilità* per un Sistema viene comunemente definita mediante la condizione di *decidibilità* per i suoi assiomi. Tuttavia se da ciò si vuol derivare l'*effettiva numerabilità* dei teoremi (come si fa normalmente), bisogna dare per scontato che le regole deduttive del Sistema siano solo quelle classiche o, più in generale, che se la Teoria usa regole deduttive *proprie* esse siano fedelmente meccanizzabili. Ecco perché la nostra

[7] Ammettendo di risolvere le loro "innocenti" ambiguità: si ricordino, a tal proposito, le considerazioni fatte nel paragrafo II.13 sul *modus ponens*.

alternativa, perfettamente equivalente per i Sistemi di comune interesse, sembra più generale.

Peraltro, la decidibilità degli assiomi è una condizione normale per i comuni Sistemi assiomatici classici formali: PA, TFR e lo stesso TI, sono *eff. ass.*. Quest'ultimo fatto potrebbe spingere ad affrettate conclusioni ottimistiche circa l'intera Matematica, ma bisogna ricordarsi del problema della generale *non fedeltà* rappresentativa di TI.

Prima di approfondire il discorso, tuttavia, ci sembra opportuno presentare un esempio concreto di Sistema *eff. ass.*, allo scopo di verificare tangibilmente le loro proprietà. Faremo un esempio semplice ma al tempo stesso generale. Consideriamo un Sistema con un'infinità numerabile di assiomi, A_1, A_2, ... A_n, ..., e due regole di deduzione perfettamente meccanizzabili, D_1 e D_2. Supponiamo che D_1 sia applicabile ad ogni singolo assioma o teorema T, producendo sempre un nuovo teorema Z. Indicheremo tale ragionamento deduttivo con: $D_1(T)\rightarrow Z$. Invece D_2, a imitazione del *modus ponens*, operi su ogni coppia di distinti assiomi e/o teoremi, producendo anch'essa sempre un nuovo teorema. Supporremo inoltre che $D_2(X,Y)=D_2(Y,X)$, cioè che a D_2 non importi l'ordine della coppia a cui si applica, come per il *modus ponens*.

Cerchiamo dapprima un criterio meccanico per generare tutte e sole le dimostrazioni. È ovvio che non possiamo procedere ad arbitrio. Per esempio, l'idea di elencare prima tutte le dimostrazioni che usano D_1 eppoi quelle che usano D_2, non è buona, dato che il primo gruppo è infinito; la stessa difficoltà si incontrerebbe se decidessimo di adoperare A_2 solo dopo aver esaurito tutte le dimostrazioni che usano A_1. Ma il fatto che diversi criteri per elencare l'infinità numerabile degli elementi di una collezione falliscano, non significa che debbano fallire tutti. Un'idea è quella di procedere per "livelli di deduzione". Supponendo di poter disporre soltanto di A_1, applichiamo entrambe le regole deduttive. Poiché la D_2 non si può applicare, otteniamo solo:

$D_1(A_1)\rightarrow T_1$

che completa il primo "livello" di deduzione. Si noti che in questo nostro esempio, gli assiomi non sono teoremi; ma ciò non limita in alcun modo la generalità. Il secondo "livello" spetterà a tutte le possibili, *nuove* deduzioni ottenibili da A_1, T_1, più il prossimo assioma, A_2. Cioè:

$D_1(T_1)\rightarrow T_2$
$D_1(A_2)\rightarrow T_3$
$D_2(A_1,T_1)\rightarrow T_4$
$D_2(A_1,A_2)\rightarrow T_5$
$D_2(T_1,A_2)\rightarrow T_6$

Il terzo "livello" considererà tutte le possibili, nuove, deduzioni ottenibili dagli assiomi e teoremi di cui ora disponiamo, più il prossimo assioma A_3:

$D_1(T_2)\rightarrow T_7$
....
$D_1(T_6)\rightarrow T_{11}$
$D_1(A_3)\rightarrow T_{12}$
$D_2(A_1,T_2)\rightarrow T_{13}$
....
$D_2(A_1,T_6)\rightarrow T_{17}$
$D_2(A_1,A_3)\rightarrow T_{18}$
$D_2(T_1,T_2)\rightarrow T_{19}$
....
$D_2(T_1,T_6)\rightarrow T_{23}$
$D_2(T_1,A_3)\rightarrow T_{24}$
$D_2(A_2,T_2)\rightarrow T_{25}$
....
$D_2(A_2,T_6)\rightarrow T_{29}$
$D_2(A_2,A_3)\rightarrow T_{30}$
$D_2(T_2,T_3)\rightarrow T_{31}$
....
$D_2(T_2,T_6)\rightarrow T_{34}$
$D_2(T_2,A_3)\rightarrow T_{35}$
$D_2(T_3,T_4)\rightarrow T_{36}$

$D_2(T_3,T_5)\rightarrow T_{37}$
$D_2(T_3,T_6)\rightarrow T_{38}$
$D_2(T_3,A_3)\rightarrow T_{39}$
$D_2(T_4,T_5)\rightarrow T_{40}$
$D_2(T_4,T_6)\rightarrow T_{41}$
$D_2(T_4,A_3)\rightarrow T_{42}$
$D_2(T_5,T_6)\rightarrow T_{43}$
$D_2(T_5,A_3)\rightarrow T_{44}$
$D_2(T_6,A_3)\rightarrow T_{45}$

Si ottengono ben 39 nuovi teoremi. Il quarto "livello" opererà su 49 tra assiomi e teoremi e produrrà circa 1200 nuovi teoremi. Il quinto, più di 720000; il sesto è già dell'ordine delle centinaia di miliardi! Questo semplice esempio è sufficiente a farci comprendere il carattere ideale, puramente logico, del nostro tema. Le macchine possono aiutare i matematici e lo hanno già fatto in diverse circostanze (come nella dimostrazione del teorema "dei quattro colori"[8]); ma non è realistico ritenere che possano sostituirsi ad essi per produrre i teoremi di un comunissimo Sistema assiomatico effettivamente assiomatizzabile[9].

Si noti come il metodo produca tutte le possibili dimostrazioni e quindi tutti i possibili teoremi. Infatti, il procedimento procede sia "a ritroso", cioè considerando i teoremi già prodotti, sia "in avanti", quando aggiunge nuovi assiomi. Non è l'unico, come vedremo subito. Peraltro, descriveremo fra poco un lampante criterio *generale* per enumerare tutti e soli gli elementi di una unione infinita numerabile di insiemi infiniti numerabili.

Le dimostrazioni, certamente, si potrebbero scrivere in modo da menzionare, in quanto ad enunciati, soltanto gli assiomi e la conclusione, cioè in forma *estesa* (par. I.9); allora, se gli assiomi

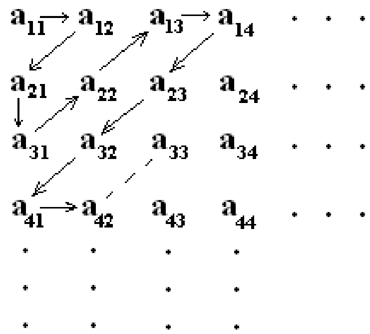
[8] Una presentazione divulgativa in: K. Appel, W. Haken, *Il problema dei quattro colori*, rivista *Le Scienze* n. 113, gennaio 1978.

[9] Almeno, in base alle conosciute leggi fisiche. Considerando una macchina che lavori, in parallelo, *con tutte le particelle dell'universo* e che realizzi ogni deduzione nel tempo che impiega la luce per attraversare un protone, ci vorrebbero circa $7\cdot 10^{67}$ *anni* di lavoro per completare il *decimo* livello di deduzione del Sistema d'esempio (che ha circa $3\cdot 10^{178}$ nuove dimostrazioni). Senza essere ancora arrivati a coinvolgere A_{11}!

sono decidibili, anche le dimostrazioni lo sono (e viceversa). Difatti, il criterio generale *di decisione* delle dimostrazioni, può consistere in un controllo di tipo sintattico sulla prefissata stringa: che non ci siano simboli non ammessi, che le parentesi aperte siano di numero uguale a quelle chiuse, che D_1 e D_2 operino, rispettivamente, con uno e due enunciati distinti, che tutti gli enunciati esplicitamente menzionati siano assiomi e, finalmente, che il teorema finale sia la stringa correttamente prodotta dalle operazioni meccaniche che riproducono il ragionamento; la penultima condizione richiede, appunto, la decidibilità degli assiomi. Un metodo alternativo per generare tutte e sole le dimostrazioni potrebbe, allora, essere semplicemente quello di elencare tutte le stringhe alfa-numeriche, eppoi selezionarle con il descritto controllo sintattico. Naturalmente, sarebbe molto più inefficiente del precedente, perché si scarterebbero tantissime stringhe.

Per quanto riguarda i teoremi, invece, non possiamo concludere la loro decidibilità, malgrado le suddette liste li elenchino tutti. Infatti, esse sono delle stringhe in cui nessuna proprietà, in generale, è relazionata con la posizione nell'elenco generato da una delle due descritte procedure. Per esempio, non è detto che T_{42} sia una stringa più lunga di T_{41} e più corta di T_{43}. Consideriamo, a dimostrazione, il *modus ponens*, che da "A" e "A→B" deduce "B". Nulla vieta che "B" sia una stringa molto più piccola di "A"; se è così, la macchina, subito dopo aver dimostrato il lungo teorema "A→B", genererebbe il corto "B" (qualora avesse in precedenza dedotto "A"). Cioè, "A→B" e "B" sarebbero successivi nella lista, sebbene di lunghezza assai differente. Come per la lunghezza, nessun'altra proprietà, in principio, può guidarci per la ricerca del teorema nella lista né, in particolare, indurci a scartare di dover comprovare, in teoria, infiniti suoi elementi. L'unico metodo meccanico generale che esiste per verificare che un certo enunciato è un teorema, è pertanto il confronto con la lista T_1, T_2, T_3, ... Ma tale metodo concluderà soltanto se è davvero un teorema. Se non lo è, non potrà concluderlo, perché non terminerà.

L'esempio descritto ci ha mostrato che un'unione di insiemi infiniti numerabili può essere numerabile; questo fatto potrebbe sorprendere qualcuno per la circostanza che, se non si è accorti nella scelta del criterio di enumerazione, esso non potrebbe elencare esaustivamente gli oggetti. Ma in verità ciò ha validità generale: *l'unione di una infinità numerabile di insiemi infiniti numerabili è sempre numerabile*. Per concluderlo, siano A_1, A_2, ..., A_n, ... tali insiemi; indichiamo con a_{11}, a_{12}, ... a_{1n} .... gli elementi di A_1: il primo indice si riferisce all'insieme. Facendo lo stesso per gli altri insiemi, si riconoscerà che gli elementi dell'unione di tutti gli insiemi, sono quelli della matrice:



Si vede bene che il movimento delle frecce, perfettamente meccanizzabile (chiamato "del serpente"), è in grado di elencare tutti e soli gli elementi: nessuno gli può sfuggire[10]. Questa deduzione, raggiunta con un'argomentazione assolutamente convincente ma informale, può essere dimostrata formalmente in TI a partire dall'assioma di scelta. Dunque, in questo caso, l'assioma di scelta ci aiuta a dedurre formalmente una proprietà "visiva" assolutamente indiscutibile, qual è il movimento "del serpente".

Tuttavia, come avevamo segnalato, non tutte le conseguenze di tale assioma sono altrettanto ragionevoli. Approfittiamo per segnalare una sua famosa conseguenza "paradossale", nota come "paradosso" di Banach-Tarski: "*è possibile suddividere una sfera (euclidea a tre dimensioni) in un numero finito di parti tali che mediante traslazioni e rotazioni isometriche si possano ricomporre* ***due*** *sfere identiche alla prima*". Qualcosa come la moltiplicazione

[10] Non è l'unico; va anche bene, per esempio, il seguente movimento "dei lati quadrati": a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{23}, a_{13}, a_{14}, a_{24}, ... che percorre i lati delle sotto-matrici quadrate.

dei pani e dei pesci. Il teorema ha carattere non costruttivo: non descrive esplicitamente la decomposizione di cui afferma l'esistenza. È chiaro, comunque, che a tali porzioni non può associarsi alcun valore numerico *misura* che sia corrispondente a quello del mondo fisico. In effetti, come altre volte, non c'è alcun vero paradosso, ma "solo" il fatto che, appunto, nessun concetto di "misura" può definirsi per *ogni* porzione tridimensionale. Ne consegue anche che non è possibile definire alcuna misura, invariante per traslazioni, per ogni sottoinsieme della retta reale[11]. Restando indiscutibile la "follia" del risultato, queste conseguenze, tutto sommato, non sono così catastrofiche come molti affermano. Il fatto rassicurante è che le porzioni non misurabili interessate alla "moltiplicazione", non concepite dalla nostra comune intuizione, non vengono effettivamente esibite. La Matematica da sempre ci abitua all'esistenza di oggetti di tale specie: sembra inevitabile che essi debbano accompagnarsi a quelli, più intuitivi, che mediante essa si voleva descrivere. In fondo, basta la normale e ben accettata interpretazione analitica della Geometria per ottenere conseguenze altrettanto "paradossali", sia nel piano che nello spazio. Per esempio, se si ammette *sempre* la possibilità di assegnare una massa non nulla e non infinitesima ad ogni segmento *proprio* (cioè non degenere in un punto), si può ottenere che un rettangolo *proprio* (cioè non degenere in un segmento) ha massa infinita perché contiene infiniti segmenti *propri* distinti. Ad un analogo assurdo si giunge anche supponendo di poter assegnare, in ogni circostanza, una massa non nulla e non infinitesima ad ogni rettangolo *proprio*: un parallelepipedo *proprio* (cioè non degenere in un rettangolo), poichè contiene infiniti rettangoli *propri* distinti, avrebbe anch'esso massa infinita. Che speciale particolarità avrebbe il caso tridimensionale affinché ció non possa ripetersi per un parallelepipedo *proprio* (cioè non degenere in un rettangolo)? Sembra che simili ragioni sarebbero legate soltanto alla nostra incapacità *fisica* di osservare più dimensioni spaziali; ma tale limitazione, ovviamente, non riguarda la Teoria geometrica in sè. Anche la *misura* di un parallelepipedo

[11] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, 1905, in: "G. Vitali, Opere sull'analisi reale e complessa – Carteggio", Unione Matematica Italiana, Bologna, 1984.

proprio deve essere vista come infinitesima qualora si voglia che un iper-parallelepipedo, a quattro dimensioni, *proprio* (cioè non degenere in un parallelepipedo) abbia l'analoga *misura* (di massa, di volume, etc.) finita. E si noti che una sfera infinitesimale scantonerebbe il "paradosso" di Banach-Tarski. Se, poi, quest'ultima proprietà non la si desidera (ad esempio, per rendere lo Spazio geometrico più affine a quello fisico), ciò dovrebbe essere esplicitamente imposto al Sistema geometrico; ma, poiché normalmente non si fa niente di simile, non sembra nemmeno sensato pretendere che a ogni parallelepipedo *proprio* possa *sempre* associarsi una *misura* non nulla e non infinitesima.

Forse il ruolo dell'assioma di scelta nel "paradosso" di Banach-Tarski è soltanto quello di "detonatore" dell'inimmaginabilità e non *fisicità* del continuo. Come altre volte, il disagio rappresentato da tali risultati contro-intuitivi rivela soltanto la presunzione che la Teoria matematica adottata riproduca esattamente il mondo reale che con essa volevamo rappresentare; quando le lamentele prevalgano sulle approvazioni, si modifichi il Sistema matematico.

III.3. La Tesi di Church-Turing

Ricerchiamo adesso il modo di tradurre in linguaggio formale il concetto di *procedura meccanica*. Consideriamo una generica macchina che con gli n inputs i_1, i_2, ... ,i_n abbia prodotto, dopo l'arresto (che supponiamo) gli m outputs o_1, o_2, ..., o_m. Ricordando che ogni i_i ed ogni o_i è una stringa finita dei finiti caratteri alfa-numerici, possiamo assegnare un *codice numerico* ad ogni simbolo e rappresentare ogni stringa con un numero naturale. Facciamo un esempio concreto: supponiamo che la macchina sia un forno elettrico, comandato mediante parole, con i due inputs i_1, "accendere" e i_2, "selezionare la temperatura a 230 gradi". Ammettiamo per semplicità che i caratteri alfa-numerici siano soltanto i 26 alfabetici minuscoli più i 10 numerici, la virgola e lo spazio bianco per separare le parole, per un totale di 38 (in realtà si includono, naturalmente, molti altri caratteri, come le maiuscole, i simboli per le operazioni, di interpunzione, etc.). Possiamo allora stabilire un codice a due cifre del tipo: "01" per "a", "02" per "b", ... , "26" per "z", "27" per "0", "28" per "1", ... , "36" per "9", "37" per "," e "38" per lo spazio bianco " ". Dunque, i_1 sarà la stringa: "01030305...". Facendo lo stesso con i_2, si ottiene "170510...". Poiché anche la virgola ha un codice, possiamo infine *codificare in numero l'intera sequenza degli ingressi* "i_1, i_2": "01030305...37170510...". In definitiva, mediante un opportuno codice, l'ingresso, ovvero l'intera sequenza degli inputs, si può rappresentare mediante *un solo* numero naturale; lo stesso vale, analogamente, per la sequenza degli outputs. Tutta l'informazione contenuta negli inputs/outputs è riproducibile a partire dal numero, incluso lo stesso numero di inputs/outputs: nel nostro caso, la sequenza "37" ci indica, appunto, l'inizio di un nuovo input/output (ovviamente, se si vuole usare il simbolo "," all'interno di un input/output, si potrà usare un diverso nuovo carattere, come "/", di nuovo codice "39", per separare diversi inputs/outputs). Molti dei lettori sapranno che, effettivamente, esiste un codice numerico standardizzato di questo tipo, chiamato ASCII; il quale, inoltre, rappresenta ogni carattere in codice numerico binario, per semplificare le modalità di calcolo nei computer. Infatti, due sole cifre, come ad esempio "0" e "1" sono sufficienti per qualsiasi codificazione. Comunque, per il nostro punto di vista, cioè per l'aspetto logico, questa semplificazione non è affatto necessaria.

Ogni procedura meccanica, pertanto, può considerarsi come una elaborazione di un numero naturale di ingresso che, se termina, termina con la generazione di un numero naturale di uscita. Sulle prime, potrebbe sorprendere questo indissolubile legame delle macchine con i numeri naturali, ma in realtà non c'è nulla di misterioso: non è che la conseguenza di avere richiesto che tanto gli inputs come gli outputs siano finiti, di numero finito e rappresentabili mediante la combinazione di un numero finito di simboli. Questa sorta di discretizzazione sembra necessaria in ogni macchina concreta. Come esempio ipoteticamente contrario, immaginiamo, avendo "in ingresso" un numero reale, di stabilire se sia maggiore di 2. Sembrerebbe che tale compito possa essere eseguito da una macchina perché basterà controllare un numero finito di cifre per rispondere. Soltanto, che l'ingresso è di tipo "mentale": un numero reale ha in generale infinite cifre, tutte "imprevedibili", che mai possono essere messe in ingresso ad una macchina reale. Questa, limitando necessariamente il numero delle cifre, di fatto lavorerà con numeri razionali; anzi, con numeri naturali, grazie alla corrispondenza biunivoca di questi con i razionali. Anche introducendo un numero reale in una forma operazionale sintetica (come $\sqrt{3}$, per esempio), la macchina dovrebbe in realtà effettuare un calcolo di lunghezza infinita per ottenere tutte le cifre del numero "in ingresso"; e, inoltre, *nemmeno si possono introdurre così tutti i reali*, se usiamo i finiti caratteri alfa-numerici (o, più in generale, un'infinità numerabile di simboli): infatti, tutte le possibili combinazioni di questi sono soltanto numerabili, mentre i numeri reali sono $2^{\aleph_0}$. Come sappiamo, unicamente ricorrendo a ineliminabile semantica potremmo realizzare (certo in principio, non di fatto) una denotazione di questo tipo; ma nessuna macchina, per definizione, potrebbe decifrarla, assegnando valori diversi ad una medesima stringa di ingresso.

Un'elaborazione meccanica, pertanto, consiste in un'operazione *aritmetica* (cioè che si effettua su numeri naturali per produrre, in caso di arresto, un altro numero naturale), in cui non entrano comportamenti casuali né interventi che richiedono originalità, inventiva o speciale intelligenza. Sembrerebbe proprio che si tratti di un calcolo che può essere effettuato all'interno di una Teoria aritmetica formale sufficientemente potente.

Il *programma* della macchina è una lista finita di *istruzioni*; possiamo partire dalla semplice ipotesi che ogni istruzione basica sia riconducibile ad un numero finito di operazioni di somma e prodotto di numeri naturali, più la possibilità di registrare il risultato in una memoria. Quest'ultima operazione si chiama sinteticamente *assegnamento* (sottinteso *in memoria*). La macchina esegue le istruzioni una dopo l'altra e termina sempre, se, come stiamo supponendo, ogni istruzione è realizzabile. La segnalazione dell'arresto è proprio l'ultima istruzione. Cos'altro può fare una macchina? Fin qui, è come una calcolatrice tascabile (delle più semplici, cioè non programmabile) che visualizza sempre qualcosa (eventualmente "errore") quando si preme "=". Ma una generica macchina può anche non fermarsi. Una possibile e fattibile evoluzione si ha imponendo, ad esempio, che una macchina possa avviare un'altra macchina; poiché questa può riavviare la prima, si include anche il caso in cui ri-avvii sé stessa. Questa opportunità, chiaramente, rende possibile che l'elaborazione non termini. Per generalizzare il più possibile, basta ammettere che la macchina possa riavviare una parte di istruzioni del suo stesso programma (se una macchina chiama un'altra macchina possiamo considerare l'unica macchina costituita da entrambe). Se il numero di volte in cui tale parte è riavviata è prestabilito con esattezza, allora, dal punto di vista logico, quest'evoluzione è solo una semplificazione del caso precedente e il calcolo termina sempre. Per esempio, un'istruzione che dicesse "ripetere il gruppo di istruzioni comprese tra la numero 7 e la numero 29, 2300 volte" non fa che accorciare un programma altrimenti lunghissimo; ma dal punto di vista logico non c'è un vero progresso. L'effettiva novità, invece, si ha quando il numero di cicli da effettuare non è a priori conosciuto; ciò si può realizzare mediante un'*iterazione condizionata*. Per esempio, consideriamo un programma che, dati due numeri naturali n ed m, calcola il più piccolo naturale k tale che $n \cdot k = m$. Il programma sarebbe il seguente:

1. Metti nella memoria A il valore numerico dell'input n
2. Metti nella memoria B il valore numerico dell'input m
3. Metti nella memoria C il valore numerico 0
4. Moltiplica il valore numerico di A per quello di C e mettilo nella memoria D
5. Se il valore numerico di D è uguale a quello di B, salta all'istruzione numero 8
6. Somma 1 al valore numerico di C e rimettilo in C
7. Salta all'istruzione numero 4
8. Stampa in uscita "la risposta è" seguita dal valore numerico di C
9. Termina

Come si può constatare, il programma fornisce sempre la risposta esatta se m/n è un numero naturale. Altrimenti il gruppo delle istruzioni 4–7 si ripeterebbe, in teoria, all'infinito. "In teoria", perché dopo un certo tempo la macchina, se è ben fatta, saprà segnalare, in uscita, che gli si richiede un calcolo troppo grande che non è più capace di eseguire. Infatti, i valori di D e di C crescono indefinitamente e ogni macchina reale è limitata nella sua rappresentazione dei numeri. Ma questa è solo una circostanza dell'esempio: non sempre i cicli infiniti provocano errori di "troppo grande", "troppo piccolo" o qualche altro riconoscibile dalla macchina. Per esempio, per limitare la grandezza dei numeri, potremmo inserire tra 6 e 7 l'istruzione "se il valore numerico di C è maggiore di 1000, assegna a C il valore numerico 1". Ora, se la macchina può lavorare con numeri grandi almeno fino a $1000 \cdot n$, continuerà davvero all'infinito (finché avrà energia o non si rompa...).

Il nostro esempio è banale, ma può essere generalizzato facilmente: lo stesso schema è capace di trovare, se esiste, il minimo valore di k tale che sia soddisfatta una generica condizione $C(n_1, n_2, ..., n_p, k)$. Al variare della condizione, si ottiene una classe di problemi tutt'altro che banale che, come detto, arricchisce la tipologia del calcolo, pur con l'inconveniente della possibilità di ciclo infinito, cioè di non fermata; il quale rappresenta, appunto, il caso in cui il suddetto minimo non esiste.

Ridomandiamoci, adesso, se una macchina possa ancora fare dell'altro. La convinzione che si è raggiunta è che *null'altro* (a parte calcoli che facciano uso dell'accennata generazione di numeri casuali, della quale riparleremo più tardi). Questa conclusione empirica, chiamata *Tesi di Church-Turing*, è corroborata principalmente dai seguenti fatti:

1. Esistono diversi modelli[12] elementari, rigorosamente definibili, rappresentativi delle macchine (*funzioni ricorsive*, *macchina di Turing*, *λ–calcolo*, *macchina RAM* ed altri) e sono tutti tra loro equivalenti (ed equivalenti allo schema da noi sinteticamente tracciato).

[12] Evidentemente, qui ci riferiamo al tradizionale significato di "modello matematico": cioè un insieme di proposizioni e condizioni matematiche che dovrebbero riprodurre il comportamento di una determinata struttura reale.

2. Di questi, il modello più famoso, la *macchina di Turing*, fu ottenuto con l'obiettivo di simulare l'attività di un *essere umano* (l'essere più fantasioso; almeno, dal punto di vista umano...) che esegue calcoli con un criterio di tipo deterministico, senza che la *Tesi di Church-Turing* fosse ancora stata affermata.

3. Tutti i tentativi di allargare il campo della calcolabilità sono finora falliti.

Una linea di ricerca che generalizza le *macchine di Turing* rivela che una macchina che ammettesse un'*azione a distanza* istantanea potrebbe violare la *Tesi di Church-Turing*[13]. Poiché la meccanica quantistica ammette tale principio[14], si potrebbe pensare che un calcolatore quantistico potrebbe violare la *Tesi di Church-Turing*. Ma, anche se la questione non può dirsi chiusa, tutti gli attuali modelli quantistici di calcolo non violano la Tesi. Ci sembra comunque conveniente rimandare a più tardi la discussione circa il significato e la validità della *Tesi di Church-Turing*, che, non sorprendentemente, ha dato luogo ad alcune controversie.

Il modello matematico delle macchine più facilmente formalizzabile in TI è costituito dalle *funzioni ricorsive*. La definizione rigorosa e dettagliata di tali funzioni non è concettualmente difficile o complessa e il lettore interessato può facilmente reperirla nei testi di Logica. Per i nostri scopi è sufficiente una descrizione riassuntiva. Le *funzioni ricorsive* sono tutte le funzioni definite in N^m (con m un arbitrario numero naturale) e a valori in N, che si possono ottenere mediante *composizione*, *ricorsione* e *minimalizzazione* a partire da alcune funzioni *elementari*, che si assumono *ricorsive* per convenzione. Le funzioni *elementari* sono: la *funzione nulla* (che vale sempre 0), la *funzione*

[13] Gandy, R., *Church's thesis and principles for mechanisms*, in The Kleene Symposium, p. 123-148, North Holland, Amsterdam (1980).

[14] Per esempio, l'osservazione di una particella in un dato luogo fa "sparire" istantaneamente quella parte del suo gruppo di onde che si trova altrove, anche ad una distanza grandissima. Una particella, infatti, è rappresentata da un insieme di onde; ad ogni onda è associato un numero che rappresenta fisicamente la probabilità che la particella sia effettivamente rivelata in quel luogo.

successore (cioè f(n)=n+1) e tutte le *funzioni di proiezione* (cioè, fissata una generica m-upla (n_1, n_2, ..., n_m), le *m* funzioni che associano a tale m-upla uno solo dei numeri della stessa m-upla; in concreto: $f_1(n_1, ..., n_m)= n_1$, $f_2(n_1, ..., n_m)= n_2$, ... $f_m(n_1,..., n_m)= n_m$).

Una funzione f si dice ottenuta per *composizione* delle due funzioni g ed h, semplicemente se: f(n)=g(h(n)). Una funzione f si dice definita per *ricorsione* attraverso le due funzioni g ed h, se viene definita mediante il seguente schema informale:

$$f(0, n_1, ..., n_m)= g(n_1, ..., n_m)$$
$$f(n+1, n_1, ..., n_m)= h(n, f(n, n_1, ..., n_m), n_1, ..., n_m)$$

Formalmente, è la definizione implicita:

$$(f(0,n_1,..,n_m)=g(n_1,..,n_m))e(\forall n\in N(f(n+1,n_1,..,n_m)= =h(n,f(n,n_1,..,n_m), n_1, ..., n_m)))$$

Come semplice esempio delle tantissime comuni funzioni che possono essere definite per *ricorsione*, possiamo citare la funzione esponenziale m^n:

$$m^0 = 1$$
$$m^{n+1} = m^n \cdot m$$

Ma, addirittura, anche il prodotto aritmetico "·" può essere definito per *ricorsione* della funzione somma "+": perciò non è necessaria una funzione prodotto *elementare*.

Finalmente, si dice che la funzione f è definita per *minimalizzazione* a partire dalla funzione g, quando:

$$f(n_1, ..., n_m)= \text{minimo valore di n tale che: } g(n_1, ..., n_m, n)=0$$

Correttamente formalizzata in TI, tale condizione sarebbe:

$$(f(n_1...n_m)=n)\leftrightarrow(\exists n\in N((g(n_1...n_m,n)=0)e(\forall m\in N(((m\neq n)e(g(n_1....n_m, m)=0))\rightarrow(n<m)))))$$

in cui si usa il predicato "<". Si riconosca come questa condizione corrisponda esattamente al precedente schema di *iterazione condizionata*: qui n indica *k* e la condizione $g(n_1,..,n_m,n)=0$ è quella prima chiamata $C(n_1, n_2, ..., n_p, k)$. In effetti, con la *minimalizzazione* si formalizza anche il caso di *non fermata* della macchina: ad esso corrisponde il caso in cui tale minimo, n, non esiste e alla funzione $f(n_1, ..., n_m)$ non può associarsi un valore numerico. Viceversa, quando n esiste, rappresenta il codice dell'insieme degli outputs, compreso quello che segnala l'arresto. Comunemente, quando n non esiste, si dice che la funzione "non è definita", ma con ciò non si deve intendere che essa non sia rappresentabile in linguaggio matematico, né che non rappresenti il calcolo di una macchina: rappresenta, come detto, un calcolo meccanico che non termina. Come esempio concreto, consideriamo la funzione f definita per *minimalizzazione* a partire dalla funzione $g(4,m,n)=m\cdot n–4$ (anche la sottrazione si può, infatti, definire ricorsivamente). Poiché la g è ricorsiva, anche la f è ricorsiva:

$$f(4, m)= \text{minimo valore di n tale che: } m\cdot n–4 = 0$$

Osservando che n= 4/m, concludiamo che: a) se esiste un valore di n che soddisfa la condizione, esso è unico; b) n esiste solo per i tre valori di m: 1, 2 e 4. In tutti gli altri casi, per esempio per m=17, n non esiste e la funzione f "non è definita"; ma ciò non significa che la scrittura f(4, 17) sia priva di significato. La sua definizione implicita, infatti, si ottiene particolarizzando per m=17 la definizione formale della f:

$$(f(4,17)=n)\leftrightarrow(\exists n\in N((17\cdot n\text{-}4=0)e(\forall p\in N(....\rightarrow(n<p)))))$$

Che poi tale *n* non esista, cioè che l'enunciato a destra di "↔" sia falso, é un fatto diverso che, certamente, non toglie significato all'espressione. Naturalmente, si può anche decidere di indicare la f con 4/m e ottenere che tale espressione abbia significato per ogni m, anche se poi soltanto in tre casi rappresenta un numero naturale.

Come anticipato, si può metadimostrare che l'uso di un qualsiasi altro modello in grado di rappresentare i calcoli di una macchina qualsiasi è equivalente all'uso delle funzioni ricorsive. Tale metadimostrazione può vedersi come un semplice riconoscimento che la rappresentazione mediante funzioni del modello in esame, per esempio, della *macchina di Turing*, conduce ad una classe di funzioni equivalente alle funzioni ricorsive; si tratta, invero, di un tipo di conclusione che non lascia spazio a discussioni.

Disponendo delle funzioni ricorsive, la *Tesi di Church-Turing* si esprime affermando che: a) l'elaborazione di una qualsiasi macchina è rappresentabile mediante una funzione ricorsiva; b) data una qualsiasi funzione ricorsiva, esiste sempre una macchina che riproduce effettivamente tale funzione. Per il secondo punto, non ci sono dubbi: per come sono state definite le funzioni ricorsive, chiunque riconoscerà che è sempre possibile programmare una macchina in modo da riprodurle. È teoricamente facile scrivere un programma meccanico per il calcolo delle funzioni *elementari* e di quelle da queste ottenibili per *composizione* e *ricorsione* (si prenda, come esempio, la funzione esponenziale). Abbiamo anche visto, in concreto, come si realizza meccanicamente una *minimalizzazione*. Le difficoltà nel programmare, in generale, sono dovute piuttosto alla complessità della funzione che si deve rappresentare (si pensi alla varietà di effetti diversi che un comune programma informatico deve fornire in risposta agli inputs dell'utente). Diciamo, allora, che il punto b) si può considerare un indubitabile metateorema. È il punto a), invece, che fomenta discussioni; ma ne riparleremo più avanti.

Bisogna precisare che l'intero programma di una macchina, essendo una successione di istruzioni rappresentabili con funzioni ricorsive, è esso stesso rappresentabile con un'unica funzione ricorsiva (ciò segue facilmente dalle proprietà definitorie delle funzioni ricorsive). Come conseguenza, il programma di una qualsiasi macchina è anch'esso sempre rappresentabile da un numero finito di caratteri alfa-numerici: al limite, proprio attraverso la definizione della funzione ricorsiva che gli corrisponde.

Passiamo adesso a tradurre sia l'*effettiva numerabilità* che la *decidibilità* in termini di funzioni ricorsive. In TI, diremo che un insieme di numeri naturali L é *ricorsivamente numerabile* se esiste una funzione ricorsiva f_L tale che:

$$\forall\, n\in N((n\in L\rightarrow f_L(n)=1)\, e\, (n\notin L\rightarrow \textit{non}\, \exists\, m\in N(m=f_L(n))))$$

Informalmente:

$$f_L(n)=\begin{cases} 1, \text{ se } n\in L \\ \text{"non definita", se } n\notin L \end{cases}$$

Il valore numerico "1" (cui normalmente si assegna il valore semantico "vero") non è importante e può essere sostituito da un qualsiasi altro; l'essenziale è che alla funzione $f_L(n)$ corrisponda un valore numerico (cioè che "sia definita") per ogni n appartenente a L, mentre non deve associare alcun valore per ogni n non appartenente a L.

Invece, un insieme di numeri naturali R si dice *ricorsivamente decidibile* (o semplicemente *ricorsivo*[15]), se esiste una funzione ricorsiva f_R tale che: $\forall\, n\in N((n\in R\rightarrow f_R(n)=1)\, e\, (n\notin R\rightarrow f_R(n)=0))$. Di nuovo, i valori numerici "0" e "1" non sono importanti: basta che siano diversi. Informalmente:

$$f_R(n)=\begin{cases} 1, \text{ se } n\in R \\ 0, \text{ se } n\notin R \end{cases}$$

Se un insieme è *ricorsivamente decidibile* è anche *ricorsivamente numerabile*. Infatti, si può sempre considerare una funzione ricorsiva, diversa da quella che caratterizza la *ricorsiva decidibilità*,

[15] Che è la scelta comune; in verità, un pò ambigua: infatti, la Tesi di Church-Turing spinge a confondere i termini *ricorsivo* e *meccanizzabile*. Ma, per un insieme, quest'ultimo aggettivo non implica, in generale, *decidibilità*: un insieme solo *effettivamente numerabile* è, in un certo senso, ugualmente *meccanizzabile*.

che coincide con questa se $n \in R$ e che sia non definita se $n \notin R$ (nel nostro caso, per esempio, può essere la funzione $1/f_R(n)$).

Ciò premesso, sia P una qualsiasi collezione di proposizioni alfa-numeriche *effettivamente numerabile*. Codificando mediante numeri naturali i simboli alfa-numerici, si può far corrispondere a ciascuna proposizione un numero naturale; e, pertanto, a P un insieme di numeri naturali. Quest'ultimo insieme, diciamolo L, formalizzato rigorosamente in TI, dev'essere *ricorsivamente numerabile*. Infatti, per ipotesi, esiste una macchina che, con input tutti i numeri naturali, è capace di elencare tutti e soli i numeri che sono codici di proposizioni di P, quantunque, in generale, senza essere in grado di *escludere* nessuno. Allora, per la Tesi di Church-Turing, deve esistere una funzione ricorsiva che assume un valore costante *v* (cui potrà darsi il significato di "sì, appartiene a L, ovvero è il codice di una proposizione di P") in corrispondenza di questi stessi numeri, mentre in corrispondenza di qualsiasi altro numero assumerà un valore diverso da *v*, oppure sarà non definita. In ogni caso, però, si potrà sempre costruire un'altra funzione ricorsiva che, discriminando gli eventuali valori diversi da *v*, risulti non definita se e solo se $n \notin L$.

Vale anche il viceversa: se l'insieme di naturali L che, nella codificazione, rappresenta la collezione P è *ricorsivamente numerabile*, allora la collezione P è *effettivamente numerabile*. Infatti, basta considerare una macchina che per i valori di n in cui la funzione ricorsiva $f_L(n)$ assume un qualsiasi valore finito (non necessariamente 1) stampi la proposizione di codice n. Essa, che esiste per la Tesi di Church-Turing, produrrá tutte e sole le proposizioni di P.

Allo stesso modo, si può concludere facilmente che, se P è una qualsiasi collezione di proposizioni alfa-numeriche *decidibile*, esiste in TI un insieme *ricorsivamente decidibile* che gli corrisponde secondo la codificazione. E viceversa.

In altri termini, TI riesce a riprodurre, servendosi delle funzioni ricorsive, l'*effettiva numerabilità* e la *decidibilità* di una qualunque collezione di proposizioni: l'esito della Tesi di Church-Turing è quello di rendere equivalenti i termini "*ricorsivamente*" ed "*effettivamente*".

Finalmente, consideriamo un generico Sistema classico S *fedelmente* rappresentabile in TI. Allora, per definizione, tutti i suoi teoremi sono riproducibili e riconoscibili in TI, mediante corrispondenti teoremi di TI. Dall'effettiva assiomatizzabilitá di TI segue allora che i teoremi di S sono *effettivamente numerabili*. Questo non implica, in generale, che S sia *eff. ass.*: infatti, per gli assiomi, come per i teoremi, possiamo solo dedurre che sono *effettivamente numerabili* (non necessariamente *decidibili*). D'altra parte, in un Sistema in cui gli assiomi sono soltanto effettivamente numerabili (che non è incompatibile con il fatto che siano *distinguibili*, come vuole la *buona definizione*), anche le dimostrazioni lo sono (ripetendo la metadimostrazione del par. I.9) e, pertanto, anche i teoremi. Dunque questo caso, nella pratica certamente inusuale, è ugualmente abbastanza "buono", perché tutti e soli i teoremi della Teoria si possono ancora ottenere meccanicamente. Chiaramente, come caso particolare comune ed importante di Sistemi *fedelmente* rappresentabili in TI, c'è quello dei Sistemi *eff. ass.*.

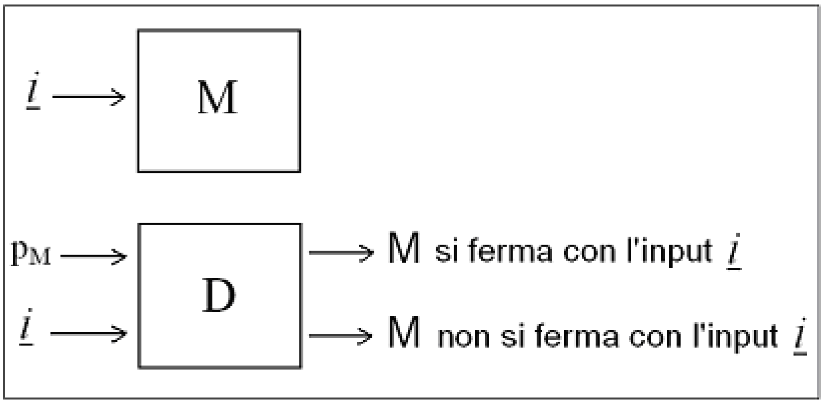
Vale anche il viceversa: se S è un Sistema classico i cui teoremi (ovvero gli assiomi, per quanto appena osservato) sono *effettivamente numerabili*, allora esso è *fedelmente* rappresentabile in TI. Non ammetterlo, significherebbe supporre, per quanto detto, che TI non riesce a concludere che un certo naturale (la codifica di un certo teorema di S non riproducibile in TI) fa parte di un insieme *ricorsivamente numerabile*; il che potrebbe ammettersi solo se in TI non fosse definibile qualche funzione ricorsiva: assurdo, per definizione stessa di funzione ricorsiva.

In definitiva, come conseguenza della Tesi di Church-Turing, *i Sistemi non fedelmente rappresentabili in TI sono tutti e soli quelli i cui assiomi non sono effettivamente numerabili*; in particolare, tali Sistemi non possono essere, naturalmente, effettivamente assiomatizzabili.

III.4. Metateorema di Church-Turing

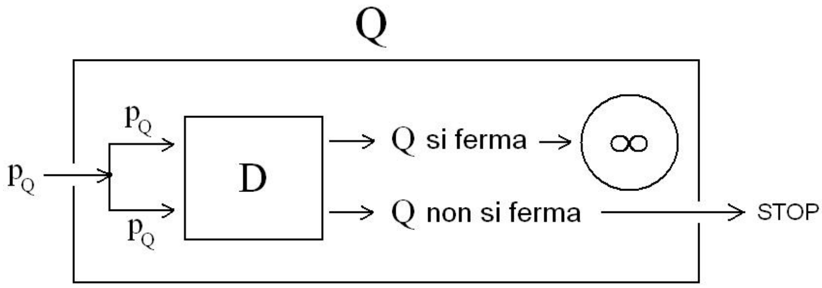
Ora metadimostreremo per assurdo che se TI è coerente, allora è incompleto.

Consideriamo un *arbitrario* input (i_1, i_2, ... ,i_p), che abbrevieremo spesso con $\underline{i}$, e mettiamolo all'ingresso di un'*arbitraria* macchina; considerando che il caso in cui la macchina non fa nulla non è che un caso particolare di *arresto* (perché la macchina resta nello stato di *arresto*), possiamo affermare che, in tutti i casi, la macchina si arresta o non si arresta; si badi che non stiamo ammettendo che noi si riesca a scoprirlo, ma solo il fatto banale che essa si ferma o no. Detta f_R la funzione ricorsiva che riproduce i calcoli della macchina ed n il numero naturale che, nella codificazione scelta, rappresenta l'ingresso (i_1, i_2, ... ,i_p), consideriamo l'enunciato di TI: $\exists m \in N(f_R(n)=m)$; esso, per quanto detto, traduce in TI il fatto che la macchina si arresta con l'ingresso (i_1, i_2, ... ,i_p). Ora, ricordiamo che dai *meta*teoremi di s-completezza e di correttezza, deve esistere almeno un "modello" corretto di TI (che è stato supposto coerente). Interpretato in tale "modello", allora, tale enunciato traduce *correttamente* il caso in cui tale macchina si ferma con detto ingresso; mentre il suo negato, *correttamente* quello in cui non si ferma. Ma dalla supposta completezza di TI, tale enunciato o il suo negato è un teorema. Dunque, in base alle ipotesi, TI è sempre in grado di dedurre correttamente se una macchina qualsiasi si ferma o non si ferma con un qualsiasi ingresso. Da qui non deriverebbe niente di assurdo; se non fosse per il fatto che, essendo TI stesso *eff. ass.*, esiste una *macchina*, diciamola D, capace di produrre tutti e soli i suoi teoremi. Allora, D sarebbe capace di riconoscere se una qualsiasi macchina si ferma o non si ferma con un input arbitrario; e ciò vale anche per la stessa D o per una macchina che contiene D. Che ciò è impossibile fu scoperto da Turing: si tratta del famoso *problema dell'arresto*. Per concluderlo, descriviamo il funzionamento della D. Essa deve ricevere in ingresso il programma della generica macchina M (ovvero la definizione della funzione ricorsiva che rappresenta M) ed il generico input $\underline{i}$ applicato alla macchina M; con tali ingressi deve arrestarsi sempre, fornendo una sola di due possibili risposte, che si possono anch'esse considerare in forma alfa-numerica: "M si ferma con l'input $\underline{i}$" e "M non si ferma con l'input $\underline{i}$". Ciò conferma, intanto, che D può rispettare la convenzione, ammessa per tutte le macchine, di lavorare solo con inputs ed outputs alfa-numerici. Nel seguente schema, supponiamo che il generico programma, p_M, della macchina M da analizzare, debba inviarsi nel canale superiore dell'ingresso di D, mentre l'input $\underline{i}$ di M in quello inferiore.



Macchina generica M e macchina decisionale D

Costruiamo ora una macchina, Q, il cui input venga mandato in entrambi i canali di una macchina D; inoltre, l'uscita "si ferma" della macchina D avvii un ciclo infinito (ciò si può far sempre: per esempio, l'istruzione n. 8 sia: "salta all'istruzione n. 25"; mentre la n. 25: "salta all'istruzione n. 8"), mentre quella "non si ferma", termini il funzionamento della Q. Infine, chiediamoci cosa succede se mandiamo in input alla Q *il suo stesso programma* p_Q, come nella seguente figura.



Se con input p_Q la macchina Q si ferma, allora D, al suo interno risponderà "Q si ferma" e verrà eseguito il ciclo infinito; pertanto, la macchina Q non si ferma: impossibile. Allora Q non si ferma e D, al suo interno, risponderà "Q non si ferma" e allora... la macchina Q si ferma. Di nuovo impossibile.

Questo metateorema si può applicare, più in generale, ad un qualsiasi Sistema classico coerente, in cui si possono rappresentare tutte le funzioni ricorsive e i cui assiomi siano effettivamente numerabili. L'ipotesi di coerenza garantisce, essendo il Sistema certamente *formale*[16], l'esistenza di un modello corretto, per i teoremi di s-completezza e di correttezza. Per quanto riguarda le funzioni ricorsive, non si richiede, naturalmente, che esse siano definibili formalmente nella Teoria in questione: ciò si può fare solo all'interno di TI, perché solo qui il concetto di funzione (che è un insieme) è formalizzabile. Si richiede soltanto che esse si possano rappresentare operativamente nel linguaggio della Teoria. Per esempio, la funzione $g(4,m,n)=m\cdot n-4$ del paragrafo precedente, può essere rappresentata operativamente in PA dall'enunciato $\exists k(k=m\cdot n-4)$ (la sottrazione si può infatti definire in PA). Il caso in cui l'enunciato è vero, se esiste, corrisponde a quello in cui la funzione associa il naturale k alla terna (4,m,n); quello in cui è falso, se esiste, al caso in cui non associa nulla a tale terna (o, rozzamente,

[16] La metadimostrazione, vista nel paragrafo III.1, del fatto che un Sistema *eff. ass.* è formale (inclusa la conclusione che, nelle sue dimostrazioni, la semantica è eliminabile) vale, così com'è, anche nel caso più generale in cui esso ha gli assiomi (ovvero i teoremi, per quanto osservato nel paragrafo precedente) effettivamente numerabili. Oppure, ricorsivamente numerabili: caso in cui la formalità gli deriva dalla stessa formalità delle funzioni ricorsive.

in cui la funzione "non è definita"). La funzione ricorsiva f(4,m), definita per minimalizzazione a partire dalla g, si può, invece, esprimere in PA nel seguente modo:

$$\exists n((m\cdot n-4=0)\ e\ (\forall p(((p\neq n)e(m\cdot p-4=0))\rightarrow(n<p))))$$

In effetti, essendo le funzioni ricorsive aritmetiche, PA è un candidato del tutto idoneo per una tale rappresentazione di esse. Gödel, come passo previo al suo primo Teorema di incompletezza (che affronteremo nel prossimo paragrafo), dimostrò che è davvero così, che tutte le funzioni ricorsive e quindi tutti gli enunciati relativi ad esse, sono rappresentabili operativamente in PA[17]. Per una tale Teoria, si può allora ripetere il ragionamento fatto: supponendone la *completezza*, si deduce che la Teoria potrebbe risolvere il *problema della fermata* per una qualunque macchina. Ma sottolineiamo nuovamente che *da ciò, in generale, non consegue nulla di assurdo*: una Teoria classica formale può risolvere il *problema della fermata* e ne vedremo addirittura un esempio in seguito. Il descritto paradosso di Turing, si manifesta soltanto richiedendo che, inoltre, tale Teoria abbia gli assiomi, ovvero i teoremi, *effettivamente numerabili* – non è, infatti, necessario che la Teoria stessa sia *effettivamente assiomatizzabile* (pur se questa differenza non ha un reale interesse pratico) – cioè, come abbiamo visto, richiedendo che esista una *macchina* capace di risolvere il problema dell'arresto di una qualunque macchina. In particolare, PA è *eff. ass.*, e pertanto il Metateorema di Church-Turing vale per esso: PA è incompleto.

Abbiamo appena concluso l'incompletezza della Teoria matematica che soddisfa le ipotesi del Metateorema di Church-Turing, diciamola T, mediante un ragionamento informale che coinvolge il concetto di macchina e usa la Tesi di Church-Turing. Per formalizzare pienamente il Metateorema bisogna eliminare il riferimento alle macchine (e quindi anche alla Tesi di Church-

[17] In verità, facendo uso di una definizione di *rappresentabilità* più esigente di quella a cui ci stiamo riferendo, dimostrò molto più di questo; tale "di più" serve per costruire in concreto l'enunciato indecidibile che dimostra la tesi del suo Teorema.

Turing), adoperando per esse un modello da codificare in seno a TI. Bisogna subito osservare che la tesi stessa del Metateorema esamina il Sistema T "dall'esterno" e dunque, nel caso in cui esso coincide con il Sistema TI, tale formalizzazione non può realizzarsi. Quando T è diverso da TI, la formalizzazione del Metateorema in TI non dà alcun problema di principio: scegliendo come modello la *macchina di Turing*, si ottiene il *Teorema di Church-Turing*; mediante le funzioni ricorsive, il *primo Teorema di incompletezza di Gödel*. Comunque, è infrequente che tali Teoremi vengano presentati in veste totalmente formalizzata: normalmente il modello delle macchine (macchina di Turing o funzioni ricorsive) viene effettivamente usato al posto delle macchine, ma non viene codificato in TI. Ne vengono fuori, pertanto, ancora *meta*teoremi, quantunque con una compagine ben più rigorosa dell'esposto Metateorema. Nel prossimo paragrafo, in cui abbozzeremo, in questa versione (che è anche la versione originale), il Primo Teorema d'incompletezza di Gödel, citeremo un libro in cui lo stesso teorema viene completamente formalizzato in TI. Come può immaginarsi, la veste formale semplifica e automatizza i ragionamenti più critici e peculiari della metadimostrazione, tuttavia al prezzo di un complesso e disagevole formalismo (la cui interpretazione possiede differenti "livelli" semantici). Per questo motivo, anche da un punto di vista didattico, è preferibile studiare la strategia dell'originale (meta)dimostrazione di Gödel, d'altronde storicamente la prima.

È chiaro, comunque, che la più ampia rilevanza epistemologica del Teorema di incompletezza si ottiene riferendosi alle *macchine* e riammettendo la Tesi di Church-Turing. Che è quanto faremo nel paragrafo III.6.

III.5. Primo Teorema di incompletezza di Gödel

Illustrare i dettagli della complessa (meta)dimostrazione di Gödel non rientra negli scopi di questo libro; ma, in verità, c'è molto di più: riuscire a farlo è certamente un'impresa eccezionale[18]. La dimostrazione vera e propria, preceduta da una particolare codificazione dei simboli aritmetici, richiede la definizione di 45 funzioni ricorsive. Quella numero 33, nel libro di Ivorra citato nell'ultima nota, occupa ben 14 righe di simboli!

La nostra ambizione, piuttosto, è spiegare la logica del ragionamento di Gödel, che, per la sua peculiarità, ha dato adito a non poche mis-interpretazioni; una delle più diffuse e nefaste (a volte dello stesso Wittgenstein) è che si tratti di un paradosso. Ma come potrebbe una contraddizione dimostrare qualcosa, oltre il fatto che il Sistema che la deduce è incoerente? È vero, invece, che l'idea della dimostrazione *si ispira* al paradosso del mentitore, come riferito dallo stesso Gödel.

L'ipotesi che Gödel assume per il Sistema classico in analisi è che la collezione dei suoi assiomi sia *ricorsiva* (o *ricorsivamente decidibile*, come preferiamo dire), condizione che definisce, per analogia con il caso meccanico, un Sistema *ricorsivamente assiomatizzabile*. Si ricordi che tale condizione (anzi, anche la, più debole, *ricorsiva numerabilità* degli assiomi, come segnalato in una recente nota) implica la formalità per il Sistema ed il fatto che la semantica contenuta nelle sue dimostrazioni è eliminabile. Inoltre, che includa gli assiomi di PA o che li deduca come teoremi, ovvero che sia una Teoria aritmetica "abbastanza potente", come si usa dire. In verità la "potenza" che serve è semplicemente quella che permette di rappresentare, nel modo che abbiamo poc'anzi descritto, le funzioni ricorsive. Di fatto, tale capacità è anche posseduta da una Teoria più generale di PA, chiamata Aritmetica di Robinson, in cui il

---

[18] A parte l'originale dimostrazione, necessariamente stringata, di Gödel, *Uber formal unentscbeidbare Siitze der "Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, in "Monatshefte fúr Mathematik und Physik", 38, p. 173-198 (1931), tradotta in italiano da E. Ballo, Bollati Boringhieri, Torino (2002), possiamo menzionare quella, pressoché completa, contenuta nel libro di C. Ivorra Castillo, *Lógica y Teoría de Conjuntos*, (2006), p. 119-136 e 153-179 (in totale 45 pagine!), sul WEB (http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Logica.pdf). Segnaliamo anche che qui la dimostrazione viene, successivamente, pienamente formalizzata in TI. Esiste, comunque, anche una versione assai semplificata del Teorema, dovuta a G. Boolos: *A new proof of the Gödel incompleteness theorem*, Notice of the AMS, Vol. 36, n.4 (1989).

principio di induzione si sostituisce con un assioma che afferma che ogni naturale diverso da zero è successore di qualche naturale (cosa, in PA, dimostrabile per induzione). L'ultima ipotesi per il Sistema è che esso (o la sotto-Teoria aritmetica con esso sviluppabile) ammetta il modello standard dei numeri naturali, cioè quello di universo N[19]. Quest'ipotesi è, ovviamente, più forte della semplice coerenza, supposta dal Metateorema di Church-Turing. In effetti, la dimostrazione di Gödel può essere generalizzata con l'ipotesi della sola coerenza; ma adesso intendiamo descrivere la sua versione originale (quantunque semplificata). Sottolineiamo che, come importante caso particolare di Sistema idoneo per il Metateorema, c'è proprio TI: infatti, abbiamo visto che le condizioni insiemistiche 1–9 del paragrafo II.6 implicano enunciati equivalenti agli assiomi di Peano e si possono dimostrare verificate per quell'insieme N, unico a meno d'isomorfismo, che definisce proprio il modello standard dei numeri naturali.

La prima operazione che va fatta, come detto, è una concreta codifica numerica dei simboli. Per esempio, a *non* e $\forall$, Gödel assegna, rispettivamente, i numeri 3 e 7; questa scelta, in verità, è arbitraria. Il passo successivo è la codificazione delle sequenze di simboli; la cosa più spontanea, per una stringa come "*non*$\forall$", sarebbe assegnargli 37. Ma, ovviamente, questo non è necessario: dipende dalla convenzione che si fa; e quest'ultima, dallo scopo che ci si prefigge. Uno degli obiettivi fondamentali è la codificazione stessa di tutte le dimostrazioni. Per farlo in modo semplice, evitando di usare nuovi simboli, esse possono essere considerate come sequenze ordinate di enunciati che sono assiomi o teoremi (tranne l'ultimo che è il teorema dimostrato). Per fare un esempio, consideriamo la seguente dimostrazione:

[19] In verità, Gödel fa un'ipotesi più debole, chiamata ω–coerenza: risulta, infatti, che una Teoria aritmetica che ammette il modello standard è ω–coerente. Tuttavia, l'ω–coerenza, una condizione più forte della semplice coerenza, è poco interessante in sé, perché il Primo Teorema di Gödel si può generalizzare ancor di più assumendo l'ipotesi della semplice coerenza per il Sistema. Inoltre, è molto più agevole riprodurre il ragionamento di Gödel considerando l'intuitivo modello standard a cui ogni lettore è abituato. Per tali ragioni, decidiamo di evitare l'ω–coerenza.

"Dall'assioma $\forall xA(x)\rightarrow A(a)$, per la regola di sostituzione si ottiene $\forall x(x=x)\rightarrow a=a$; ma $\forall x(x=x)$ è un assioma (d'uguaglianza) e dunque da *modus ponens* si ottiene a=a; infine, ancora per sostituzione, otteniamo 2=2". Essa si può codificare semplicemente come si codificherebbe la stringa: "$\forall xA(x)\rightarrow A(a)\forall x(x=x)\rightarrow a=a\forall x(x=x)a=a2=2$". L'obiettivo che Gödel vuole raggiungere, dato un numero naturale standard qualsiasi (cioè del tipo 0, 1, 2, ...), non si limita alla ricomposizione della stringa che eventualmente rappresenta; ma, pur tralasciando di far questo, di poter già riconoscere, mediante un'operazione esprimibile solo con funzioni ricorsive, se è o non è il codice di una stringa che costituisce un *enunciato corretto*, un *assioma*, oppure una *dimostrazione*. In altre parole, di riprodurre in termini di opportune espressioni aritmetiche (quelle che rappresentano nel Sistema tali funzioni ricorsive), la *ricorsiva decidibilità* di tali collezioni. Per poter far ciò, egli stabilisce un particolare criterio di codificazione delle stringhe, legato ai numeri primi. Per esempio, la catena "*non*$\forall$ " si codifica col numero $p_1^3\cdot p_2^7$, dove p_1 e p_2 sono i primi due numeri primi, cioè 2 e 3: tale numero è quindi 17496. Questo metodo si generalizza per ogni stringa. Il codice di una stringa di comune lunghezza, viene così ad essere un numero inimmaginabilmente alto; ma ciò non ha alcuna rilevanza teorica. La seguente tabella rappresenta emblematicamente un ordinamento di tutte le stringhe in base a detto codice (chiamato anche numero di Gödel o gödeliano); solo nel caso di "*non*" e "*non*$\forall$ " il codice è quello corretto: negli altri casi, abbiamo associato un numero arbitrario (il vero numero è *molto* più grande!), dato che intendiamo focalizzare puramente la logica della dimostrazione.

3)	*non*	simbolo
....		
17496)	*non*$\forall$	espressione scorretta
……………………...		
542342)	2=2	enunciato
....		

67122260) $\forall$ x(x=x) assioma

....

349481018) $\exists$x(x+6=x+125) enunciato

....

2360928264) $\forall$ xA(x)→A(a)$\forall$ x(x=x)→a=a$\forall$ x(x=x)a=a2=2 dimostrazione

....

Successivamente, Gödel considera una particolare funzione ricorsiva, la cui rappresentazione aritmetica indichiamo con g(x,y), dotata di una fondamentale proprietà. Prima di esporla, vogliamo solo osservare che la g(x,y), esplicitata per intero con i simboli elementari di PA, coprirebbe più di 440000 caratteri, cioè circa 190 pagine di questo libro[20]. Ecco perché Gödel è costretto a definire 45 funzioni ricorsive e a costruire la g(x,y) mediante composizione, ricorsione e minimalizzazione di esse. La notevole proprietà dell'espressione g(x,y) è la seguente: *quando viene interpretata nel modello standard*, essa è verificata se e solo se x è il codice di una dimostrazione che dimostra il teorema di codice y. Cioè, indicando con l'indice N, l'interpretazione nel modello standard dell'enunciato, si ha:

g_N(x,y) è vera se e solo se x è il codice di una dimostrazione dell'enunciato di codice y

Per esempio, in base alla nostra tabella simbolica, l'espressione g_N(x,y) è verificata per x=2360928264 e y=542342.

Successivamente, Gödel dimostra che esiste un valore standard del numero naturale y, diciamolo ỹ, tale che il codice dell'enunciato: *non*$\exists$x(g(x,ỹ)) è proprio ỹ. Cioè, nella tabella, avremo:

ỹ) *non*$\exists$x(g(x,ỹ))

[20] Si è fatta solo una veloce stima di massima, senza molte pretese di accuratezza; comunque, l'ordine di grandezza dovrebbe essere corretto.

Tale enunciato, *interpretato nel modello standard* dice: non esiste un valore standard di x tale che $g_N(x,\tilde{y})$ sia vera; ovvero, non esiste codice di dimostrazione (cioè, non esiste dimostrazione, dato che ogni dimostrazione ha un codice) che dimostri l'enunciato di codice ỹ. E quindi: *questo stesso enunciato non è un teorema*.

Supponiamo, ora, che l'enunciato ỹ sia un teorema. Allora, dalla correttezza del modello standard, esso dev'essere vero se interpretato in tale modello; ma, invece è, evidentemente, falso: impossibile. Supponiamo, allo stesso modo, che il negato dell'enunciato ỹ, cioè $\exists x(g(x,\tilde{y}))$[21], sia un teorema; allora, deve essere vero se interpretato in ogni modello. Ma, interpretato nel modello standard, esso afferma che l'enunciato di codice ỹ, il suo negato, è un teorema; pertanto, se qui fosse vero, allora sarebbero teoremi sia ỹ sia il suo negato, ovvero il Sistema incoerente: impossibile. Un assurdo inevitabile dato che il modello standard è per ipotesi un modello (corretto, per il teorema di correttezza). Non resta che concludere che ỹ è indecidibile e, dunque, che il Sistema matematico è incompleto.

Molte delle confusioni circa questa metadimostrazione possono essere dissipate se si considera in concreto la possibilità di modelli non standard. Normalmente, per concludere che un enunciato è indecidibile, si considerano due modelli: uno in cui l'enunciato è vero, l'altro in cui è falso (come si è fatto, ad esempio, nel caso del quinto postulato di Euclide). Qui, invece, si considera solo il modello standard, mentre la conclusione che l'enunciato ỹ è indecidibile, è fatta soltanto in base al suo auto-riferimento. Interpretato nel modello standard, tale enunciato esprime la propria indimostrabilità; poiché questa è stata dimostrata (si è, appunto, dimostrato che è indecidibile), allora esso è *vero* in tale modello; in quale modello (non standard) sarebbe *falso*? Certamente, un tale modello deve esistere: se ỹ fosse vero in ogni modello, sarebbe un teorema per la completezza semantica del Sistema (che è formale). E indubbiamente in un tale modello tale enunciato, cioè in concreto *non*$\exists x(g(x,\tilde{y}))$, non può ancora significare "non esiste il codice di una dimostrazione che dimostra il teorema di codice ỹ": altrimenti sarebbe di nuovo *vero*. In effetti, uno dei più frequenti errori è

[21] Ricordiamo che due negazioni equivalgono ad affermare (par. I.10).

proprio considerare che g(x,y) significhi *sempre* (cioè in ogni modello) quello che significa nel modello standard: ciò evidentemente non è possibile nel rispetto delle ipotesi del Teorema. Per tale ragione abbiamo preferito non chiamare la g(x,y) nel consueto modo più intuitivo, ma anche più ingannevole: Dim(x,y).

Per riportare qualcosa che assomigli a un caso concreto di interpretazione non standard in cui ỹ è falso e g(x,y) non significa "x è una dimostrazione di y", faremo un esempio "di principio", cioè da non prendere alla lettera. Il lettore supponga che l'espressione g(x,y) sia in concreto la seguente:

$$y=127\cdot 3^{y/x}$$

naturalmente, *non è così*, è soltanto un esempio ideale. Tale equazione, in effetti, è soddisfatta da infinite coppie di numeri naturali, come dev'essere per la vera g(x,y). Supponiamo, ancora, che ỹ sia proprio127. Dunque, l'enunciato indecidibile sarebbe:

127) *non* $\exists x(127=127\cdot 3^{127/x})$

Quando interpretato nel modello standard, questo enunciato afferma che l'enunciato di codice 127, cioè sé stesso, non è un teorema; e, come sappiamo, nelle ipotesi fatte risulta necessariamente vero in tale modello. Anche da questo punto di vista, la scelta dell'espressione è corretta: infatti, la suddetta equazione risulterebbe soddisfatta soltanto quando 127/x=0, cosa impossibile per qualunque x naturale standard. Ma se lo interpretiamo in un modello non standard, le cose possono andare diversamente. Per esempio, se sostituiamo ad x la costante non standard c anteriormente considerata (par. II.16), l'equazione si può ritenere soddisfatta se si considera che c è (infinitamente) maggiore di qualsiasi naturale standard: allora, infatti, 127/c tende a zero e $3^{127/c}$ a uno[22]. Ecco, quindi, come l'enunciato indecidibile ỹ può risultare falso in un modello non standard (e, invero, *deve* risultare falso in un certo

[22] Per rendere rigoroso il ragionamento, basta definire opportunamente le operazioni di divisione ed esponenziazione in modo che generalizzino quelle usuali.

modello non standard M). Inoltre, in un tale modello M, g(x,y) non può essere interpretato correttamente come "x è il codice di una dimostrazione dell'enunciato di codice y"; infatti, se prendiamo x=c e y=127, risulta che, benché g_M(c,127) sia soddisfatto, c non è il codice di nessuna espressione, dato che, per come li abbiamo definiti, tutti i codici di tutte le stringhe simboliche sono naturali standard.

Diciamolo ancora in un ultimo modo: dimostrando che ỹ è indecidibile, abbiamo *dimostrato* *non*g(0,ỹ), *non*g(1,ỹ), *non*g(2,ỹ), etc., e tuttavia l'enunciato $\forall$x(*non*g(x,ỹ)), ovvero *non*$\exists$x(g(x,ỹ)), certamente vero nel modello standard, non è dimostrabile. La situazione non è affatto diversa da quella descritta nel paragrafo I.13, relativamente alla Geometria ellittica: anche in tale modello di G, per ogni retta passante per il punto P esterno a una prefissata retta *r*, è vero (e si può dimostrare se si descrive il modello servendosi della Geometria euclidea, così come abbiamo fatto per il modello iperbolico nel par. I.10) che essa non è parallela ad *r*. Tuttavia, in G non si può dimostrare che "qualunque retta passante per P non è parallela ad *r*": lo testimoniano il modello euclideo e quello iperbolico. Allo stesso modo, *non*$\exists$x(g(x,ỹ)) non si può dimostrare, di fatto è falso in opportuni modelli non standard.

Sottolineiamo, comunque, che *il Teorema d'incompletezza non è dovuto all'esistenza dei modelli non standard* (come a volte qualcuno afferma): questi ultimi, infatti, esistono sempre nelle ipotesi (ben larghe) del teorema di L-S e, nella seconda Parte, li abbiamo effettivamente osservati anche in Teorie sintatticamente complete come TFR.

Come anticipato, l'ipotesi di esistenza del modello standard per il Sistema si può indebolire con la semplice coerenza[23]. Ciò fu (meta)dimostrato da Rosser mediante un altro enunciato auto-referente, differente da quello di Gödel.

---

[23] Ma in quali casi concreti si applicherebbe tale generalizzazione? Invero, nel caso di PA, la formalizzazione in TI (che richiede solo l'ipotesi di coerenza per TI) è in grado, come sappiamo, di *dimostrare* l'esistenza del modello standard per PA. Tuttavia, ciò non vale per altri Sistemi che soddisfano le ipotesi del teorema: ad esempio, per il Sistema PA' (par. II.16) che ammette solo modelli non standard. Ora, invece, il teorema di incompletezza può applicarsi anche a PA'.

Infine, ricordiamo che le discusse metadimostrazioni sono pienamente formalizzabili in TI (in modo da costituire un normale *teorema*), eccetto, indubbiamente, nel caso in cui il Sistema che soddisfa le ipotesi sia lo stesso TI; nel qual caso la descritta incompletezza si deve intendere come un tassativo *meta*teorema.

III.6. Conseguenze del Teorema di incompletezza

L'importanza del Teorema di incompletezza si deve non già al semplice fatto che il Sistema matematico dell'ipotesi si sia concluso incompleto, quanto al fatto che esso sia *incompletabile*. Il Teorema, infatti, può riapplicarsi a qualunque estensione del Sistema di partenza, pur di rispettare le ipotesi necessarie. Se I è un qualsiasi enunciato indecidibile della Teoria (se si vuole, lo stesso *enunciato di Gödel*, di codice ỹ), aggiungendo I o *non*I agli assiomi del Sistema, si riottiene un Sistema coerente e "più potente" di quello originale. Inoltre, se I è esibito, i nuovi assiomi continuano ad essere *ricorsivamente decidibili*, se prima lo erano. Riapplicando il Teorema, pertanto, si conclude di nuovo l'incompletezza del Sistema; e se, per esempio, I era l'*enunciato di Gödel*, si potrà ricostituire un nuovo *enunciato di Gödel*. Per dirla in modo sintetico, un Sistema classico che soddisfa le ipotesi del Teorema di incompletezza è *essenzialmente incompleto*: esso non si può completare aggiungendo assiomi, anche di numero infinito, fintantoché si conservi la coerenza e la *ricorsiva decidibilità* (ma dovrebbe bastare la *ricorsiva numerabilità*, come commenteremo più avanti) dell'insieme degli assiomi.

Per illustrare tutte le conseguenze dell'incompletezza essenziale, comunque, è conveniente riferirsi al più generale Metateorema di Church-Turing (o d'incompletezza), ripristinando la Tesi di Church-Turing.

Nel concludere il Metateorema di Church-Turing, abbiamo visto che negare la tesi implica l'esistenza di una macchina D che risolve il *problema dell'arresto* di ogni macchina. Ora, dato un qualsiasi Sistema *eff ass.* (o, più generalmente, i cui assiomi siano effettivamente numerabili), possiamo sempre considerare una macchina che, per concludere se un certo enunciato è un teorema, controlli la lista completa di tutti i teoremi generata dalla macchina caratteristica del Sistema. Se l'enunciato non è un teorema, tale procedura meccanica non terminerebbe; ma tramite la macchina D potremmo scoprirlo e concludere, pertanto, che non è un teorema. Perciò, se esistesse la macchina D, ogni Sistema i cui assiomi siano effettivamente numerabili sarebbe decidibile. Al contrario, dal Metateorema d'incompletezza segue che ciò è impossibile: in particolare segue, infatti, che *ogni Sistema che soddisfa le sue ipotesi è indecidibile*. Per ammetterlo, ragioniamo per assurdo: di conseguenza, sarebbe decidibile anche l'insieme degli enunciati indecidibili. Per ciascuno di essi, scegliamo il più corto tra il medesimo e il suo negato (o, più in generale, uno dei due secondo un criterio arbitrario, ma meccanizzabile) e aggiungiamolo agli assiomi del Sistema. Si sarà formato un nuovo Sistema coerente, *completo* e ancora *eff. ass.* (o, più generalmente, i cui assiomi sono ancora effettivamente numerabili) che, essendo estensione del primo, ne ha almeno la stessa di "potenza espressiva": impossibile.

PA e qualsiasi altra Teoria *eff. ass.* dei numeri naturali non meno "potente" (anzi, anche qualcuna meno "potente", come l'Aritmetica di Robinson) è essenzialmente indecidibile. Ed essenzialmente indecidibile è la stessa TI, cioè l'intera Matematica classica formale (descrivibile insiemisticamente)[24].

Ciò che succede in un Sistema matematico che soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza è che l'insieme dei suoi enunciati indecidibili non è effettivamente numerabile: se lo fosse, anche il, più generale, insieme degli enunciati che non sono teoremi sarebbe effettivamente numerabile e allora il Sistema sarebbe decidibile (par. III.1); una conseguenza necessaria di ciò è che gli enunciati indecidibili devono essere infiniti[25]. Dunque, non solo non

[24] Comunemente chiamata "del primo ordine", in base alla scorretta valenza assegnata all'ordine espressivo discussa nel paragrafo II.14.

[25] Se fossero finiti, essendo anche *distinguibili* e formali, se ne potrebbe fare un elenco esplicito, sempre riproducibile da una macchina. Per la *distinguibilità* degli enunciati indecidibili di un Sistema formale, si ricordi il paragrafo II.9 (si dirà di più anche nel III.9).

è possibile meccanizzare il processo di riconoscimento degli infiniti enunciati indecidibili, ma neanche farne, meccanicamente, un elenco esclusivo esaustivo.

Se consideriamo la codifica numerica degli enunciati indecidibili, ne risulta, pertanto, un sottoinsieme infinito di naturali standard che non è effettivamente numerabile, cioè di cui nessuna macchina è capace di elencare tutti e soli gli elementi. *Ma, chiaramente, la conclusione che esistono sottoinsiemi di naturali non effettivamente numerabili* (anzi, che sono trascurabili quelli che lo sono), *può farsi indipendentemente dal Metateorema di incompletezza*; infatti, ciò segue semplicemente dal fatto che l'insieme di tutti i calcoli meccanici, ovvero di tutte le funzioni ricorsive è numerabile, mentre l'insieme P(N) è innumerabile[26]. [Dall'innumerabilità di P(N) deriva anche che per definire tutte e sole le cifre di un numero reale (che può considerarsi un sottoinsieme infinito di numeri naturali), bisogna ricorrere ad ineliminabile semantica, eccetto che per un numero insignificante di casi ($\aleph_0$ rispetto a $2^{\aleph_0}$)]. Dunque, è epistemologicamente sbagliato affermare, come fa qualcuno, che ciò è una conseguenza del Metateorema d'incompletezza: l'importanza del Metateorema, che effettivamente conclude ciò per uno specifico sottoinsieme, si deve alla *natura* di tale sottoinsieme; e non certo al fatto che esistono sottoinsiemi di questo tipo, che è dimostrabile indipendentemente.

Per riconoscere gli enunciati indecidibili di una Teoria che soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza, non restano che i metodi puramente metamatematici (semantici). Per tale ragione abbiamo detto all'inizio del libro che la metamatematica è *intrinsecamente* indispensabile (par. I.3). Non essendo meccanizzabile, tale criterio deve possedere la capacità di definire continuamente e imprevedibilmente nuovi concetti, adattandoli di volta in volta all'enunciato che deve provarsi essere indecidibile. Per la natura stessa del linguaggio semantico, capace addirittura di ridefinirsi, non c'è ragione di credere che questo processo non sia

[26] Analogamente a quanto più volte notato, si potrebbe assegnare più di un significato al risultato di ciascun calcolo; ma abbiamo osservato che tale operazione, per risolvere il suddetto problema, dovrebbe essere intrinsecamente semantica e dunque non eseguibile da nessuna macchina.

sempre possibile. Di fatto, la stessa *rappresentabilità* dei modelli che permettono di riconoscere un enunciato indecidibile (i quali, si ricordi, *esistono certamente* in base al Teorema di s-completezza) è un concetto convenientemente ridefinibile[27]. L'unica, fondamentale, eccezione a questo ottimismo riguarda lo stesso Sistema TI, per la discussa ambiguità dei suoi "modelli"; più oltre lo constateremo con un esempio.

Il Metateorema, dunque, scopre ulteriori limiti alla capacità di meccanizzare il processo di identificazione dei modelli della Teoria per cui vale. Sapevamo già che la potenza dei modelli di un Sistema, essendo *iperinnumerabile* (par. II.20), è terreno esclusivo della Semantica; ma adesso sappiamo che anche un suo "sottoinsieme" numerabile (costituito da quei modelli che permettono di riconoscere tutti gli enunciati indecidibili) non è effettivamente numerabile, non può essere generato esclusivamente ed esaustivamente da nessuna macchina.

Un'altra conseguenza del Metateorema è la dimostrazione dell'esistenza di Sistemi classici formali non *eff. ass.* e quindi non *fedelmente* rappresentabili in TI. Consideriamo, infatti, un Sistema che, oltre agli assiomi di PA, contiene come assioma I oppure *non*I, per ogni enunciato indecidibile I. Poiché si tratta di un Sistema completo e "più potente" di PA, in base al Metateorema d'incompletezza, non può essere *eff. ass.*; anzi, non può nemmeno avere, più generalmente, gli assiomi effettivamente numerabili. Da ciò segue, in base a quanto concluso alla fine del paragrafo III.3, che esso non è *fedelmente* rappresentabile in TI: la Teoria assiomatica degli insiemi non può riconoscere tutti i suoi teoremi. Un caso particolare di grande importanza di quest'ultimo esempio è il Sistema in cui, per ogni indecidibile I di PA, si aggiunge come assioma, tra I e *non*I, quello che risulta *vero* nel modello standard. Tale Sistema formale, diciamolo PAV, permette quindi di dedurre

[27] Un esempio di drammatico indebolimento del concetto di *rappresentabilità* per un modello, si ha nella già menzionata metadimostrazione di coerenza *relativa* delle Teorie *non cantoriane* degli insiemi (cioè in cui non vale *l'ipotesi del continuo*) realizzata da Cohen: essa considera, infatti, un'interpretazione abbastanza peculiare (con proprietà "forzate", in inglese *forced*), in cui l'ipotesi del continuo è falsa; ed essa, in ipotesi di coerenza per la Teoria degli insiemi, risulta essere un modello.

tutti e soli gli enunciati di PA veri nel modello standard: una Teoria davvero utile![28] Inoltre, per quanto visto, essa *è in grado di risolvere il problema dell'arresto* di ogni macchina. Purtroppo, pur essendo formale, non è *eff. ass.*, né *fedelmente* rappresentabile in TI: né TI, né una qualsiasi macchina, è capace di fare un elenco di tutti e soli i suoi teoremi. La semantica contenuta *nella definizione* dei suoi assiomi (in particolare, degli ultimi che si sono aggiunti) non può essere integralmente riprodotta da nessuna macchina, né dal linguaggio insiemistico; cioè, non può essere eliminata. Ne consegue, ovviamente, che neanche l'insieme delle dimostrazioni è effettivamente numerabile.

A questo punto giunge assai opportuno sottolineare ciò che realmente significa avere ottimisticamente "sotto gli occhi" il modello dei numeri naturali intuitivi quando si definisce il Sistema PA (par. II.1): significa intuire un'interpretazione le cui infinite verità non possono essere interamente riprodotte da nessuna macchina; in altre parole, *significa ammettere un numero infinito di convenzioni semantiche non interamente specificabili con metodi meccanici* (non effettivamente numerabili, appunto). Dopotutto, non sembra una posizione cosí innocente!

Il *teorema di Tarski* è una sorta di generalizzazione di ciò che è stato appena mostrato circa le verità della Teoria aritmetica PA nel modello standard. Esso afferma che il linguaggio sintattico di un Sistema che soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza, non può *possedere* un *predicato effettivamente numerabile* $\underline{V}(x)$, tale che $\underline{V}(x)=1$ se e solo se l'enunciato di codice x è vero nel modello M, qualunque sia il modello M. Un *predicato* $\underline{P}(x)$ è effettivamente (o ricorsivamente) numerabile, se è possibile calcolare meccanicamente $\underline{P}(x)$ per ogni x per cui vale. Quindi, il teorema di Tarski afferma che l'insieme degli enunciati veri per un qualsiasi modello fissato non è effettivamente numerabile. Per dimostrarlo, osserviamo che, per assurdo, si potrebbe considerare un Sistema che

---

[28] Abbiamo dunque distinto quattro Sistemi aritmetici: PA, la Teoria aritmetica integrale (AI) e i Sistemi che si ottengono da questi aggiungendo come assiomi gli enunciati delle rispettive Teorie, *veri* nel modello standard: PAV e AIV. Con la possibilità (già segnalata nel par. II.17 e che sarà commentata più tardi) che AI e AIV coincidano.

aggiunge agli assiomi della Teoria originale d'ipotesi, tutti gli enunciati veri in M: pertanto, un Sistema i cui assiomi sono effettivamente numerabili. Tale Teoria sarebbe, inoltre, più "potente" di quella iniziale, ma completa: assurdo. Oppure, con un risvolto più interessante, si può sfruttare il fatto che, in ogni Teoria d'ipotesi, un tale predicato $\underline{V}(x)$, può rendersi autoreferenziale (come quello di Gödel)[29]; in particolare, dovrebbe esistere un codice x_k tale che:

$$x_{k)} \quad \underline{V}(x_k) \neq 1$$

una versione del *paradosso del mentitore* che, come abbiamo già osservato, implica sempre assurdo. Infatti, tale enunciato non può esser vero per M: se lo fosse, per definizione di $\underline{V}$, dovrebbe risultare $\underline{V}(x_k)=1$, e dunque sarebbe vero anche il suo negato. Se fosse falso, allora il suo negato $\underline{V}(x_k)=1$ sarebbe vero e allora, per definizione di $\underline{V}$, l'enunciato di codice x_k dovrebbe esser vero per M, mentre è falso. Assurdo.

Tale teorema non si applica se il predicato di verità non è effettivamente numerabile oppure se il Sistema non soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza: per esempio, non vale per il decidibile TFR. Tuttavia, una versione più generale del teorema, il *Metateorema di Tarski*, *vale per tutti i Sistemi coerenti*, *anche non formali*. Ed afferma che in nessuna Teoria coerente, il linguaggio matematico, *opportunamente interpretato*, è capace di *definire* un concetto di verità universale (cioè valido per ogni enunciato, come dev'essere per ogni verità). Certamente, qualcosa di diverso dal precedente *teorema* di Tarski. La conclusione di tale Metateorema è basata sul fatto che affinché un linguaggio possa definire (e quindi *enunciare*) la verità per tutti gli enunciati, *inclusa tale enunciazione*, tale definizione deve consentire le auto-referenze; col risultato che

[29] In verità, normalmente ciò si dimostra nel caso di un predicato *decidibile* (anche detto *ricorsivo*: detto $\underline{P}(x)$, quando, per ogni x è possibile calcolare meccanicamente se $\underline{P}(x)$ vale oppure no). Tuttavia, riteniamo che ciò dovrebbe potersi estendere anche al caso in cui sia solo effettivamente numerabile. Del resto, anche la stessa dimostrazione di Gödel dovrebbe potersi estendere al caso in cui il Sistema ha gli assiomi soltanto ricorsivamente numerabili, come assunto nel Metateorema di Church-Turing.

risorgerebbe il *paradosso del mentitore*: "questo stesso enunciato è falso". La *definizione integrale* delle verità per un modello di un Sistema matematico, deve dunque effettuarsi all'esterno del Sistema[30]. Naturalmente, questo fatto non ha nulla a che vedere con la completezza o l'incompletezza sintattica: il Sistema può benissimo essere capace di dedurre tutti gli enunciati veri per un modello (risultando, così, sintatticamente completo); in un caso simile, infatti, esso non si limita che a dedurli, mentre solo dall'esterno essi possono essere considerati, di conseguenza, "veri per il modello".

Infine, segnaliamo che, a rigore, non c'é nulla che vieti di interpretare il metalinguaggio definitorio di TI in modo da ovviare al problema della *non fedeltà* di un qualsiasi Sistema rappresentato in TI, come anticipato nel paragrafo II.7. L'unico problema è il prezzo pagato. Consideriamo, per esempio, il caso di PAV, un Sistema che definisce gli assiomi utilizzando il concetto di "vero nel modello standard". Nulla impedisce di impiegare tale significato anche in seno alla Teoria TI, introducendo, in senso genuinamente semantico, l'insieme degli enunciati "veri nel modello standard di PA" e di dedurre a partire da esso. Ora PAV è fedelmente riprodotto in TI, ma TI si è convertita in una Teoria affatto differente, capace di dedurre tutti e soli gli elementi di un insieme di enunciati non effettivamente numerabile, come visto. Dunque, *il suo tipo di deduzione non è più soltanto meccanico*: *essa ha perso la sua effettiva assiomatizzabilità*, pur conservando la formalità.

Riepilogando, possiamo affermare che *il Metateorema d'incompletezza ci chiarisce, dal punto di vista logico, come le macchine possono aiutarci nello studio di un Sistema classico formale:*

a) Esistono Sistemi classici formali per i quali non esiste alcuna macchina in grado di elencarci tutti e soli i suoi teoremi; questi sono anche *non fedelmente* riproducibili in TI. Tra essi ci sono i

[30] Come già intuito da Russell nel 1903: nella prima pagina de *I principi della Matematica*, ed. italiana Newton Compton (1989), si legge "*…oltre a questi [concetti], la Matematica usa un concetto che non fa parte delle proposizioni che essa considera, vale a dire la nozione di verità*".

più desiderabili, come PAV, cioè il Sistema che deduce tutti e soli gli enunciati di PA veri nel modello standard. E che risolve il problema della fermata di una qualunque macchina.

b) Esistono Sistemi classici formali per i quali, se supposti coerenti, esistono macchine capaci di elencarci tutti e soli i suoi teoremi; ma *non* in grado di risolvere tutti i problemi matematici: per esempio, per ogni fissato enunciato E, di indicarci se *non è* un teorema (e, in particolare, se è indecidibile); oppure, di risolvere il problema dell'arresto di ogni macchina. Di questo tipo sono le più fondamentali Discipline matematiche, come PA e TI.

c) Esistono Sistemi classici formali decidibili, se supposti coerenti; cioè per i quali esistono macchine capaci di risolvere ogni problema matematico, *in tale ipotesi*. Esempi sono TFR, GE, nonchè una parte dell'Aritmetica ancora più ristretta dell'Aritmetica di Robinson; la coerenza di tali Sistemi segue dall'ipotesi di coerenza per la TI. Tali Teorie sono tuttavia limitate in quanto ad espressività: in esse, per esempio, non si possono rappresentare tutte le funzioni ricorsive, ovvero tutte le macchine.

Ora sembra un buon momento per discutere la possibilità di oltrepassare questi limiti, ovvero di considerare macchine che violino la Tesi di Church-Turing. Ma prima vogliamo chiarire l'esatta natura di questa convenzione, solo in apparenza così peculiare. In realtà, infatti, non si tratta d'altro che della formalizzazione di un concetto. Riconsideriamo ciò che accade con il concetto di insieme. Adottare gli assiomi di TI, significa definire un ente matematico che dovrebbe assomigliare al concetto metamatematico di "insieme". Analogamente, le funzioni ricorsive (o gli altri modelli equivalenti) rappresentano una definizione matematica di "macchina". La "Tesi di Church-Turing" è, appunto, la supposizione che tale definizione sia in accordo col concetto semantico di "macchina". Perché non si evidenzia e discute l'analoga convenzione per il caso di "insieme"? Eppure, di fatto, ci sono ben solide ragioni per dubitare dell'accordo: abbiamo, infatti, visto che risorge un concetto necessariamente semantico, quello di "collezione", non appena si studiano le fondamenta di TI; ciò dimostra che la formalizzazione di "insieme" non può catturarne l'intera valenza semantica. Viceversa, per il caso delle "macchine", sembra proprio che simili ragioni non sorgano; come si spiega quest'incongruenza?

Con due motivi. Il primo è dovuto, paradossalmente, proprio alla concretezza del concetto di "macchina", rispetto a quello più astratto di "insieme". Gli assiomi di TI vengono visti, dal punto di vista epistemologico, come un tentativo di concretizzare tale astrazione. Il fatto che il tentativo abbia i suoi limiti o, se si preferisce, che fallisca in parte, non ci scandalizza molto perché ci conferma che il suo carattere ideale non è definibile rigorosamente; così, le sue conseguenze – che, invero, sono gravi: la nebulosità dei "modelli" di TI, con tutte le sue drammatiche ripercussioni – sono filosoficamente più accettabili. Nel caso di "macchina", invece, l'idea, ben concreta, che possediamo è talmente ampia che ci sembra sospetto che possa catturarsi totalmente con una manciata di regole matematiche. Tanto più per le forti limitazioni epistemologiche che, come abbiamo osservato, tale convenzione produce (il secondo motivo).

Come detto, mettendo da parte l'uso dei numeri casuali (che discuteremo fra poco), finora non si sono trovate concrete estensioni delle modalità di un calcolo meccanico. Tuttavia, possiamo perfettamente osservare che tipo di operazioni dovrebbe essere in grado di realizzare una "macchina" capace di riconoscere tutti e soli gli enunciati indecidibili di una Teoria che soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza; cosa che, come sappiamo, implicherebbe la decidibilità per il Sistema. Ovvero, di che genere è la "superiorità" umana, esaltata da qualcuno[31], rispetto a una qualunque macchina che rispetta la Tesi di Church-Turing. Per

[31] J.R. Lucas , *Mind, Machines and Gödel*, in *Philosophy*, 36 (1961) e, più recentemente: R. Penrose, *La nuova mente dell'imperatore*, Adelphi, Milano (1990). Si tratta di un punto di vista, ormai totalmente sorpassato, che è stato contraddetto da moltissime obiezioni; ma per "smontarlo" è sufficiente precisare l'argomento, come cercheremo di fare a continuazione.

esempio, come abbiamo visto, di saper riconoscere la verità, in un prefissato modello, degli enunciati indecidibili del Sistema matematico. Si tratta, dunque, di operazioni di tipo genuinamente semantico, che, piuttosto che "intelligenza" (nel senso tradizionale dato a questo termine), richiedono l'uso di una convenzione "dinamica" dei significati da assegnare agli enunciati. "Dinamica", perché la strategia per l'assegnamento di tali significati non può precisarsi esattamente una volta per tutte: altrimenti sarebbe meccanizzabile. In altre parole, la nostra primaria superiorità rispetto ad una macchina, tradizionalmente intesa, è il poter dare un valore semantico ridefinibile – secondo un contesto o una convenienza non prevedibile meccanicamente – agli enunciati della Teoria; il poter gestire in qualche modo (in un ambito che a priori non è esente d'ambiguità), la potenza *iperinnumerabile* dei concetti semantici. Ovviamente, questo tipo di capacità, ancorché "meraviglioso", è anche soggetto al pericolo di ambiguità: infatti *non lo si desidera* per le macchine, almeno nella loro definizione tradizionale! Vogliamo dire che, in Logica, il concetto di "macchina" si introduce proprio per esigere un tipo di determinismo rigoroso e inconscio della deduzione, escludendo qualsiasi comportamento insondabile.

In definitiva, affinché una macchina possa simulare il ragionamento umano, non basta un normale ampliamento delle sue capacità di calcolo, bensì si rende necessaria una caratteristica di natura totalmente differente da quelle tradizionalmente associate al concetto di "meccanico": la possibilità di modificare imprevedibilmente l'interpretazione degli enunciati, di cambiare le "regole del gioco" secondo la convenienza contingente. Una capacità che ritenere semplice "intelligenza superiore" sembra al tempo stesso immodesto e riduttivo.

Ciò chiarito, si può comprendere che, dal punto di vista logico, non dobbiamo aspettarci troppo da calcoli meccanici basati sulla casualità. Anzitutto è bene precisare l'esatta natura di tale casualità. Si consideri una macchina capace di lanciare dei dadi sul tavolo e di leggere il risultato, per usarlo nei suoi successivi calcoli. Per "agitare la sua mano meccanica" prima del lancio, si può ricorrere a diversi accorgimenti: in funzione dell'ora, servendosi delle cifre imprevedibili dei numeri reali (in realtà simulati da numeri razionali, come sappiamo) o usando diversi algoritmi specifici, spesso risultato di studi insospettabilmente complessi. Calcoli che usano tale funzione, detti *random*, servono soprattutto in ambito statistico, per la simulazione di eventi reali. In verità, un calcolo di questo tipo è solo apparentemente *casuale*, nel vero significato del termine. Vogliamo dire che, per esempio, un calcolo *random* a partire dalle cifre dell'ora è in realtà assolutamente deterministico: se si considera l'ora come uno degli *inputs*, la macchina rispetta la Tesi di Church-Turing. Lo stesso vale per le altre modalità di generazione casuale; perciò, sarebbe più corretto parlare di *simulazione* della casualità, ovvero di *pseudo*casualità. Ma nei casi pratici ordinari tale simulazione può sempre essere realizzata in modo soddisfacente.

Ciò premesso, rileveremo subito che, naturalmente, è ridicolo pensare di ottenere *casualmente* gli enunciati indecidibili di un Sistema matematico oppure le cifre di un certo numero reale. Tuttavia, è abbastanza probabile che i processi mentali umani, comprese le imprevedibili assegnazioni di significato ai simboli, facciano *anche* uso di casualità. Pertanto, un procedimento meccanico pseudocasuale, corretto da un certo grado di determinismo, potrebbe simulare, quantunque parzialmente, tale criterio intrinsecamente semantico. Si deve perciò ritenere fattibile ottenere un ausilio deduttivo mediante un criterio di questo tipo.

Riassumendo, al momento non esiste un uso regolato delle operazioni *random* nell'ambito della Logica: in essa, tradizionalmente, non si deduce mai facendo uso del "caso". Tuttavia, nulla in principio impedisce di ammettere, in qualche circostanza, questa possibilità; per esempio cercando di simulare, quantunque parzialmente o approssimativamente, il criterio intrinsecamente semantico dell'assegnazione di significato alle proposizioni matematiche.

III.7. Gloria di Chaitin

Nel 1974 G. Chaitin formulò un'interessante versione informatica del Metateorema d'incompletezza. Anzitutto, definiamo: una macchina si dice *universale*, se il suo comportamento ingresso/uscita riproduce, come caso particolare, il comportamento ingresso/uscita di una qualsiasi altra macchina. In altre parole, una macchina universale può simulare logicamente qualunque macchina. Il suo comportamento ingresso/uscita rappresenta, quindi, tutto ciò che è calcolabile meccanicamente. L'esistenza di una macchina universale e i criteri per ottenerla sono assicurati dalla Tesi di Church-Turing e dai modelli rappresentativi delle macchine. Quello delle funzioni ricorsive, come abbiamo visto, descrive l'elaborazione di una qualunque macchina mediante le operazioni fondamentali di *composizione*, *ricorsione* e *minimalizzazione*. Pertanto, una qualsiasi macchina in cui è possibile avviare un programma dove le istruzioni corrispondenti a tali operazioni possono comparire in un punto e con una frequenza arbitrari, è universale. In concreto, abbiamo già rilevato quali sono le istruzioni logiche capaci di riprodurre tali operazioni: 1) la somma tra numeri naturali; 2) l'assegnamento in memoria e la lettura da essa; 3) l'iterazione condizionata[32]. Qualsiasi computer programmabile (incluse molte calcolatrici tascabili) possiede questi strumenti operativi e rappresenta, pertanto, una macchina universale[33]. Anche la *macchina di Turing* e la *macchina RAM* sono universali, come lo è qualunque macchina che simula il Sistema TI, in cui sono definite le funzioni ricorsive. Certamente, l'esistenza delle macchine universali implica anche l'esistenza di funzioni ricorsive universali: quelle che riproducono in codice matematico il loro comportamento.

Consideriamo ora un'arbitraria macchina universale U e supponiamo, concretamente, che essa lavori elaborando esclusivamente sequenze finite di cifre binarie costituite dai simboli "0" e "1" (in breve, *bits*), come normalmente succede in realtà. Ogni programma è una sequenza di bits e qualsiasi sequenza di bits può essere considerata un programma[34]. Il comportamento della macchina quando si avvia un certo *programma*, che considereremo

[32] Esempi di quest'ultima, per chi sa un minimo di informatica, sono i cicli condizionati realizzabili con le istruzioni come *DO*, *FOR*, etc.

[33] Il fatto che in ogni concreto computer la memoria sia in realtà limitata (ma, in teoria, ampliabile senza limiti), rende la sua universalità un limite a cui la macchina può tendere con l'approssimazione che si desideri.

[34] Un programma che usi istruzioni scorrette o prive di significato determina in ogni caso una risposta, come un messaggio di errore o una non terminazione.

sempre completo di tutti i suoi inputs, non è determinato soltanto dalle sue istruzioni proprie, ma anche da un primario *programma interno* (che equivale al *Sistema operativo* più il *firmware*, quest'ultimo un insieme di istruzioni non modificabili che controllano direttamente i dispositivi fisici della macchina). Tale *programma interno*, anch'esso costituito da una sequenza di bits, stabilisce delle convenzioni di rappresentazione (cioè un codice) dei numeri naturali e delle istruzioni, e in base ad esse concretizza le regole con cui elaborare i dati. Dato il suo carattere universale, esso deve essere in grado di riprodurre operativamente tutte le funzioni ricorsive. Aggiungendo l'ipotesi di correttezza, cioè l'assenza di errori, il programma interno di una macchina universale rappresenta, dunque, una esemplificazione concreta di una Teoria formale che soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza.

Per quanto detto, la sequenza binaria *totale* che rappresenta un generico programma della macchina universale U, completa di tutti i suoi inputs, è costituita dalle istruzioni proprie del programma (ossia quelle che formano il cosiddetto programma *esterno*, P, a carico dell'utente)[35], più i bits dei suoi inputs I, più il programma interno M. Indicando con L(s) la lunghezza di una determinata stringa s, la *lunghezza totale* di un generico programma di U è dunque data da L(P)+L(I)+L(M), dove L(P)+L(I) è un valore variabile, mentre L(M) una costante che dipende dalla macchina U.

Si definisce *complessità di Solomonoff* (o di Kolmogorov o di Chaitin) K(s), di una certa sequenza binaria s, la *lunghezza totale* del *più corto* programma di U capace si produrre in output *solo e soltanto* s. Una sequenza binaria si dice *casuale rispetto alla macchina U*, se la sua complessità non è *sostanzialmente* minore della sua lunghezza. Il termine "sostanzialmente" sembra, giustamente, inopportuno: il suo scopo è semplicemente quello di lasciare aperta, per generalità, la convenzione circa il "grado" di casualità desiderato. Noi stabiliremo, come riferimento, che una

[35] In realtà, comunemente, il programma esterno non si scrive in codice binario, ma in un linguaggio di *alto livello* (che usa termini come *PRINT*, *DO*, etc.). Un'apposita operazione su quest'ultimo, chiamata *compilazione*, traduce il programma esterno in codice binario. Quest'ultimo è effettivamente *eseguibile* dalla macchina e comanda il *programma interno*.

differenza superiore a 10 bits sia "sostanziale"; pertanto riformuleremo: *una sequenza s si dice casuale rispetto alla macchina U se: K(s)*$\geq$*L(s)–10.*

In termini più semplici, una sequenza binaria casuale non è *sostanzialmente* (cioè, per più di 10 bits) *comprimibile* mediante nessun programma; cioè, in nessun modo. Per una qualsiasi sequenza non casuale, invece, risulta K(s)<L(s)–10, il che significa che esiste almeno un programma di U che lo genera unicamente, la cui lunghezza totale è minore di L(s)–10: la stringa è dunque *sostanzialmente* comprimibile.

Esistono sempre sequenze binarie casuali? Combinando in tutti i modi possibili p cifre binarie si possono ottenere 2^p distinte sequenze binarie. Ovvero, il numero delle distinte stringhe di medesima lunghezza p è 2^p. Per esempio, esistono $16=2^4$ diverse sequenze binarie di lunghezza 4. Possono essere non casuali tutte le 2^p stringhe, per ogni p? Ciascuna di esse dovrebbe essere stampata unicamente, da un programma la cui lunghezza totale è minore di p–10 bits. Ma quanti sono tutti i programmi di lunghezza totale minore di p–10 bits? Con lunghezza di un solo bit esistono i due programmi "0" e "1", con lunghezza di due bits esistono quattro programmi, etc., con lunghezza di p–11 bits esistono 2^{p-11} programmi. Pertanto, il numero dei programmi di lunghezza totale minore di p–10 bits è dato dalla somma: $2^1+2^2+...+2^{p-11}$, pari a $2^{p-10}–2$. Ma tale numero è palesemente più piccolo di 2^p. Supponendo che ciascuno di tali programmi stampi unicamente una delle 2^p stringhe di lunghezza p (evidentemente, una situazione estremamente ottimistica), avremo allora che $2^{p-10}–2$ delle 2^p stringhe sono non casuali. Ma il rapporto $(2^{p-10}–2)/2^p$ è pari a circa 1/1024 per ogni valore di p. Ciò significa che, nella situazione più esageratamente ottimistica, solo un numero su 1024, circa, non è casuale, per ogni valore di p! La casualità rispetto a una prefissata macchina universale U è, dunque, il caso normale per le infinite sequenze binarie. Questa proprietà si può effettivamente considerare di validità generale, in quanto una riduzione di 10 bits è normalmente considerata una piccola riduzione.

Non pochi lettori, a questo punto, potrebbero restare perplessi: se la maggior parte delle stringhe binarie sono incompressibili, come si spiega la diffusione e l'efficacia dei diversi programmi di compressione che ci permettono di ridurre la dimensione dei *files* informatici (per esempio, prima di inviarli per *e-mail*)? Anzitutto, è doveroso precisare che la compressione di cui stiamo parlando non ammette alcuna perdita d'informazione: dalla stringa compressa deve potersi sempre ricostruire *esattamente ogni bit* della stringa originale. Questo caso viene chiamato *lossless* ("senza perdita"). Tutt'altro caso logico è quello in cui si ammette una (limitata) perdita d'informazione: ci sono tantissime stringhe non casuali che differiscono di pochi bits da una stringa casuale. La maggior parte dei programmi di compressione audiovisuale (formati *mpeg*, *jpeg*, *mp3*, etc.) opera con una perdita di informazione (il cui grado può essere stabilito dall'utente). Del tipo *lossless* debbono essere, invece, le compressioni di testi e programmi eseguibili (comuni *files* compressi *lossless* hanno l'estensione *zip*, *rar*, etc.). In questi casi la tecnica di compressione consiste nell'eliminazione delle *ridondanze*. Se consideriamo il testo di una *qualsiasi* lingua, si osserverà che alcuni caratteri sono più frequenti di altri; in un testo in italiano, le "a" sono molto più numerose delle "q" e queste ultime molto più numerose del simbolo "$". La tecnica di compressione che può usarsi, equivale ad una ridefinizione del codice binario dei caratteri: i simboli più frequenti vengono codificati con pochi bits, mentre quelli più rari vengono associati alle combinazioni binarie più lunghe. Tale ridefinizione è stabilita, dopo uno studio sulla stringa, da un programma apposito che spende un ulteriore numero r di bits; la compressione sarà dunque effettiva soltanto se il numero di bits risparmiati è *sostanzialmente* maggiore di r.

Anche i programmi informatici sono spesso (ma non sempre) ridondanti, sia per la presenza di testo, sia perché a certe istruzioni, statisticamente, ne seguono più probabilmente determinate altre. Riflettendo un pò, ci si convincerà che è realmente difficile che un qualunque prodotto umano sia (fortemente) casuale. Normalmente, non lo sono i valori della frequenza e della durata delle note di un qualsiasi componimento musicale; e neppure le immagini di un qualunque film: per esempio, gli oggetti superiori sono statisticamente più chiari di quelli inferiori. In genere, ogni "creazione umana" si distingue dal caos della casualità; la quale, se assoluta, non può in fondo *significare* davvero nulla. E neppure deve preoccupare il fatto che di stringhe non casuali ce ne siano pochissime rispetto a quelle casuali, dato che se ne può disporre, ugualmente, di un'infinità numerabile.

Un *file* compresso mediante una tecnica *lossless ideale,* in grado di eliminare ogni ridondanza, sarebbe casuale; si può *simulare* questo caso cercando (inutilmente) di comprimere più volte un *file* già compresso con la medesima tecnica *lossless*.

Una macchina universale U è sempre in grado, data un'arbitraria sequenza binaria, di costituire il programma che essa rappresenta ed eseguirlo. Pertanto, è sempre capace di concludere se una stringa non è casuale: dovrà individuare un programma di una lunghezza totale *sostanzialmente* più corta di essa che la stampa unicamente. Più problematica, invece, sembra la conclusione di casualità per una data stringa s (che, naturalmente, supponiamo di lunghezza maggiore di 10); un programma che usi un metodo diretto dovrebbe analizzare le uscite di tutti i programmi di lunghezza totale minore di L(s)-10, per vedere se stampano solo e soltanto s. Ma per portare a termine l'analisi e, possibilmente, concludere la casualità di s, dovrebbe essere capace di riconoscere tutti i programmi che stampano al più una stringa e non terminano. Se riuscisse a farlo per ogni s, tale programma sarebbe capace di risolvere il problema dell'arresto per una classe di programmi che si può facilmente generalizzare senza limiti. Questa osservazione, dunque, sembra connettere la possibilità di riuscire a stampare una qualsiasi stringa casuale con quella di risolvere il problema dell'arresto di un qualunque calcolo; cosa che sappiamo essere impossibile per una macchina e connessa al Metateorema di incompletezza.

Effettivamente, l'interpretazione di Chaitin del Metateorema d'incompletezza per una macchina universale U, ha come conseguenza che U può riconoscere la casualità di un numero necessariamente *finito* di stringhe. L'esatta formulazione, più generale, è la seguente: *esiste un numero naturale c, dipendente dalla macchina U, tale che U non può concludere, per nessuna stringa s, che K(s)>c*. In altri termini, ogni macchina universale ha un limite superiore per la complessità che può concludere per una stringa.

Prima della metadimostrazione, osserviamo subito come dal Metateorema derivi ancora un'incompletezza di tipo *essenziale* per il Sistema formale rappresentato dalla macchina U (più esattamente, dal suo programma interno M). Abbiamo visto che esistono stringhe casuali arbitrariamente grandi; in particolare, infinite tali che $L(s_r)>c+10$, dove s_r indica una generica stringa casuale (*random*). Si ha allora che tutti gli "enunciati" del tipo <<la stringa s_r è casuale, dove $L(s_r)>c+10$>> sono "indecidibili" per la macchina universale, pur essendo veri. Per assurdo, cioè nell'ipotesi che la macchina possa concludere la verità di un tale enunciato, la stessa macchina, in base alla relazione $K(s_r)\geq L(s_r)-10$, valida per ogni stringa casuale, dedurrebbe correttamente anche $K(s_r)>c$, violando il Metateorema appena formulato. Gli enunciati di questo tipo sono infiniti e si ripresentano inesorabilmente in qualsiasi macchina universale corretta, per quanti "assiomi", anche di numero infinito[36], si vogliano aggiungere al *programma interno*.

Un'altra conseguenza del Metateorema (non rilevata, ci sembra, da nessuna pubblicazione da noi consultata) è che *nessun programma che termina sempre può essere certificato come un programma ideale di compressione lossless*, cioè capace di eliminare tutte le ridondanze di una qualsiasi stringa. Infatti, tale programma non riuscirebbe a comprimere soltanto le stringhe casuali; allora, servendoci di esso, potremmo riconoscere meccanicamente una stringa casuale comunque grande, cosa impossibile.

Per metadimostrare il Metateorema d'incompletezza di Chaitin, ragioniamo per assurdo: supponiamo che, per ogni (arbitrariamente grande) numero naturale n, M possa dimostrare l'enunciato $K(s)>n$ per qualche stringa binaria s. Potremmo allora considerare il seguente programma P: con input n, si considerano in ordine di lunghezza crescente tutti i programmi di U (si farà uso di un programma, diciamolo G, che genera tutte le possibili combinazioni

[36] Dal Metateorema segue che l'insieme degli infiniti assiomi (supposti corretti) "s_1 è casuale, s_2 è casuale, ..." non è *effettivamente numerabile*. Allora, un Sistema di calcolo ottenuto a partire dal programma interno di una macchina universale aggiungendo le condizioni corrispondenti a tali infiniti assiomi, non potrebbe più essere una *macchina*.

binarie), fino a trovare il primo che stampa correttamente "K(s)>n". Poi, lo modificheremo in modo da fargli stampare solo e soltanto la stringa s e termineremo. Indicando con st(n) la stringa che, nella macchina U, rappresenta il numero naturale n (cioè il codice binario del numero n), la lunghezza totale del programma P è sostanzialmente:

$$L(st(n))+L(G)+L(M)$$

dove L(G) è il numero di bits del programma G. L'unico numero non costante è il primo. Dunque P, con tale lunghezza totale, stampa una stringa s, di complessità maggiore di n.

Normalmente, la metadimostrazione prosegue assumendo che L(st(n)) è circa $\log_b(n)$, dove b è la base scelta per la rappresentazione (esponenziale) dei numeri naturali (standard[37]). Per esempio, l'usuale rappresentazione decimale dei naturali è un codice esponenziale in base dieci, lungo, effettivamente, all'incirca $\log_{10}(n)$, per ogni n. Nelle ordinarie macchine di calcolo, per rappresentare i numeri naturali si suole adoperare piuttosto il codice binario in base due:

0	per 0	[in base decimale: 0]
1	per s(0)	[in base decimale: 1]
10	per s(s(0))	[in base decimale: 2]
11	per s(s(s(0)))	[in base decimale: 3]
100	per s(s(s(s(0))))	[in base decimale: 4]
..........…...................		

Si noti che tutte le combinazioni che cominciano per "0" non vengono usate in questo codice, tranne nell'unico caso di "0". Anche qui il numero di cifre di un numero n è dato, all'incirca da $\log_2(n)$, per ogni n. Infatti può facilmente dimostrarsi che questa proprietà vale per una qualsiasi rappresentazione esponenziale in base arbitraria b.

[37] D'ora in poi ometteremo di precisare che i numeri naturali codificati all'interno delle ordinarie macchine di calcolo sono, naturalmente, quelli standard.

Tuttavia, nulla in principio vieta che la macchina usi un codice particolare ed arbitrario, affatto diverso da quello esponenziale. Anzitutto nel seguito, per semplificare le notazioni, anzichè indicare un generico naturale standard con s(...(0)...), impiegheremo la notazione n_m: essa rappresenta il numero naturale che nell'usuale codice decimale si scrive con m [per esempio, n_2 e n_{268} indicheranno i numeri naturali che normalmente rappresentiamo con 2 e 268]. Consideriamo, per cominciare, il seguente codice (privo di criterio apparente):

0 per n_6
1 per n_1
10 per n_{2127}
11 per n_5
100 per n_{40008}
..........…..........

Oppure, quest'altro:

1 per n_0
11 per n_1
111 per n_2
1111 per n_3
....

O perfino:

10101010 per n_0
101010101 per n_1
1010101010 per n_2
....

Il primo esempio non convenzionale è un codice irregolare in grado di accorciare quelle stringhe che contengono parecchi numeri naturali la cui rappresentazione decimale è 2127 e 40008; pertanto, potrebbe avere la sua utilità in certi casi. Gli altri due esempi, invece, sono codici assai dispendiosi di bits, perché non utilizzano moltissime delle possibili combinazioni binarie. Nel primo dei due (in cui il bit "0", potrebbe essere usato come separatore), la lunghezza del codice di un numero n_m è pari, in decimale, a m+1; nel secondo, addirittura a m+8. È evidente che lavorare con tali codici sarebbe assai scomodo (per non dire insensato); ma dal punto di vista logico, la scelta della rappresentazione binaria dei numeri è ininfluente, dato che essa determina soltanto il *modo* in cui la macchina dovrà eseguire le operazioni (di somma, assegnazione, etc.).

Per generalizzare a casi come questi la metadimostrazione, sfrutteremo il fatto che la macchina U è universale. Essa è certamente capace, allora, di riprodurre un qualsiasi codice in base esponenziale. Scegliamone uno ad arbitrio: per esempio, quello in base due. Dall'universalità della macchina, esiste certamente un programma D di U che, con input un'arbitraria combinazione binaria che comincia con "1", dà in uscita il numero naturale che gli corrisponde secondo il codice in base due; quest'ultimo numero, nondimeno, rappresentato secondo il codice caratteristico della U, cioè mediante la stringa st(n). L'algoritmo più primitivo per D si può basare sul programma G, contando, con poche altre istruzioni di lunghezza totale h, tutte le possibili combinazioni binarie che cominciano con "1", fino a trovare la stessa stringa di input; poi stampare il conteggio. La lunghezza totale del programma D, allora, sarà: $\log_2(n)+L(G)+h+L(M)$ ed ha come uscita st(n), cioè l'input del precedente programma P. Combinando i programmi D e P, si forma un unico programma la cui lunghezza è circa:

$$\log_2(n)+L(G)+h+L(M)$$

ovvero $\log_2(n)+k$, con k costante, capace di stampare una stringa s, di complessità maggiore di n, per ogni n. Ora, poiché tale programma stampa unicamente s, la sua lunghezza dev'essere maggiore o uguale a K(s), per definizione di complessità; cioè sarà: $\log_2(n)+k \geq K(s)$. E dall'ipotesi K(s)>n, segue infine:

$$\log_2(n)+k>n, \text{ per ogni } n$$

cosa evidentemente impossibile: la differenza n-$\log_b(n)$ si fa arbitrariamente grande al crescere di n, qualunque sia la base b del logaritmo[38].

Ovviamente, la costante c dipende solo dalla macchina. Si può avere un'idea del suo valore, stimandolo come il massimo valore di n affinché nella metadimostrazione appena vista non ci sia assurdo, cioè prendendo: $c \approx \log_2(c)+L(G)+h+L(M)$. In breve, c differisce di una costante dalla lunghezza del programma interno M. Effettivamente, si può rigorosamente metadimostrare che c dipende solo dal programma interno M.

La casualità di una stringa dipende dalla macchina universale considerata. Una stringa casuale per una macchina universale, può non esserlo per un'altra e viceversa (fissato in entrambe lo stesso parametro, o *sostanzialità*, della compressione). L'esempio tipico riferito da tutti (anche da Chaitin) a rappresentazione di una stringa "non casuale" è una stringa che si può riassumere con espressioni quali "20 volte 01", "167 volte 1", "un milione di volte 0", etc., quando il convenuto grado di compressione *sostanziale* è sufficientemente piccolo. Tuttavia, *ciò non è esatto*. Nessuno dubita che tali espressioni comprimino la normale e spontanea rappresentazione delle stringhe, ma correttamente qui bisogna chiedersi: "non casuale" rispetto a quale macchina? Consideriamo una macchina universale U che faccia uso di un codice irregolare del tipo di quelli da poco esemplificati. Se alla stringa "un milione", o al numero naturale che essa rappresenta, tale codice associa una stringa binaria di lunghezza un miliardo, si vede bene che l'ultima delle suddette descrizioni, tradotta in bits, non sarà affatto più corta della stringa che produce. È vero che U potrebbe sempre riprodurre, mediante un apposito programma D, un codice esponenziale in una certa base b capace di comprimere fortemente la stringa di input; ma, ancora, la lunghezza di D potrebbe essere arbitrariamente grande, dipendendo dal codice con cui la macchina rappresenta le istruzioni (per esempio, il codice binario dell'istruzione *DO* potrebbe essere di due miliardi di bits). Nessuno questiona l'assurdità *pratica* di una scelta di questo tipo; ma, dal punto di vista logico, resta il

---

[38] Assumendo la Tesi di Church-Turing, si ottiene, dunque, un Metateorema equivalente al Metateorema di Church-Turing (o d'incompletezza).

fatto che la stringa in esame potrebbe essere *casuale* in siffatta macchina. D'altra parte, è certo, invece, che una stringa così regolare, *finisce con l'essere non casuale* in qualunque macchina, *se abbastanza lunga*. Più in dettaglio, per ogni macchina U, esiste un numero naturale n, tale che la descrizione "n volte 0" (per fare un esempio), tradotta in bits, sia sostanzialmente più corta della stringa che produce; che, quindi, sarà non casuale. Per provarlo, si può ancora considerare una riproduzione, nella macchina, di un codice esponenziale in una certa base b e ripetere il ragionamento della metadimostrazione.

Come esempio inverso, possiamo supporre che, in riferimento al classico codice di base due, la descrizione "2127 volte 110" non sia *sostanzialmente* più corta della stringa che rappresenta; ciò, a semplice conseguenza della pretesa di un altissimo grado di compressione (assai maggiore di 10 bits). Se non lo è per "colpa" di pochi bits, allora la stessa descrizione, in una macchina universale che usasse il primo codice "irregolare" prima esemplificato, potrebbe invece rappresentare una compressione *sostanziale*: infatti, il numero n_{2127} si rappresenta, qui, soltanto con "10", mentre nel codice in base due ha molti più bits (naturalmente, si potrebbe portare un esempio diverso in cui tale differenza di bits sia grande come desideriamo). In definitiva, tale stringa potrebbe essere casuale nel primo codice e non casuale nel secondo, in base allo stesso grado di compressione stabilito come minimo soddisfacente.

Data una stringa sufficientemente lunga, casuale per una certa macchina universale, non c'è nulla – mi sembra – che vieti che esista *sempre* un'altra macchina universale, che usa un diverso codice, in cui tale stringa è non casuale, secondo il medesimo parametro di compressione convenuto come soddisfattorio. L'impressione che, anzi, ciò sia vero, deriva dal ritenere che, in principio, sia sempre possibile definire, senza spendere troppi bits, un codice in cui a una stringa arbitraria in bits e in lunghezza, sia ri-associato un numero di bits abbastanza minore (in cui tale "abbastanza" è approssimativamente proporzionale alla lunghezza della stringa originaria)[39]. Se non siamo in errore, allora, qualsiasi stringa sufficientemente lunga potrebbe essere *sostanzialmente* compressa; ma per farlo bisognerebbe, in generale, adottare una macchina universale *ad hoc*, per la quale, come sappiamo, resterà in ogni caso una quantità schiacciante di altre stringhe casuali. In ogni caso, senza dubbio, sarebbe impossibile che un insieme *finito* di macchine universali "lasciasse" solo un numero finito di stringhe casuali. Infatti, una qualsiasi macchina universale è in grado di simulare, con un programma finito, il comportamento di un numero finito di altre macchine: allora, anche per essa ci sarebbero un numero finito (anche se diverso dal precedente) di stringhe casuali, cosa impossibile. Invece, sempre nell'ipotesi che la proprietà da noi enunciata sia vera, esisterebbe di certo un insieme *infinito* di macchine universali che "eliminerebbe", nel senso descritto, la casualità di tutte le stringhe più lunghe di un certo valore. Ma, chiaramente, trattandosi comunque di un'infinità non effettivamente numerabile, sarebbe un tipo di "risoluzione" della casualità totalmente illusoria in pratica.

III.8. Vanagloria di Chaitin

Purtroppo Chaitin si lascia andare ad affermazioni superficiali, spesso scorrette, che causano pericolose confusioni sulla già non facile questione dell'incompletezza. I suoi (numerosi) difensori affermano che tali problemi sorgono soltanto quando si dà, ingiustamente, un peso esagerato a sue affermazioni informali che hanno il solo scopo di chiarire l'argomento al grande pubblico. Ma alcuni errori che segnaleremo, dimostrano che non è sempre così. Inoltre è anche indubbio che, nello sforzo di pubblicizzare smisuratamente i suoi risultati, egli vi assegna un'importanza che in realtà non possiedono.

La prima fondamentale scorrettezza che rileviamo è proprio il suo leggero proclamare di aver scoperto "la casualità in

[39] Naturalmente, ció dovrebbe rigorosamente metadimostrarsi. Stiamo semplicemente avanzando una congettura fondata su una impressione intuitiva che potrebbe rivelarsi errata.

Aritmetica"[40]. Come abbiamo visto, la casualità è una proprietà che *riguarda le stringhe di caratteri* e non, direttamente, i numeri naturali. Nell'usuale codice in base due (come in una qualsiasi altra rappresentazione esponenziale in base b), si ha che, effettivamente, un numero infinito e preponderante delle stringhe che rappresentano i numeri naturali sono casuali. Ma, ovviamente, *non c'è alcuna ragione logica* che impone la scelta di una codificazione anziché un'altra. Negli ultimi due codici non esponenziali esemplificati nel paragrafo precedente, si ha che solo un numero finito di numeri naturali (o meglio di stringhe che rappresentano i numeri naturali) è casuale. Infatti, abbiamo già osservato che una sequenza del tipo "11111..." finisce con l'essere non casuale in qualunque macchina universale. Il fatto che tali codificazioni siano goffamente dispendiose di caratteri, è una questione che non tange né la Teoria dei numeri naturali, né la Logica. L'unica proprietà dell'Aritmetica (ma, più in generale, di un qualunque Sistema formale che soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza) relazionata con la casualità delle stringhe, è l'impossibilità, per tale Teoria, di dimostrare la casualità di stringhe sufficientemente lunghe. La quale, come osservato, è una ri-formulazione del Metateorema d'incompletezza[41].

D'altra parte, come abbiamo osservato, *anche la casualità delle stringhe non è assoluta, ma relativa* al programma interno (con un riguardo speciale al codice) adoperato dalla macchina universale.

Nello stesso articolo de *Le Scienze* citato nell'ultima nota, Chaitin scrive:

> *La maggior parte dei matematici non ha dato molto peso [all'incompletezza].... forse bisognerebbe [invece] cercare*

[40] Due esempi: <<*recentemente ho dimostrato che esiste una casualità nella teoria dei numeri. Il mio lavoro dimostra che – per usare una metafora di Einstein – Dio talvolta gioca a dadi con i numeri interi!*>>, *La casualità in Aritmetica*, rivista *Le Scienze* n. 241, settembre (1988); <<*in poche parole, Gödel ha scoperto l'incompletezza, Turing l'incomputabilità e io la casualità*>>, prefazione del libro *The unknowable*, ed. Springer-Verlag, Singapore (1999). Frasi di questo genere si ripetono nella quasi totalità delle sue pubblicazioni più recenti.

[41] Nessuna pubblicazione da noi consultata, ci sembra, segnala l'errore logico appena discusso.

nuovi assiomi validi per i numeri interi. La quantità di problemi matematici rimasti irrisolti per centinaia o migliaia di anni tende a rafforzare la mia tesi. Non potrebbe darsi che qualcuno di tali enunciati sia indimostrabile? Se così fosse, forse i matematici farebbero meglio ad accettarlo come assioma. Questa proposta potrebbe sembrare ridicola a molti matematici... ma non agli scienziati empirici… In realtà, in alcuni casi i matematici hanno già assunto a fondamento congetture non dimostrate ma utili.

Gli assiomi fondazionali delle usuali Teorie, possiedono il più delle volte una primitività che rende inquestionabile la loro indecidibilità. Consideriamo per esempio gli assiomi propri di PA (par. II.1). I primi tre, assolutamente primari, stabiliscono in sintesi che "ogni naturale ha successore diverso dal naturale 0"; senza aggiungere null'altro circa i concetti *definiendi*. Non ci sono dubbi, dal punto di vista metamatematico, che essi non possono implicare il seguente assioma, "se due naturali hanno lo stesso successore allora sono uguali", nè la sua negazione. Certo, non è sempre così. Ma tutte le volte in cui in un assioma tale primitività non traspare, è preoccupazione persistente nei matematici la ricerca di una dimostrazione/confutazione dell'enunciato o metadimostrazione della sua indecidibilità. Questo tradizionale e del tutto sensato criterio, è capace di produrre risultati pregevoli sia dal punto di vista epistemologico che puramente matematico. Abbiamo già parlato del V postulato di Euclide (che pure ha resistito migliaia di anni) e delle Geometrie non euclidee; anche le metadimostrazioni di indecidibilità dell'assioma di scelta e dell'ipotesi del continuo sono, senza dubbio, risultati di grande valore sia per il tema in sè, che per il metodo impiegato.

Considerare come indimostrabile un enunciato su una base esclusivamente empirica, dunque, suona come a voler inibire, a priori, lo sviluppo della Logica e della Matematica ad esso eventualmente connesse. Per di più, sarebbe inutile. Quando un enunciato, che sembra essenziale o importante per lo sviluppo di nuova teoria, resiste alla dimostrazione o classificazione come indecidibile, i matematici, obbedendo da tempo a un criterio di tipo empirico, usano, appunto, il termine *congettura*. Le congetture vengono trattate come enunciati veri (e quindi, di fatto, come assiomi) per studiarne le conseguenze, con l'eventualità di fargli discendere enunciati finalmente dimostrabili o confutabili. Considerarle *assiomi* su un fondamento soltanto empirico, sarebbe dunque non solo presuntuoso e rinunciatario, ma anche specificatamente non necessario. La "presunzione rinunciataria" è il proclamare, senza giustificazione logica nè ambizioni ad averne, che la Teoria, supposta originariamente coerente, conservi la coerenza con i nuovi assiomi. Soltanto perchè finora non si è mostrato il contrario. E ciò, come detto, senza alcun concreto vantaggio, perché ogni conseguenza dal supporre la verità di tali enunciati si può studiare ugualmente bene nella Teoria originaria.

Non si capisce perchè il Metateorema di incompletezza debba cambiare questo stato logico di cose. Esso non fa che chiarirci la natura degli enunciati indecidibili di una Teoria che soddisfa le sue ipotesi. In particolare, ci indica che essi sono infiniti, inesorabilmente presenti e non interamente identificabili in modo meccanico. Indubbiamente brutte notizie, da una certa prospettiva; che, tuttavia, per nessun enunciato indecidibile precludono la possibilità di un riconoscimento puramente metamatematico (con l'eventualità di nuovi sviluppi logico-matematici). E, soprattutto, che in nessun caso valgono a giustificare l'uso di un "rimedio" rinunciatario ed imprudente, oltrechè inutile.

Questo scorretto atteggiamento, destinato evidentemente a suscitare clamore oltre il buon senso, si ripete, enfaticamente, in quasi tutti i lavori più recenti di Chaitin: in preda a un ottuso entusiasmo dell'incompletezza, egli giunge a questionare l'opportunità stessa dei Sistemi assiomatici hilbertiani[42].

Un altro errore è stato evidenziato recentemente da T. Franzén[43]. Nell'*abstract* di un suo articolo, Chaitin afferma che, come conseguenza del Metateorema d'incompletezza di Gödel, <<*un insieme di assiomi di [complessità] K, non può dimostrare un*

[42] Si legga, ad esempio: G. Chaitin, *The halting probability Ω: irreducible complexity in pure mathematics*, Milan Journal of Mathematics n. 75 (2007), p. 2 e seguenti.
[43] *Gödel's Theorem: an incomplete guide to its use and abuse*, A. K. Peters (2005).

enunciato di [complessità] sostanzialmente maggiore di K>>[44]. Una frase che stupisce. Anzitutto, il Metateorema d'incompletezza di Chaitin stabilisce una limitazione nel dedurre la complessità delle stringhe *in generale* e non solo di quelle che costituiscono un teorema (o anche un enunciato). Inoltre, la sentenza è evidentemente sbagliata. Franzén confuta così: dal solo assioma "$\forall$ x(x=x)", di complessità costante, si può ottenere un teorema, "n=n", di complessità arbitrariamente grande: basta che la stringa che rappresenta n abbia una complessità sufficientemente alta (nel codice in base due, questo è garantito al crescere di n). In un altro scritto, Chaitin sembra voler correggere il tiro, avanzando la congettura che <<*non è possibile accorgersi, quando accade, che un teorema ha una complessità sostanzialmente più grande dell'insieme degli assiomi da cui deriva*>>[45]; la frase equivarrebbe a <<*nessuna macchina universale U può concludere che K(t) è sostanzialmente maggiore di K(M)* (la complessità del programma interno), *qualunque sia il teorema t*>>. Tuttavia, mantenendo per il termine *sostanzialmente* il significato prima stabilito (e cioè un valore a priori variabile, determinato soltanto da un accordo convenuto), si può concludere che anche questo è sbagliato. L'affermazione, in effetti, è distante dalla formulazione del Metateorema d'incompletezza di Chaitin; che ricordiamo: <<*per ogni macchina universale U, esiste un c tale che U non può concludere che K(s)>c, qualunque sia la stringa s*>>. Si può notare che le due frasi potrebbero riconciliarsi (sorvolando sul fatto che la prima si riferisce, sconvenientemente, ai soli teoremi), qualora <<*maggiore di c*>> implicasse <<*sostanzialmente maggiore di K(M)*>>, ovvero

[44] *Gödel's Theorem and Information*, International Journal of Theoretical Physics n. 22 (1982). In verità Chaitin non usa il termine *complessità* ma "contenuto d'informazione". Tuttavia, dato che si sta riferendo al Metateorema d'incompletezza, tale identificazione è spontanea. D'altra parte, qualora si riferisca a un più generale contenuto epistemologico (come forse testimonierebbe un'altra sua frase d'effetto <<*vorrei dire che da 10 pounds di assiomi non si può ottenere un teorema da 20 pounds*>>) si potrebbe esser d'accordo a patto di aggiungere il contenuto epistemologico delle regole deduttive; cioè, se ci si riferisse alle *premesse* piuttosto che ai soli assiomi.

[45] *Lisp Program-size complexity II*, Applied Mathematics and Computation 52 (1992).

se c fosse sostanzialmente maggiore di K(M). Ma c, per ció che abbiamo prima concluso, differisce di un valore costante da K(M); pertanto basta spingere opportunamente il grado di *sostanzialità*, per ottenere che c non è *sostanzialmente* più grande di K(M).

Franzén continua criticando, crediamo giustamente, altre "leggere" affermazioni di Chaitin; ma le tralasciamo, non giudicandole di fondamentale interesse.

Finalmente, è il caso di venire al tema della famosa costante di Chaitin Ω. Su un'arbitraria macchina universale U, avviamo tutti i possibili programmi ordinati in lunghezza. Definiamo la sequenza binaria V_U, tale che l'i-esimo suo bit è "1" se il programma i-esimo si ferma; "0", se non si ferma. V_U è una stringa binaria di lunghezza infinita, la cui conoscenza risolverebbe il problema dell'arresto di U e, quindi, qualsiasi problema matematico di ogni Teoria *eff. ass.* (o, più in generale i cui assiomi sono effettivamente numerabili). Il metateorema d'incompletezza vieta che V_U possa essere calcolato da una macchina. V_U è una stringa "oracolo" interessante, ma le sue cifre non sono del tutto casuali: se scegliamo a caso una delle possibili combinazioni di bits lunghe k, la probabilità che rappresenti il codice di un programma "sensato" (o di uno in cui da un semplice sguardo non si sappia riconoscere se si ferma o no), è bassa, per ogni k. Normalmente, quando le istruzioni non sono ben scritte o non obbediscono a precise regole sintattiche, si fa in modo che la macchina termini, stampando un messaggio di errore. Dunque, la stringa V_U, comunemente, ha molti più "1" che "0".

Un'evoluzione senz'altro interessante di stringa "oracolo" si ottiene tramite la costante Ω (che noi preferiamo chiamare Ω_U per ricordare che dipende dalla macchina), introdotta da Chaitin. Ω_U può essere definita come il codice binario di un numero reale compreso tra 0 e 1: quello che rappresenta la probabilità che un programma della macchina U, scelto a caso, si fermi[46]. In base a quanto osservato, anche i primi bits di Ω_U non sono affatto casuali: per una comune macchina, Ω_U, espresso in base dieci sarà, per esempio, del

[46] Per dare significato alla definizione, comunque, bisogna restringere il campo delle macchine a quelle i cui programmi siano *auto-limitanti*: ossia, la loro lunghezza in bits dev'essere data all'interno del programma stesso. Ma non ci interessa approfondire oltre.

tipo 0.999623.., cioè molto vicino a 1 (che rappresenta la certezza che si fermi). Tuttavia, dopo alcuni "9", la cifra si fa rapidamente imprevedibile, come si può intuire.

La sequenza binaria di Ω_U rappresenta una sorta di massima "compressione" del contenuto informativo di V_U: dalla conoscenza dei primi n bits di Ω_U si può risolvere il problema dell'arresto per tutti i programmi di lunghezza minore o uguale a n (i quali sono 2^{n+1}-2)[47]. Per fare lo stesso con V_U, invece, occorrerebbe sapere i suoi primi 2^{n+1}-2 bits! Delle tante proprietà di Ω_U, la più interessante è forse la seguente: pur essendo non calcolabile, è il *limite* di una lista infinita, effettivamente numerabile, s_1, s_2, ... di stringhe finite. In modo più nitido, si ha che: l'i-esimo bit di Ω_U vale b se e solo se esiste un c>0 tale che anche l'i-esimo bit di s_j è b, per ogni j>c. Per dirlo in un modo ancora più esplicito, quello che *si può fare* con una macchina, cercando di calcolare Ω_U è la seguente cosa: scrivere un programma che generi in uscita la lista, infinita numerabile, di tali opportune stringhe s_1, s_2, ... e *cercare* di dimostrare che l'i-esima cifra di tali stringhe finite "si assesta" su un valore costante b, cioè che non può più cambiare per tutte le stringhe successive. Facendo ciò, si sarà dimostrato che l'i-esimo bit di Ω_U è proprio b. Il numero di cifre di Ω_U calcolabili meccanicamente (dalla stessa macchina universale U o da una qualsiasi altra macchina) è sempre finito: Chaitin stesso prova che, per ogni macchina di programma interno M, esiste un numero c tale che ogni enunciato del tipo "l'i-esimo bit di Ω_U è b", con i>K(M)+c, sia indecidibile per la macchina[48]. Questa non è che un'ulteriore formulazione del Metateorema d'incompletezza. Ciò non significa, naturalmente, che ci sia una determinata cifra-limite nella calcolabilità del numero: aumentando opportunamente la complessità della macchina M, si può sempre calcolare qualunque remota cifra di Ω_U; ma nessuna macchina può "andar avanti per sempre", cioè calcolare tutte le sue cifre (qualora disponesse di un tempo infinito).

---

[47] Un'accessibile spiegazione del modo ne: *Il numero casuale Ω e il problema dell'arresto*, M. Gardner, rivista *Le Scienze* n. 139, marzo (1980).

[48] G. Chaitin, *The limits of Mathematics*, Springer-Verlag, Singapore (1997).

Il calcolo di un numero considerevole di cifre di Ω, in riferimento ad un'opportuna macchina universale, è stato effettivamente realizzato da Calude ed altri[49].

L'affascinante interesse epistemologico del numero Ω_U è fuori discussione e la sua introduzione va indubbiamente annoverata tra le glorie di Chaitin (se non lo abbiamo fatto nel paragrafo precedente è stato solo per snellire la sua lettura); le quali non si esauriscono certo qui. Tuttavia, è evidente che egli esagera oltremodo la sua importanza. La quantità delle sue pubblicazioni su Ω (oppure una semplice occhiata alla sua *home page*) sono sufficienti a testimoniarlo. Ω_U non è, naturalmente, il vero obiettivo della conoscenza: cosa dovremmo farcene di una sequenza casuale di bits? È vero che da un certo numero di sue cifre si può risolvere il problema dell'arresto di quella particolare macchina per un elevato numero dei suoi primi programmi (i quali rappresentano l'unico interesse propriamente matematico della faccenda); ma per ottenere quelle cifre non si può far altro che... risolvere il problema dell'arresto della stessa macchina per un numero addirittura *superiore* (come confermano Calude *et al*.) dei primi programmi della macchina!! Dare alcune cifre di Ω_U è solo un fantastico, insuperabile, modo di riassumere il comportamento dei primi programmi della macchina; cosa poi facciano tali programmi, che sarebbe il vero obiettivo, sembra non interessare né a Chaitin né ai suoi seguaci[50]. Certo, questo è perché essi sono attratti dall'aspetto teorico del tema, la cui innegabile suggestività si condivide. Ma dopotutto, supposto che nessuna divinità ci regala cifre di Ω_U, queste non possono neppure essere *il mezzo* per ottenere la conoscenza[51].

[49] C. S. Calude, M. J. Dinneen e Chi-Kou Shu, *Computing a glimpse of randomness*, Experimental Mathematics n. 11:3 (2000).

[50] Calude *et al.* non evidenziano l'interesse propriamente matematico dei programmi per i quali risolvono il problema dell'arresto. Dal che immaginiamo che non ne possiedano; ma anche se lo possedessero, sarebbe la particolare *dimostrazione* di arresto/non arresto ad avere valore matematico e non certo il corrispondente peso su un bit di Ω_U.

[51] Come invece sembra suggerito, ad esempio, da queste parole: "*Ω is the diamond that [...] in principle enable you to tell whether or not the Riemann hypothesis is false*", G. Chaitin, *The halting probability Ω: irreducible complexity in pure mathematics,* Milan Journal of Mathematics n. 75 (2007), p. 12.

Esse sono solo l'immigliorabile modo di riassumerla, dopo averla ottenuta – possibilmente su un argomento interessante – mediante teoremi e metateoremi.

III.9. Altri equivoci

Abbiamo già segnalato diversi errori d'interpretazione del Metateorema d'incompletezza[52], ma ne restano altri, alcuni assai rilevanti.

Prima del 1936 (anno in cui Malcev stabilisce l'attuale interpretazione generale del teorema di Löwenheim-Skolem, par. II.17), è comune l'equivoco di ritenere che la non categoricità dei Sistemi formali sia una conseguenza del Metateorema d'incompletezza. Ripetiamo che, in effetti, se un Sistema per il cui linguaggio vale il Teorema di s-completezza, è sintatticamente incompleto, esso non può essere categorico: perché ammette modelli per i quali la verità di un enunciato indecidibile è opposta, e dunque non isomorfi. Ma la non categoricità di un Sistema con un modello infinito è una conseguenza generale del Teorema di s-completezza (par. II.17). E vale anche per Sistemi sintatticamente completi, come TFR e PAV (quest'ultimo, ricordiamo, il Sistema formale in grado di dedurre tutti e soli gli enunciati di PA veri nel modello standard). Dunque, anche PAV, al quale non si applica certo il Metateorema d'incompletezza, ammette modelli non standard (per concluderlo agevolmente, si può anche ripetere, tale e quale, la metadimostrazione che coinvolge la costante c, vista nel par. II.16). Eppure Gödel stesso, nel 1934, sembra ritenere che perfino la non categoricità delle *verità dell'Aritmetica* sia una conseguenza del suo Teorema d'incompletezza![53] E a tutt'oggi, molti continuano ad

[52] Per gli argomenti che seguono, la Tesi di Church-Turing non è indispensabile e potremmo, quindi, riferirci al *Teorema* d'incompletezza (così come ad assiomi *ricorsivamente* numerabili, etc.). Tuttavia, ci sembra più organico continuare a mantenere la generalità.

[53] Una disattenzione ritenuta <<straordinaria>> da qualcuno. Per un'analisi dettagliata dell'intero argomento consigliamo: J. Kennedy, *Completeness*

affermare che la non categoricità di PA è dovuta alla sua incompletezza: un'affermazione *epistemologicamente* errata, come speriamo di aver chiarito.

Ma veniamo all'errore senza dubbio più clamoroso ed inspiegabile: quello di considerare il Metateorema d'incompletezza valido per la *Teoria aritmetica integrale*; cioè, ricordiamo, per il Sistema aritmetico che usa il principio di induzione *completa*, vale a dire generalizzata ad ogni sottoinsieme dell'universo (par. II.14). Come abbiamo osservato rappresentando la Teoria in TI, gli assiomi generati da tale schema assiomatico sono innumerabili; pertanto, non possono essere effettivamente numerabili. Il Sistema non soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza.

Sembra ingiustificabile che tutte le pubblicazioni, cartacee o reperibili nel WEB, siano normalmente sfuggenti su questo argomento. Solitamente la terminologia usata, fino ad allora così precisa, viene inaspettatamente meno sul punto in questione; e, per esempio, si dice vagamente che "l'intera Aritmetica, poiché contiene gli assiomi di Peano, è soggetta al Teorema d'incompletezza". Ma anche PAV, completo, è un ampliamento di PA: quello che vi aggiunge, come assiomi, tutti gli enunciati indecidibili di PA veri nel modello standard. Naturalmente, il fatto che un Sistema contenga le premesse di un altro Sistema che soddisfa le ipotesi del Metateorema, non è sufficiente a che esso stesso le soddisfi: oltre alla "potenza" espressiva, si deve anche conservare la decidibilità (o più generalmente l'effettiva numerabilità) degli assiomi.

Ciò che stupisce, vogliamo sottolineare, non è soltanto l'impossibilità di trovare affermazioni che concordano con il nostro punto di vista (come del tipo <<il Teorema di incompletezza non vale per l'Aritmetica "del secondo ordine">>); ma anche l'estrema difficoltà di incontrare, chiaramente enunciata, la proprietà inversa[54]. Il che, è quantomeno sospetto.

Theorems and the Separation of the First and Higher-Order Logic, (2008), disponibile nel WEB all'indirizzo:
http://igitur-archive.library.uu.nl/lg/2008-0317-201019/UUindex.html

[54] Due eccezioni: E. Moriconi, *I teoremi di Gödel*, SWIF (2006), sul WEB (http://lgxserve.ciseca.uniba.it/lei/biblioteca/lr/public/moriconi-1.0.pdf), p. 743: <<ovviamente il primo teorema d'incompletezza è dimostrabile anche nell'Aritmetica al secondo ordine>> e C. Wright, *On Quantifying into Predicate*

In effetti, sembra che l'errore risalga a Gödel; e, per quanto ne sappiamo, non è mai stato evidenziato né corretto. Nella stessa presentazione del suo Teorema d'incompletezza al convegno di Königsberg del 1930, egli annuncia il suo risultato come una prova della non validità del Teorema di s-completezza per [il linguaggio de] l'Aritmetica: in quanto, spiega Gödel, l'Aritmetica è categorica[55]. Posto che ci si riferisce a un'Aritmetica categorica, deve trattarsi di quella che usa il principio d'induzione completa. Invero, abbiamo già osservato che la sua categoricità, da sola, è sufficiente ad escludere la validità del Teorema di s-completezza per il suo linguaggio; ma, evidentemente, Gödel lo conclude in considerazione dell'incompletezza sintattica che gli verrebbe dall'applicazione del suo nuovo Teorema. Tutto sommato, giudichiamo comprensibile tale equivoco in Gödel: considerato che, come gli altri logici del suo tempo, sorvola sulla necessità di separare logicamente i Sistemi formali da quelli irriducibilmente non formali, gli sfugge che il principio di induzione completa genera una quantità innumerabile di assiomi (e dunque non interamente codificabile con i suoi gödeliani).

Non si comprende, invece, la persistenza di questo errore fino ai nostri giorni. Seguendo l'opinione che giudichiamo errata, supponiamo di voler applicare l'originale dimostrazione di Gödel alla Teoria aritmetica integrale. Ricordiamo che in PA si dimostra che esiste un'espressione g(x,y) tale che, interpretata nel modello standard, significa "x è il codice della dimostrazione del teorema di codice y"; poiché il modello standard è anche modello dell'Aritmetica integrale, anche in quest'ultima Teoria, se corretta, deve mantenersi tale significato. E invero si mantiene; ma la fondamentale differenza d'ambito sintattico, è che ora le dimostrazioni che hanno un codice non possono essere *tutte*: o sarebbero numerabili. Così, nella Teoria Aritmetica integrale, anche

---

Position: Steps towards a New(tralist) Perspective (2007), sul WEB (http://philpapers.org/autosense.pl?searchStr=Crispin%20Wright). In quest'ultimo lavoro è forse indicativo che l'autore commenti tale proprietà con una serie di delicati quesiti epistemologici. In entrambi i casi, comunque, la proprietà viene considerata come ovvia, senza nessuna spiegazione.

[55] K. Gödel, *Collected Works. I: Publications 1929–1936,* eds. S. Feferman et al., Oxford University Press (1986), p. 26-29.

l'interpretazione standard (l'unica possibile) dell'enunciato di Gödel, di codice ỹ, è la stessa: "*non esiste codice di una dimostrazione di questo enunciato*", ovvero "*io non sono dimostrabile in PA*". Ma adesso ciò non significa "*io non sono dimostrabile in questa Teoria*", come significa all'interno di PA. Non c'è nulla, pertanto, che vieti che l'enunciato ỹ possa essere dimostrato (da una dimostrazione non codificabile, perchè intrinsecamente semantica), risultando così un teorema dell'Aritmetica integrale; in concreto, che sia una delle nuove deduzioni ottenibili tramite il principio di induzione completa.

È probabile che molti malintesi si originino allorchè si voglia esprimere l'induzione completa mediante un singolo enunciato simbolico, come:

$$\forall\ \underline{P}((\underline{P}(0)\ e\ \forall\ x\ ((\underline{P}(x)\ e\ S(x,y))\rightarrow\underline{P}(y)))\rightarrow\ \forall\ x\ \underline{P}(x))$$

da assumersi come assioma; cosa, invero, del tutto legittima. Dal fatto che l'assioma è esibito, chiaro e inequivocabile, seguirebbe l'effettiva assiomatizzabilità dell'Aritmetica integrale. L'equivoco essenziale, come segnalato alla fine del paragrafo III.1, consiste nel ritenere che una collezione finita sia sempre decidibile. Nell'assioma, la sequenza "$\forall$ P" è formalmente indefinita: tutti gli altri assiomi e regole deduttive classiche, dopo il simbolo "$\forall$" hanno sempre una *variabile*; P, invece, è un predicato (per di più, non definito formalmente nel Sistema). L'assioma è dunque sterile dal punto di vista formale. Se vogliamo che esso generi (infiniti) nuovi teoremi, dobbiamo interpretarlo semanticamente. In particolare, come sappiamo, la sequenza "$\forall$ P" deve interpretarsi con "qualunque sia la proprietà P". Il Sistema, quindi, non è formale: alcuni suoi enunciati, in particolare un assioma, si devono interpretare semanticamente. È evidente che in tali circostanze, in generale, non sussistono nè la decidibilità nè l'effettiva numerabilità degli assiomi. Ricordiamo, infatti, che entrambe le condizioni implicano la formalità degli enti, in quanto *outputs* di una macchina. Se un nostro amico adoperasse il medesimo enunciato simbolico, ma interpretando la sequenza "$\forall$ P" con "qualunque proprietà dei numeri minori di 37", assumerebbe in realtà *un altro assioma*, considererebbe un Sistema assiomatico *differente* dall'Aritmetica integrale. Eppure una qualsiasi macchina, incapace di discriminare il significato dei termini, concluderebbe erroneamente che si tratta dello stesso assioma.

Per scoprire se la semantica impiegata è eliminabile, basta rappresentare il Sistema nella Teoria formale degli insiemi, TI, come è stato fatto nel paragrafo II.14. La sequenza "$\forall \underline{P}$" che deve tradursi con "$\forall A \in P(U)$", dove U è l'universo delle variabili, non può continuare ad essere un enunciato della Teoria rappresentanda, ma deve essere un enunciato specifico di TI[56]. Ne risulta, come abbiamo analizzato, uno schema assiomatico insiemistico che, essendo P(U) innumerabile, genera una quantità innumerabile di assiomi induttivi. Nessuna macchina può produrre una lista esclusiva (o perfino non esclusiva) che li contenga tutti. L'informalità del principio di induzione completa, e quindi del Sistema, non è eliminabile.

Ricordiamo che questi passi si possono ripetere esattamente per il Sistema PA (par. II.14), con la differenza essenziale che lo schema assiomatico insiemistico genera adesso una quantità *numerabile* di assiomi simbolici e la formalità si ripristina. Inoltre gli assiomi sono distinguibili meccanicamente, ovvero decidibili.

Simili all'equivoco di Gödel, sembrano affermazioni come <<*l'incompletezza sintattica dell'Aritmetica al primo ordine produce l'incompletezza semantica della Logica al secondo ordine*>>[57]. Sorvolando sull'ambigua terminologia dell'"ordine espressivo", pare, di nuovo, che si voglia in primo luogo suggerire la trasmissione automatica dell'incompletezza sintattica al Sistema ampliato, cioè a quello "del secondo ordine" (prima scorrettezza); e, successivamente, dall'incompletezza sintattica e dalla categoricità,

[56] Per esprimerlo nella Teoria rappresentanda, bisognerebbe definire in essa degli strumenti omologhi a quelli insiemistici, come $\in$, P(U), etc., tentando di definire TI all'interno di TI. Il che è impossibile (come già osservato nel par. II.7): la collezione degli enunciati della Teoria rappresentanda non potrebbe più essere un *insieme*.

[57] E. Moriconi, *I teoremi di Gödel*, SWIF (2006), sul WEB (http://lgxserve.ciseca.uniba.it/lei/biblioteca/lr/public/moriconi-1.0.pdf), p. 743. Una frase del tutto simile si ripete nell'*abstract* di F. Berto, *Gödel's first theorem*, ed. Tilgher Genova, fasc. Epistemologia 27, n.1 (2004).

concludere l'incompletezza semantica del linguaggio (mentre basterebbe la sola categoricità, più l'infinità del modello). Del resto, l'affermazione è letteralmente smentita dalla semplice osservazione che anche per il linguaggio della *Teoria integrale dei reali* (del secondo ordine, nella sua veste originale), informale e categorica, non vale il Teorema di s-completezza; e ciò malgrado la sua versione formale TFR (del primo ordine, in veste originale), sia sintatticamente completa. Evidentemente, l'incompletezza semantica del linguaggio di tale Teoria *è prodotta* soltanto dalla sua categoricità, unitamente all'infinità del modello.

Se siamo nel giusto, a questo punto ha senso chiedersi se le Teorie integrali dell'aritmetica e dei reali possano essere complete, ovvero semanticamente complete (le due nozioni sono equivalenti in caso di categoricità, come abbiamo mostrato nel par. II.17). La qual cosa, ricordiamo, è ben diversa dall'affermare che per i *linguaggi* di tali Teorie valga il Teorema di s-completezza (stesso paragrafo). Data l'intrinseca semanticità di tali Sistemi, in essi le deduzioni dipendono, in generale, dal significato attribuito alle proposizioni; dunque, il loro stesso ambito deduttivo è soggetto al terreno dell'interpretazione. Ne consegue che la risposta al nostro quesito è certamente non codificabile in un Sistema formale e potrebbe essere fornita soltanto dalla metamatematica. Tuttavia, dobbiamo ricordare di trovarci in un caso in cui non è garantito che quest'ultima possa sempre riconoscere eventuali enunciati indecidibili (par. II.15). Una considerazione assai superficiale spingerebbe a ritenere incompleta l'Aritmetica integrale: semplicemente l'osservazione che, affinché una certa proprietà sia vera per ogni $n \in N$, non si vede come fatto logicamente *necessario* che debba potersi *dimostrare* che se essa vale per k allora deve valere per k+1. Se è così, l'Aritmetica integrale potrebbe non essere in grado di dedurre tutte le verità del modello standard, forse neppure soltanto tutti i teoremi di PAV. Ovviamente, non si tratta di un'argomentazione minimamente conclusiva. Il problema dell'individuazione di metadimostrazioni intorno a questo argomento, per quanto ne sappiamo, resta aperto per entrambe le Teorie.

Per molti anni dopo la scoperta dell'incompletezza essenziale si continuò a credere o sperare che gli enunciati indecidibili in connessione col Metateorema d'incompletezza fossero tutti di un tipo particolare, peculiare come l'enunciato di Gödel. Ovvero, che il Metateorema non avesse nessuna concreta conseguenza circa gli enunciati di normale e reale interesse. Un lungo lavoro cominciato nel 1960 da J. Robinson, M. Davis e H. Putnam e concluso nel 1970 da Y. Matyasevich ha dimostrato che non è così[58]. Considerata un'arbitraria equazione polinomiale a coefficienti interi ed esponenti naturali (come, ad esempio, $4x^{23}+125x^{12}y^7z–34yz–770=0$, oppure $7x^2–4y+15=0$), domandiamoci se essa possiede *soluzioni intere* per le sue variabili. Questo problema si suole sintetizzare parlando di *equazione diofantea*, dal matematico alessandrino Diofanto. Si noti che non ci si pone di trovare effettivamente le soluzioni, ma soltanto di poter concludere se ne esistono. Ebbene, il risultato di tale studio è che tale problema è *equivalente* a risolvere l'enunciato di TI: $\exists m\in N(f_R(n)=m)$, dove $f_R(n)$ è un'arbitraria funzione ricorsiva (par. III.4). Dal Metateorema d'incompletezza, concludiamo allora che tale problema è essenzialmente indecidibile. In altri termini, considerata un'arbitraria equazione diofantea, l'enunciato (esprimibile anche in PA) che afferma che tale equazione ha soluzioni intere è, in generale, indecidibile. "In generale" significa che solo per casi particolari (eppure ugualmente di numero infinito), l'enunciato è dimostrabile o confutabile. Inoltre, tale indecidibilità è di tipo essenziale, cioè, come si è già osservato, non può esistere un procedimento meccanico in grado di catalogare tutti questi enunciati in "dimostrabili", "confutabili" e "indecidibili", ovvero le suddette equazioni in "con soluzioni intere", "prive di soluzioni intere" e "indecidibili". Il lavoro fornì dunque un esempio di tangibile importanza matematica circa l'incompletezza, dando una risposta negativa al *decimo problema* di Hilbert[59].

---

[58] La miglior sintesi, probabilmente, in: M. Davis, Y. Matiyasevich, J. Robinson, *Hilbert's Tenth Problem: Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol.28 (1976).

[59] Nel 1900, Hilbert presentò al II Congresso internazionale di Matematica di Parigi, una lista di 23 famosi problemi. Il decimo domandava, appunto, una procedura generale finita in grado, data un'arbitraria equazione diofantea, di determinare se ammettesse soluzioni oppure no. Il WEB offre molte informazioni sui *23 problemi di Hilbert*.

Finalmente, è doveroso sfatare l'errore, assai frequente, di esaltare irragionevolmente l'aspetto indeterministico del Metateorema d'incompletezza. In ciò ha senza dubbio il suo nefasto peso la moderna, fanciullesca, tendenza all'"entusiasmo dell'incertezza". Un atteggiamento comprensibilmente di moda dopo l'affermazione della Teoria quantistica e della Relatività; ma che sembra davvero il caso di lasciarsi finalmente alle spalle.

Il Metateorema d'incompletezza non vieta, per nessun fissato enunciato indecidibile I di un Sistema formale (che supponiamo coerente), che esista un *ragionamento* che possa *distinguerlo*, cioè riconoscere, concludere, metadimostrare che I è indecidibile; ma soltanto che l'insieme di tutte queste conclusioni sia meccanizzabile: esso sarà costituito da un numero infinito di assensi semantici. Per quest'aspetto, anzi, il Teorema di s-completezza ci incoraggia: due diversi modelli del Sistema, uno in cui I è vero, l'altro in cui I è falso, *devono sempre esistere*. La loro individuazione concretizzerebbe una valida metadimostrazione del fatto che I è indecidibile. Abbiamo già osservato (par. III.6) che la *rappresentabilità* di un modello è un concetto che, eventualmente, si può convenientemente indebolire in modo da includere strutture sempre più astratte (e ne sono esempi le interpretazioni *forced* di Cohen); pertanto *ci sono valide ragioni di principio per ritenere che tale metadimostrazione sia sempre possibile*. Il che, ovviamente, non significa affatto che in pratica sia sempre facile ottenerla, né che certi problemi non potrebbero restare in stallo per secoli o millenni. "Soltanto" nel caso di TI (se "soltanto" può essere un avverbio opportuno per un Sistema così fondamentale!), questo ottimismo è indubbiamente fuori luogo, a causa dell'inevitabile nebulosità dei suoi "modelli".

Consideriamo il caso di PA: una volta riconosciuto che un suo dato enunciato è indecidibile, se si ammette la spontaneità del modello standard, cioè dei naturali "intuitivi", si dovrà sempre poter concludere, in principio, se esso è vero o falso per tale modello (quasi sempre, il modello che più interessa).

Vediamo alcuni esempi. Consideriamo la congettura di Goldbach, che ricordiamo: "ogni numero pari maggiore di 2 è somma di due numeri primi". Se essa è indecidibile è, come osservato, del tutto logico (sia pure da un punto di vista più epistemologico che metamatematico) che debba esisterne la metadimostrazione. Da essa si concluderebbe immediatamente la sua verità nel modello standard (e potremmo, quindi, aggiungerlo tra gli assiomi di PAV). Infatti, se esistesse un naturale standard per cui è falsa, allora essa sarebbe falsa in ogni modello che contiene tale numero. Ma *ogni modello* di PA contiene tale numero. Questo è un punto fondamentale che bisogna evidenziare: *ogni modello di PA, standard o no, contiene senz'altro (oggetti isomorfi a) i numeri naturali standard*. Ciò in base agli stessi assiomi di PA (par. II.1): ogni universo deve contenere "0", s(0), s(s(0)), ..., cioè degli enti isomorfi ai naturali standard. Questa è una peculiarità di PA che, ovviamente, non vale in generale per i modelli non isomorfi di altri Sistemi matematici. Per esempio, le RETTE di un modello non euclideo di G non contengono le rette euclidee, ma sono *tutte* oggetti di natura differente.

Riprendendo il ragionamento, la congettura di Goldbach sarebbe allora falsa in ogni modello; e dunque non potrebbe essere indecidibile. In altri termini, se la congettura di Goldbach è indecidibile, può essere falsificata solo da numeri naturali non standard.

Tale conclusione, chiaramente, non sarebbe una deduzione sintattica di PA, ma una metadimostrazione che individua un assioma di PAV; un Sistema non effettivamente assiomatizzabile, come sappiamo.

Consideriamo ora un'arbitraria equazione diofantea $D(x_1, x_2, \ldots x_k)=0$ nelle k variabili $x_1, x_2, \ldots x_k$ e consideriamo l'enunciato di PA che esprime l'assenza di sue soluzioni intere. Supponiamo che tale enunciato sia indecidibile; allora, esso dev'essere necessariamente *vero* nel modello standard. La ragione è analoga al caso precedente: se esistesse una k-upla di naturali standard $n_1, n_2, \ldots n_k$, tali che $D(n_1, n_2, \ldots n_k)=0$, allora l'enunciato considerato sarebbe falso in ogni modello di PA, perché ogni modello di PA contiene tale k-upla. Dunque, se tale enunciato è indecidibile, detta equazione diofantea non potrà ammettere soluzioni intere standard, ma soltanto non standard (e dovrà necessariamente ammetterne di questo tipo).

In definitiva, ammessa la spontaneità del modello standard, un'attenta analisi di un qualsiasi enunciato di PA che si è riconosciuto come indecidibile, deve sempre permettere di concludere il suo valore di verità nel modello standard. Ciò giustifica, senza alcun dubbio, un cauto ottimismo *di principio* circa la possibilità di individuare, di volta in volta, gli assiomi del Sistema completo PAV.

Viceversa, consideriamo il caso di TI. Come esempio interessante, che riguarda ancora i numeri naturali, possiamo esaminare il caso di un enunciato del tipo: "esiste un numero finito di valori di x tale che C(x) sia vera", dove C(x) è un'espressione di PA. Ricordiamo che il termine *finito* viene definito (deve esserlo!) mediante l'universo N del modello standard[60]; pertanto, tale enunciato non può esprimersi in PA, dato che il suo linguaggio è incapace di distinguere i suoi differenti modelli. Ma, invece, può esprimersi in TI. Supponendo che esso si sia in qualche modo metadimostrato come indecidibile in TI, se ne concluderebbe che dev'essere *vero* per valori standard della variabile x. Infatti, se fosse falso, cioè se esistessero infiniti naturali standard che verificano C(x), allora, per quanto già osservato, tale falsità sarebbe del tutto generale, perché si manterrebbe ammettendo la possibilità di valori anche non standard per x. E, allo stesso modo, si concluderebbe che C(x) dev'essere, invece, verificato da un numero infinito di naturali non standard. Tuttavia, stavolta c'è un'obiezione di natura semantica: se tale enunciato è indecidibile in TI, allora esso assume un distinto valore di verità in diversi "modelli" di TI. Ma cambiando il "modello" di TI, cambia anche l'insieme N e pertanto la stessa definizione di *finito*. In altri termini, se si vuole che l'enunciato conservi il suo usuale significato epistemologico, che è legato al concetto di *finito*, sembra che esso debba essere indissolubilmente legato a uno specifico "modello" di TI. Questa osservazione fa riaffiorare le ambiguità presenti nelle interpretazioni del linguaggio

[60] Abbiamo già osservato, nel paragrafo II.19, che se nella definizione di *finito* del par II.12 si assume, per N, l'universo, anche numerabile, di un modello non standard, si può ottenere un insieme infinito, in senso propriamente metamatematico. Infatti, se si prende n=c, dove c è una constante non standard, risulta che i numeri naturali standard compresi tra 0 ed n sono infiniti.

TI, come gli stessi concetti di *finito* ed *infinito*, discusse alla fine della seconda Parte; e, nel caso, ci rivela inequivocabilmente la *discutibilità* di un qualsiasi ragionamento che concluda l'indecidibilità in TI di un enunciato di tal tipo.

III.10. Coerenza

E, finalmente, veniamo alla questione forse più eclatante messa in luce dalla Logica moderna: quella che riguarda la coerenza. Alla base c'è, invero, un fatto abbastanza spontaneo: che per concludere la coerenza di un Sistema matematico, non ci si può limitare al linguaggio della Teoria stessa. Si richiede un linguaggio, eventualmente formalizzato, *esterno* al Sistema; che lo studi "dal di fuori".

Abbiamo visto come TI dimostra la coerenza delle principali Teorie matematiche nell'ipotesi che sia coerente. Ma lo è davvero? Se non lo fosse, tutta la Matematica in essa rappresentabile (cioè, a buon diritto, l'intera Matematica) cadrebbe come un castello di carte. La domanda è importante, quindi; potrebbe ad essa rispondere lo stesso Sistema TI? Chiaramente, se TI dimostrasse il negato di un suo teorema, ciò sarebbe una prova del fatto che è incoerente. Ma supponiamo che, effettivamente, sia coerente. Potrebbe ciò essere dedotto mediante un teorema di TI? Ovviamente, no.

Frettolosamente, potrebbe ragionarsi cosí: se questioniamo la sua coerenza, cioè se ammettiamo la possibilità che sia incoerente, ogni suo teorema T potrebbe essere contraddetto dal teorema *non*T. E ciò, in particolare, varrebbe anche se T significasse "questo Sistema è coerente". Questo argomento non è scorretto, ma in verità c'è qualcosa di più profondo. Se un Sistema classico è incoerente, come sappiamo, è privo di modelli, cioè di interpretazioni che rispettino i principi classici di non contraddizione e del terzo escluso. Di più, come abbiamo osservato nella prima Parte, *un Sistema classico incoerente è privo di ogni sensata interpretazione di qualsiasi sua proposizione*. In altri termini, *il semplice ammettere che un enunciato qualsiasi del Sistema significhi qualcosa, implica* *supporre la sua coerenza*. E, ovviamente, ciò vale anche se, in particolare, l'interpretazione dell'enunciato è "questo Sistema è coerente". Dunque, se si questiona la coerenza del Sistema, ovvero se non si può essere sicuri della sua coerenza (cosa che, come concluderemo presto, vale per TI e quindi per l'intera Matematica), non si può esser certi della sensatezza di nessuna interpretazione del linguaggio della Teoria. Per fare degli esempi concreti, in un tale Sistema (invero, in un Sistema qualsiasi, come già anticipato), quando si dimostra un qualsiasi teorema, come "6 è pari" o il teorema di Pitagora, in realtà quello che si dimostra è: "se il Sistema ammette il modello standard (e quindi è coerente), 6 è pari", e "se il Sistema ammette il modello euclideo (e quindi è coerente), allora in ogni triangolo rettangolo $c_1^2+c_2^2=I^2$"; e così via. Si noti l'*innegabile valore epistemologico di tali conclusioni*, malgrado la clamorosa possibilità di sfacelo, qualora il Sistema si rivelasse incoerente. Ora, però, supponiamo che a un certo teorema T di un siffatto Sistema venga attribuito il significato "questo Sistema è coerente" in una certa interpretazione M. Analogamente, quello che in verità concludiamo tramite detto teorema è "se il Sistema ammette il modello M (e quindi è coerente), allora il Sistema è coerente". *Qualcosa che sapevamo già e, soprattutto, che non dimostra affatto la coerenza del Sistema*.

Si può enunciare, pertanto, il seguente *Metateorema dell'indimostrabilità interna della coerenza*: "Se un Sistema classico è coerente, ciò non può essere concluso mediante il solo linguaggio del Sistema". Si noti che lo abbiamo concluso *per un qualsiasi Sistema matematico classico, formale o no*. Da ciò segue che anche la conclusione che un certo enunciato è indecidibile, non può ottenersi all'interno della Teoria stessa, poiché essa implica la coerenza.

Ritorniamo a TI. La sua coerenza potrebbe, dunque, essere dimostrata da un Sistema esterno, più generale. In effetti, malgrado TI sembri già *troppo* generale e astratto a molti, c'è già qualcosa di questo genere: la *Teoria delle categorie*. Ma andando in profondità, si nutrono seri dubbi circa la possibilità di dimostrare la coerenza del Calcolo predicativo classico formale con uguaglianza, cioè del nucleo basico di TI. Infatti, un Sistema *esterno* ad esso, capace di *predicare* la sua coerenza, dovrebbe contenere un nucleo equivalente a un Calcolo predicativo classico formale; perché è in un Sistema di questo tipo che si formalizza il concetto di *predicato*.

Ma anche se la coerenza di ogni parte di TI fosse dimostrata da un Sistema matematico più generale di TI, il problema della coerenza si riproporrebbe per tale nuovo Sistema. In altri termini, a un certo punto – che, in effetti, può dipendere dalle esigenze – bisogna arrestarsi nel formalismo e cercare un criterio metamatematico di riconoscimento della coerenza. Il quale, essendo legato alle intrinseche incertezze della semantica pura, possibilmente potrà consistere in un semplice "convincimento intuitivo", se non, addirittura, in una "speranza sensata". Quest'ultima posizione, in effetti, è quella relativa al Sistema TI: non esiste, sembra, nessuna rigorosa metadimostrazione della sua coerenza, ma invece un più che "sensato convincimento" di essa, corroborato da due millenni di efficaci applicazioni delle Teorie che essa ingloba.

Ma aggiungiamo qualche commento a ciò che abbiamo rilevato. Sia S un Sistema classico ed E un suo enunciato; supponiamo l'esistenza di un modello M di S tale che E, interpretato in M – in breve: E(M) – significhi "S è coerente". Stiamo, pertanto, supponendo che E(M) sia vero. Esaminiamo l'enunciato E. Potrebbe essere il negato di un teorema? No di certo: E sarebbe falso in ogni modello, mentre è vero in M per ipotesi. Può E essere indecidibile? Non c'è nulla che lo vieti. Come sappiamo, l'esistenza di un enunciato indimostrabile è una condizione necessaria e sufficiente affinché S sia coerente, come stiamo supponendo. Se S è formale, dal Teorema di s-completezza deve esistere un modello M' in cui E(M') è falso. Ciò è possibile, purché E(M') significhi qualcosa di diverso da E(M) cioè da "S è coerente".

Può, infine, E essere un teorema? L'interpretazione di E in ogni modello sarebbe vera, come E(M), che è vero per ipotesi. Come abbiamo osservato, in nessun modo ciò violerebbe il *Metateorema dell'indimostrabilità interna della coerenza*: il fatto che E sia un teorema non può dimostrare, in genuino senso epistemologico, la coerenza del Sistema, perché lo stesso significato dato a E(M) richiede l'ipotesi di coerenza del Sistema. *Dunque, anche questo caso è possibile*.

In definitiva, per un siffatto enunciato E(M), in concreto "S è coerente", si ha una situazione peculiare che lo differenzia da qualsiasi altro enunciato significativo in M: *preoccuparsi di dimostrare E all'interno di S è ininfluente ai fini epistemologici relativi all'interpretazione M*. Perché la coerenza del Sistema, cioè la verità di E(M), è supposta nello stesso ammettere tale significato per E(M). In ogni caso, il problema di concludere la coerenza di S non è alla portata di S, come dev'essere in base al suddetto Metateorema della coerenza.

Poi, il fatto che, in un siffatto Sistema, E sia un teorema o sia indecidibile, dipende dal Sistema e dalla forma dell'enunciato E. Se un Sistema esterno dimostrasse che E è indecidibile, dimostrerebbe anche che S è coerente e, quindi, la verità di E(M). Ma ciò, purtroppo, non si verifica mai in una Teoria di interesse *fondamentale* come TI.

Consideriamo un Sistema che soddisfa le ipotesi del Metateorema d'incompletezza: cioè coerente, *eff. ass.*, e in grado di rappresentare tutte le funzioni ricorsive (in breve, *sufficientemente potente*). In tali condizioni è sempre possibile individuare degli enunciati del Sistema tali che, interpretati in un opportuno modello, significhino "questo Sistema è coerente". Noi non abbiamo dimostrato ciò, ma abbiamo ammesso che è possibile considerare un'espressione g(x,y) tale che nel modello standard significhi "x è il codice di una dimostrazione dell'enunciato di codice y". Ebbene, l'enunciato: ∃y(*non*∃x(g(x,y))), interpretato nel modello standard, afferma "esiste (il codice di) un enunciato tale che non esiste il codice di una sua dimostrazione", ovvero "esiste un enunciato che non è un teorema". Il che, come sappiamo, è appunto equivalente a "questo Sistema è coerente". Esistono infinite altre forme equivalenti di esprimere la coerenza, sempre nell'ambito del modello standard; per esempio, se 92507 è il gödeliano dell'enunciato "4=29", anche l'enunciato "*non*∃x(g(x,92507))" esprime la coerenza del Sistema. Ebbene, è stato mostrato che "di norma" tali enunciati sono indecidibili. Questa laboriosa dimostrazione, accennata da Gödel nello stesso convegno di Königsberg, è nota come *Secondo Teorema* *d'incompletezza* e fu rilasciata solo nel 1939 da Hilbert e Bernays[61]. Che significa "di norma"? Significa che ci sono anche altri enunciati, che esprimono anch'essi la coerenza del Sistema interpretati in opportuni modelli, che, invece, risultano essere *teoremi* della Teoria. Senza che questo fatto comporti, come già ben osservato, una reale dimostrazione di coerenza del Sistema, in violazione del Metateorema dell'indimostrabilità interna della coerenza. Purtroppo, non siamo in grado di aggiungere altro su questo argomento. Citeremo soltanto le nostre fonti[62].

Quali sono, dunque, le conclusioni di tutto ciò? Il Secondo Teorema d'incompletezza individua altre specie di enunciati essenzialmente indecidibili in ogni Teoria che soddisfa le ipotesi già esposte. Mentre il Primo teorema d'incompletezza determina solo l'enunciato di Gödel, il Secondo estende l'indecidibilità ad una categoria assai ampia di enunciati. Tuttavia, a parte questa radicale generalizzazione, non introduce alcun concetto cardinale circa la coerenza del Sistema, come normalmente si ritiene. Non lo farebbe neanche se fosse valido *per ogni* enunciato interpretabile come "questo Sistema è coerente" (cosa che, ribadiamo, sembra risultare falsa). Infatti, in ogni caso, da esso non può concludersi che "il Sistema non può dimostrare la propria coerenza": ciò compete, invece, al Metateorema dell'indimostrabilità interna della coerenza. È anche possibile, anzi ragionevole, che la grandezza della classe di enunciati coinvolta dal Secondo Teorema d'incompletezza sia *circostanziale* per il tipo di Sistema. E naturalmente anche se, in una certa Teoria, la stragrande maggioranza degli enunciati interpretabili in un dato modello come "questo Sistema è coerente" fossero teoremi, tale fatto in sè non implicherebbe nessun assurdo nè

---

[61] D. Hilbert, D. P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, ed. Springer, Berlin, seconda edizione (1970). La dimostrazione consiste nel dimostrare che un simile enunciato, C, implica quello di Gödel, G. Allora, se C fosse un teorema, lo sarebbe anche G da *modus ponens*. Inoltre, dalla correttezza, C non può essere il negato di un teorema. Anche tale Teorema di può formalizzare in TI come il Primo Teorema d'incompletezza.

[62] G. Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino (2004), p. 140 e 142. A. Martini, *Notazioni ordinali e progressioni transfinite di teorie*, Tesi di Laurea, Università di Pisa (2006), p. 11-15, reperibile sul WEB all'indirizzo:
http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-11082006-161824/unrestricted/tesi.pdf

potrebbe in alcun modo togliere validità al Metateorema dell'indimostrabilità interna della coerenza (l'unico risultato epistemologicamente rilevante circa la coerenza).

In effetti, il comunissimo equivoco è sia di ritenere che il Secondo Teorema d'incompletezza valga per ogni enunciato che esprime la coerenza del Sistema, sia di giudicare che esso implica che "un Sistema coerente non può dimostrare la propria coerenza". Cosa che, invece, si conclude con la differente, facile, metadimostrazione vista; e, soprattutto, che *vale per un qualsiasi Sistema classico, anche non formale*.

L'errore è aggravato dalle frequentissime "dimostrazioni intuitive", scorrette, del Secondo Teorema d'incompletezza, del tipo seguente: "Sia S un Sistema che soddisfa le ipotesi del Teorema d'incompletezza e C un suo enunciato che afferma la coerenza dello stesso S. Il primo Teorema di incompletezza dimostra che se S è coerente, l'enunciato di Gödel, G, è indecidibile. Perciò, se C fosse dimostrabile, potrebbe dedursi che G è indecidibile e quindi indimostrabile. Ma poiché G afferma di essere indimostrabile, ciò significherebbe dimostrare G, il che è assurdo"[63]. Il difetto dovrebbe già esser chiaro al lettore: nel ragionamento si dà a C e G un valore semantico che è giustificato solo supponendo che il Sistema ammetta un *modello* con tali interpretazioni e quindi che sia coerente. *In tale modello* è fuori discussione che la verità di C implica la verità di G, ma l'implicazione *sintattica* C→G è una questione affatto diversa. In generale, non c'è alcun assurdo conseguente alla possibilità che C sia un teorema; di fatto, per alcune forme di C lo è davvero, come segnalato. Il fatto che un enunciato del tipo C sia un teorema non dimostra affatto che il Sistema è coerente (in caso di incoerenza, non si ha forse che ogni enunciato è un teorema?); perché, ripetiamo, lo "dimostra" solo... nell'ipotesi in cui S ha un modello (quello che permette di interpretare C con "S è coerente") e quindi è coerente per ipotesi! In realtà, dimostrare l'implicazione sintattica C→G è tutt'altro che banale e, per di più, come più volte detto, non vale sempre, ma dipende dalla forma (sintattica) dell'enunciato C.

[63] Così, per esempio, in: P. Odifreddi, *Metamorfosi di un Teorema*, (1994), sul WEB: http://www.vialattea.net/odifreddi/godel.htm

Riaffermiamo, dunque, che l'unico risultato di rilevante importanza circa la coerenza, è dato dal Metateorema della sua indimostrabilità interna. E sottolineiamo anche che, per il suo riferirsi a un Sistema classico qualsiasi, la sua metadimostrazione consiste in un ragionamento puramente metamatematico, cioè informalizzabile.

III.11. Riepilogo conclusivo

Facciamo un riassunto molto sintetico dei risultati conseguiti dalla Logica moderna circa i Sistemi assiomatici classici della Matematica[64]. Per il linguaggio di ogni Sistema classico *formale*, cioè le cui proposizioni possono essere svuotate di semantica rispettando il formalismo stabilito da Hilbert, vale il Teorema di s-completezza; esso ci assicura l'esistenza di modelli in grado di farci riconoscere gli enunciati indecidibili. Per quanto riguarda l'individuazione metamatematica di siffatti modelli, dal punto di vista filosofico è ragionevole un certo ottimismo *di principio*, tenendo in conto il fatto che la semantica è capace di ridefinire opportunamente le convenzioni circa la rappresentabilità di strutture quali i modelli dei Sistemi. Per la Teoria formale degli insiemi, tuttavia, cioè per il fondamento stesso dell'intero edificio matematico, questo ottimismo è infondato, poiché la natura dei suoi modelli è inevitabilmente nebulosa.

Il Teorema di s-completezza, d'altra parte, ha anche l'effetto di "moltiplicare all'infinito" il numero di modelli non isomorfi degli ordinari Sistemi formali. In particolare, qualsiasi Sistema formale con almeno un modello infinito non può caratterizzare unicamente gli oggetti che con esso si pretendeva studiare, ma descrive egualmente bene, in modo indistinguibile per il suo linguaggio, infinite classi di oggetti totalmente differenti da questi.

Alcuni Sistemi formali, in ipotesi di coerenza, sono decidibili; cioè, non soltanto tutti i loro enunciati indecidibili sono

[64] Ricordiamo che altre importanti conclusioni circa la Matematica e la Teoria degli insiemi sono già state fatte alla fine della seconda Parte.

riconoscibili, ma è addirittura possibile programmare una macchina in modo che, avendo in ingresso un arbitrario enunciato, lo sappia catalogare come "teorema", "negato di un teorema" o "indecidibile"; tuttavia, il loro potere espressivo è limitato. Altri Sistemi formali, ben più ricchi (perché permettono di descrivere una qualunque macchina), ammettono macchine capaci di elencare tutti e soli i loro teoremi, ma non di fare lo stesso per gli enunciati indecidibili, per la cui individuazione restano soltanto i criteri metamatematici. I Sistemi classici formali più ricchi, infine (che non solo descrivono tutte le macchine, ma permettono, in teoria, di risolvere il problema dell'arresto di qualsiasi macchina), non ammettono neppure la possibilità di un elenco meccanico di tutti e soli i loro teoremi: infatti, una parte (infinita) dei loro assiomi viene definita tramite una semantica *irriducibile*, cioè non interamente riproducibile dal programma di nessuna macchina. Conseguentemente, qualunque macchina fallirà anche nell'individuare tutte e sole le dimostrazioni.

I Sistemi classici essenzialmente non formali (cioè il cui carattere non formale non può essere eliminato) richiedono, per la funzione delle regole deduttive, un determinato significato per (almeno una parte delle) le proposizioni. Pertanto, essi non rappresentano che un'assiomatizzazione, naturalmente non pienamente formale, di una parte della Metamatematica. Per il loro linguaggio, in generale, non vale il Teorema di s-completezza e pertanto possono possedere un unico modello a meno d'isomorfismo. Nemmeno il Metateorema d'incompletezza è per loro valido; ma d'altra parte, non solo tali Sistemi non sono, ovviamente, "meccanizzabili"[65], ma il loro criterio deduttivo è soggetto all'inevitabile incertezza delle convenzioni semantiche con cui si interpretano le loro proposizioni.

Il Metateorema dell'indimostrabilità interna della coerenza, valido per un qualsiasi Sistema classico, formale o no, ci informa che il problema della coerenza è *fondamentalmente* irrisolvibile in termini puramente matematici. Cioè, al livello più basilare della Matematica, si può arrivare, nella migliore ipotesi, a concludere la coerenza (o a supporla) sulla base di considerazioni puramente metamatematiche.

[65] Più in dettaglio, i loro teoremi non sono effettivamente numerabili.

Giunti a questo punto, è certo opportuna una discussione circa le conseguenze dei risultati di Gödel sul cosiddetto *programma* di Hilbert. La frase più ricorrente, divenuta probabilmente già noiosa, è che essi gli abbiano "inferto un colpo mortale"; ma cos'è in concreto il *programma* di Hilbert? A partire dal 1920, Hilbert delineò un programma di sistemazione logica della Matematica che si può riassumere in tre punti:

1. Formalizzare tutte le Discipline matematiche
2. Concludere la loro coerenza con metodi *finitari*
3. Risolvere tutti i problemi connessi alla loro completezza/incompletezza e decidibilità/indecidibilità

Purtroppo, non è mai stato del tutto chiaro che cosa Hilbert intendesse esattamente con l'aggettivo *finitario*. L'idea più accettata è che si dovessero escludere gli insiemi infiniti, per il loro carattere astratto. Se è così, Hilbert riteneva che dovesse bandirsi, al livello più fondamentale, l'uso dei quantificatori $\forall$ e $\exists$. Infatti, esso è strettamente necessario solo quando si applica a variabili che spaziano su un universo infinito: se è finito, di n elementi, l'espressione $\forall xP(x)$, per esempio, può essere sostituita dall'espressione: $P(x_1)$ *e* $P(x_2)$ *e* $P(x_3)$ *e* .... $P(x_n)$. Dunque, l'uso di tali quantificatori dovrebbe servire *soltanto* a semplificare, nella logica *finitaria*. Altri ritengono (o aggiungono all'idea precedente) che Hilbert si riferisse a un metodo specificamente *meccanico*: infatti, ogni *macchina* propriamente detta, si programma con un numero *finito* di istruzioni. Quest'ultima opinione si ricollega all'idea che Hilbert credesse nella possibilità, almeno in principio, di una risoluzione *meccanica* di ogni problema matematico. Ma è chiaro che, per concludere la coerenza, si tratterebbe di un criterio assai ingenuo (probabilmente troppo per Hilbert): cosa dimostrerebbe, ancor prima, la coerenza del Sistema matematico rappresentato dalla macchina? È verosimile che quest'idea sia erronea, che sia frutto di coloro che hanno dato troppo rilievo alle ambizioni formalistiche di Hilbert; dimenticando che egli fu il primo ad assodare la realtà della metamatematica. In effetti, non sembra che Hilbert abbia mai dichiarato qualcosa di simile. Sembra più ragionevole ritenere che egli sapesse bene che l'*ultima* dimostrazione di coerenza dovesse essere metamatematica, cioè propriamente una metadimostrazione; forse, la esigeva di un tipo semplice, non soggetta all'ambiguità della considerazione di collezioni infinite. Un'ingenuità più perdonabile, diremmo oggi. D'altra parte, dopo la cardinale dimostrazione di Gödel (il quale, per inciso, giudicò "misteriose" le motivazioni dell'esigenza *finitaria* di Hilbert[66]), lo stesso Hilbert, nell'introduzione dei suoi citati *Grundlagen der Mathematik* affermò di essere stato frainteso circa il significato del suo *programma*: perché non credergli?

Comunque sia, malgrado la situazione si presenti un pò ingarbugliata per conclusioni definitive, qualcosa di assodato può rimarcarsi:

1. Lo stesso lavoro di Gödel è motivato dal programma di Hilbert e realizzato secondo la sua prevista formalizzazione.
2. Qualsiasi cosa Hilbert intenda per *finitario*, ci sono ben pochi dubbi sul fatto che egli ha in mente un criterio dettato da una logica consequenziale primordiale e indiscutibile. Possono confermare questa sua visione "deterministica" diverse sue affermazioni, come la seguente: *ogni problema matematico ben definito deve necessariamente essere suscettibile di una soluzione esatta, sia nella forma di una risposta diretta a la domanda posta, sia per mezzo della dimostrazione dell'impossibilità di trovare una soluzione. Per quanto questi problemi possano sembrare inabbordabili e noi ci si senta disarmati dinanzi ad essi, tuttavia abbiamo la ferma convinzione che la loro soluzione debba seguire da un numero finito di deduzioni logiche. [...] Noi ascoltiamo sempre un richiamo perenne: qui c'è un problema; cerca la*

[66] H. Wang, *A logical journey: from Gödel to philosophy*, MIT Press, Cambridge MA (1996), p. 82.

soluzione. La puoi trovare usando il ragionamento puro, perché il matematico non dirà mai ignorabimus[67].

3. I risultati di Gödel, Turing e Church dimostrano inequivocabilmente che per la risoluzione di alcuni problemi *non può essere sufficiente una logica i cui parametri di deduzione siano stati interamente prestabiliti*. In particolare, per il riconoscimento degli enunciati indecidibili di alcune fondamentali Teorie, tra cui l'Aritmetica formale, si richiede qualcosa di sostanzialmente diverso da un predefinito "ragionamento puro": degli accordi semantici non prevedibili che interessano il delicato e informalizzabile concetto di verità; i quali, non essendo meccanizzabili, possiedono, in generale, un certo grado di ambiguità. Di più, per il caso di TI, cioè per il fondamento ultimo della Matematica formale, questo processo, se realizzabile, è intrinsecamente incerto e discutibile, data l'ambiguità stessa dei suoi "modelli".
4. Anche a causa del Metateorema dell'indimostrabilità interna della coerenza, *non esiste al momento nessuna metadimostrazione convincente (né "finitaria" né "infinitaria") della coerenza di TI*, né di nessun'altra Teoria di base per l'intera Matematica. Piuttosto, un ragionevole convincimento di essa, su una base in parte empirica.

In definitiva, può dirsi con certezza che l'ottimismo di Hilbert si è rivelato erroneo; per alcune questioni della Matematica, le ragioni della "logica pura" sono di tipo "infinitario": lontane da un determinismo di tipo meccanico, non possono essere precisate una volta per tutte e, a volte, consistono in una serie di infiniti e imprevedibili assensi o convenzioni, giustificati su un ambito esclusivamente semantico (esempio: il riconoscimento degli enunciati indecidibili di PA e TI). Di fronte ad alcuni problemi, come, in generale, l'indecidibilità di un enunciato, l'unica possibilità

[67] D. Hilbert, Comunicazione al II Congresso internazionale di Matematica di Parigi (1900). Traduzione consultata: *Los problemas futuros de la Matemática*, a cura di J. R. Ortíz, sul WEB: http://personales.ya.com/casanchi/ref/pfuturos01.htm

è quella di precisare o ridefinire, in una forma a priori imprevedibile, le modalità della sua interpretazione, fino a concludere, o forse semplicemente a *convenire*, quantunque su una base di immancabili motivazioni semantiche, la sua indecidibilità. Un esempio, più volte citato, è quello dell'*ipotesi del continuo*, metadimostrata indecidibile da Cohen tramite "modelli", appunto, abbastanza peculiari. E tuttavia, lo stesso semplice fatto che nel "modello più intuitivo" di TI, tale enunciato non si sappia concludere come vero o falso, ci segnala che in generale l'individuazione di "modelli" per la cruciale Teoria TI – e quindi anche l'individuazione di suoi enunciati indecidibili – è un argomento sostanzialmente incerto. Inoltre, come visto, un medesimo tipo di incertezza contagia, in principio, il problema fondamentale della coerenza di tutta la Matematica.

Bisogna nondimeno sottolineare che i risultati di Gödel *non affondano il programma hilbertiano, ma lo realizzano*, seppure con conseguenze che fanno naufragare, in buona parte, le ottimistiche speranze di Hilbert.

Se proprio si volesse trovare uno "sconfitto" dai risultati della logica moderna, questo può essere il punto di vista della scuola *bourbakista*: quel gruppo di matematici francesi che, con il nome collettivo di Nicolas Bourbaki, hanno dato il via, a partire dal 1935, alla rifondazione metodica e rigorosa di tutte le Discipline matematiche sotto l'impulso dell'unificazione insiemistica. Anzitutto, va riconosciuto che, in termini generali, questo sforzo non può che considerarsi lodevole, visto che ha dotato le Teorie della nuova veste assiomatica formale (pur con una profondità comprensibilmente limitata). Ma a trovarsi sotto processo è proprio la pretesa visione unificante fornita dall'insiemistica. In primo luogo, si tratta davvero soltanto di una *visione*, perché in realtà non si usa mai, fino in fondo, la Teoria TI, ma qualcosa che, non essendo altro che la Teoria ingenua degli insiemi, pretende essere una Teoria formalizzata. Abbiamo già osservato che, comunque, questo difetto è inevitabile per via dell'intrattabile complessità del linguaggio insiemistico formale. Ma se si pretende che "sotto sotto" ci sia davvero la Teoria formalizzata degli insiemi, cioè TI, bisognerebbe assumerne tutte le conseguenze; cosa che i bourbakisti non fanno mai. Tali conseguenze non soltanto mettono in discussione il numero e la stessa natura dei "modelli" di TI[68], nonché la corrispondenza di tutti i fondamentali concetti matematici (numero naturale, cardinalità, finito, infinito, etc.) con gli omonimi metamatematici, come visto in dettaglio nella seconda Parte; ma, per effetto del Metateorema d'incompletezza, questionano anche la *fedeltà* della rappresentazione insiemistica di alcuni Sistemi formali. In concreto, TI non è in grado di riprodurre tutti i teoremi di ogni Teoria formale non *eff. ass.* (o, più in generale, i cui assiomi non sono effettivamente numerabili), come il Sistema PAV, in grado di dedurre tutti e soli gli enunciati di PA veri nel modello standard. Per di più, come avvedutamente osservato da Lolli[69], c'è un grave difetto demotivante: l'utilità stessa della "costruzione genetica", che partendo da PA giunge, tramite generalizzazioni insiemistiche (da noi abbozzate alla fine del par. II.10), alla definizione della Teoria dei reali TFR, viene messa in crisi, dal punto di vista epistemologico, dalla semplice osservazione che in tale processo non si conservano le proprietà logiche più interessanti ed importanti, come la completezza e la decidibilità. PA, infatti, è incompleto e indecidibile, mentre TFR completo e decidibile. Il mero fatto che entrambe le Teorie vengano espresse all'interno di TI non è capace, alla fine, di "unificarle" in modo così sensazionale: la differenza spiegata basta a "separarle in casa" anche in ambito insiemistico.

Tutto ciò, tuttavia, non deve interpretarsi come una demolizione della Teoria TI. Come abbiamo rilevato nel corso della seconda Parte, la formalizzazione offerta da TI è un passo necessario per risolvere gravi ambiguità e per la codificazione del concetto di *modello*; e il tentativo di unificazione insiemistica andava comunque esplorato, anche a costo di rivelarsi inutile.

I descritti confini logici della Matematica, rappresentano un drammatico sconvolgimento culturale? Si tratta, anzi, di un'importante conquista. La "vecchia" Matematica continua a funzionare come sempre; ma, su un piano puramente teorico, essa ha perduto un po' di quell'aura dorata di inoppugnabile infallibilità che indubbiamente l'ha caratterizzata per secoli. Il dramma filosofico,

[68] Così che, per esempio, ci si chiederebbe: in quale "modello intuitivo" avviene la spettacolare riduzione insiemistica della Matematica?

[69] G. Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino (2004), p. 110-111.

alla fine, scaturirebbe solo per l'aver ritenuto la Matematica come qualcosa di puramente automatico, di "meccanico"; come un terreno di arida tautologia. Ciò che per alcune Teorie fondamentali, fortunatamente, non è.

III.12. Sintesi

Siamo così giunti al termine. Nella nostra panoramica della Logica, non certo esaustiva e solo occasionalmente tecnica, abbiamo pur introdotto dei nuovi concetti e messo in luce alcune diffuse inesattezze che verosimilmente faranno discutere. Ci sembra opportuno fare un riepilogo finale delle principali di esse.

- Si sono introdotti i nuovi concetti di *distinguibilità* per gli elementi di una collezione, di Sistema matematico *ben definito* (par. I.5) e di *fedeltà* della rappresentazione insiemistica di un Sistema (par. II.7).
- Tra le ragioni che giustificano l'opportunità di una Teoria formalizzata degli insiemi, abbiamo incluso l'esigenza di formalizzare il metateorema di correttezza, la cui usuale (meta)dimostrazione si è messa in discussione (par. II.2).
- Abbiamo esplicitamente riconosciuto che un linguaggio semantico, come quello metamatematico, può constare di un "numero" di proposizioni superiore a qualsiasi cardinalità, numerabile o innumerabile; tale "numero" viene chiamato *iperinnumerabile*. Il *paradosso di Berry* può essere letto come una prova del fatto che un numero finito di espressioni semantiche può denotare un numero infinito di oggetti; quello *di Richard* come una prova del fatto che le definizioni semantiche non sono numerabili (par. II.13).
- Si è osservato che i Sistemi matematici che ammettono un numero innumerabile di teoremi, previsti dalla cosiddetta *Semantica standard*, non possono essere *formali*. La cosiddetta *Semantica generale* o *di Henkin*, non rappresenta, pertanto, che

la convenzione di limitarsi ai soli Sistemi classici *formali* e quindi numerabili (par. II.14).

- Si è evidenziato che l'usuale classificazione dei Sistemi assiomatici classici in base all'ordine espressivo (*primo ordine*, *secondo ordine*, etc.) è fuorviante, in generale, delle loro proprietà logiche fondamentali; le quali sono legate semplicemente al rispetto o al non rispetto della *formalità* (par. II.14).
- Abbiamo rilevato una proprietà semplice e indubbia che finora sembra essere sfuggita o, comunque, non sottolineata abbastanza: il fatto che per *il linguaggio* di una Teoria non valga il Teorema di completezza semantica, non implica che la Teoria debba necessariamente essere *semanticamente incompleta* (par. II.17). Conseguentemente, tale questione è in discussione per il caso delle Teorie *integrali* (cioè non formali) dell'Aritmetica e dei numeri reali (par. III.9).
- Come conseguenza del primo Teorema d'incompletezza di Gödel, si è evidenziata la proprietà, per alcune Teorie formali, di non essere *fedelmente* rappresentabili in linguaggio insiemistico formalizzato: esse sono tutte e sole quelle i cui assiomi non sono effettivamente numerabili (par. III.3 e III.6).
- Si sono rilevate alcune inesattezze legate all'interpretazione informatica del Teorema d'incompletezza, dovute *ab origine* allo stesso Chaitin. In particolare si è mostrato che è errato parlare di *casualità in Aritmetica*: infatti la casualità è una proprietà che riguarda solo le stringhe di caratteri e si ripercuote sui numeri naturali solo attraverso la codificazione che per essi si è scelta (la quale in principio è arbitraria). Di fatto, esistono codificazioni che rendono finito il numero di numeri naturali casuali (o, meglio, delle stringhe che li rappresentano), anche se esse sono assolutamente scomode. Abbiamo ribadito altre scorrettezze di Chaitin già segnalate da T. Franzén in suo recente libro (par. III.8).
- Si è evidenziato il diffusissimo equivoco di ritenere che il Teorema di incompletezza possa applicarsi anche all'Aritmetica

integrale, cioè a quella – chiamata usualmente "del secondo ordine" – che usa, come schema assiomatico, il principio di induzione completa. Dato che tale principio genera un numero innumerabile di assiomi, tale Teoria non è effettivamente assiomatizzabile (nè, più in generale, i suoi assiomi sono effettivamente numerabili). Anche volendo considerare l'induzione completa come un singolo assioma, ne risulta un assioma semantico che non è decidibile (nè effettivamente numerabile), in quanto la sua semanticità è ineliminabile (par. III.9 e II.14). Questo errore, mai chiaramente rilevato, risale alla stessa comunicazione di Gödel del suo famoso Teorema (par. III.9).

- Si è sottolineata l'infondatezza della moda di esaltare l'aspetto indeterministico del Teorema d'incompletezza: infatti ogni enunciato indecidibile, in base al Teorema di completezza semantica, può essere riconosciuto mediante la considerazione di opportuni modelli del Sistema. Un criterio, in generale intrinsecamente semantico, che soltanto nel caso della Teoria formalizzata degli insiemi può essere giudicato con pessimismo. Nel caso dell'Aritmetica di Peano, una volta riconosciuto che un suo dato enunciato è indecidibile, si dovrebbe sempre poter concludere, in principio, se esso è vero o falso per il *modello standard*; malgrado tale processo non sia meccanizzabile (par. III.9).

- L'importanza del *Secondo Teorema d'incompletezza* è stata assai ridimensionata. Infatti, abbiamo osservato che esso esprime un fatto contingente che, benchè generalizzi l'incompletezza enunciata dal primo Teorema, non ha la speciale ripercussione dell'"indimostrabilità della coerenza del Sistema per lo stesso Sistema", come normalmente si ritiene. Tale rilevanza, invece, compete ad un facile e *del tutto generale* Metateorema, che abbiamo chiamato *dell'indimostrabilità interna della coerenza* (par. III.10).

BIBLIOGRAFIA CARTACEA

AGAZZI E., *La logica simbolica*, ed. Vita e Pensiero, Brescia (1964).

ALBEVERIO S. et. al., *Non standard methods in stochastic analysis and mathematical physics*, Academic Press, New York (1986).

ÁLVAREZ VELAZCO A., *El problema del continuo antes de Cohen*, Aportaciones Matemáticas, Memorias n. 35, p. 61-69, México (2005).

AMOR J.A., *El problema del continuo después de Cohen*, Aportaciones Matemáticas, Memorias n. 35, p. 71-80, México (2005).

BELLOTTI L., *Woodin on the Continuum Problem: an overview and some objections*, Logic and Philosophy of Science, Vol. III, n. 1 (2005).

BERTO F., *Teorie dell'assurdo*, Carocci, Roma (2006).

BOOLOS G., *A new proof of the Gödel incompleteness theorem*, Notice of the AMS, Vol. 36, n.4 (1989).

CALUDE C. S., DINNEEN M. J., CHI-KOU SHU, *Computing a glimpse of randomness*, Experimental Mathematics n. 11:3 (2000).

COHEN P.J., HERSCH R., *La teoria non cantoriana degli insiemi*, Le Scienze n.1, settembre (1968).

CHAITIN G.J., *Casualità e dimostrazione matematica*, Le Scienze n. 85, settembre (1975).

CHAITIN G.J., *Gödel's Theorem and Information*, International Journal of Theoretical Physics n. 22 (1982).

CHAITIN G.J., *Information, Randomness and Incompleteness*, World Scientific, New York (1987).

CHAITIN G.J., *La casualità in Aritmetica*, Le Scienze n. 241, settembre (1988).

CHAITIN G.J., *Lisp Program-size complexity II*, Applied Mathematics and Computation 52 (1992).

CHAITIN G.J., *The limits of Mathematics*, Springer-Verlag, Singapore (1997).

CHAITIN G.J., *The halting probability Ω: irreducible complexity in pure mathematics*, Milan Journal of Mathematics n. 75 (2007).

DAVIS M., HERSCH R., *L'analisi non standard*, Le Scienze n.40, settembre (1972).

DAVIS M., MATIYASEVICH Y., ROBINSON J., *Hilbert's Tenth Problem: Diophantine Equations: Positive Aspects of a Negative Solution*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol.28 (1976).

DE LONG H., *Problemi non risolti dell'aritmetica*, Le Scienze n. 34, giugno (1971).

FRANZÉN T. *Gödel's Theorem: an incomplete guide to its use and abuse*, A. K. Peters (2005).

FREILING C., *Axioms of Symmetry: throwing darts at the real line*, Journal of Symbolic Logic n. 51, p. 190-200 (1986)

GANDY R., *Church's thesis and principles for mechanisms*, in The Kleene Symposium, p. 123-148, North Holland, Amsterdam (1980).

GARDNER M., *Il numero casuale* Ω *e il problema dell'arresto*, Le Scienze n. 139, marzo (1980).

GENTILINI P., *Didattica della Dimostrazione*, in P.Gentilini (a cura di) *Dalla matematica di base all'attività in classe: spunti di* *approfondimento per Docenti di Scuola Secondaria*, Nuova ATA, Genova (2001).

GIRARD J.Y., *La logica lineare*, Le Scienze Quaderni n. 60, Logica, giugno (1991).

GÖDEL K., *Collected Works. I: Publications 1929–1936*, eds. S. Feferman et al., Oxford University Press (1986).

GÖDEL K., *Uber formal unentscbeidbare Siitze der "Principia Mathematica" und verwandter Systeme I*, in "Monatshefte fúr Mathematik und Physik", 38, pp. 173-198 (1931), ed. italiana di E. Ballo, Bollati Boringhieri, Torino (2002).

HENKIN L., *Completeness in the Theory of Types*, Journal of Symbolic Logic, 15 (1950).

HILBERT D., BERNAYS D. P., *Grundlagen der Mathematik*, ed. Springer, Berlin, seconda edizione (1970)

HILBERT D., *Grundlagen der Geometrie*, ed. Teubner Stoccarda (1956).

LEONESI S., TOFFALORI C., L'INNOCENTE S., *Cinquant'anni di Teoria dei modelli*, (2002), Boll. dell'unione matematica italiana, Sez. A, Vol. 7, n. 2, p. 347-382, (2004).

LINDSTRÖM P., *On Extensions of Elementary Logic*, Theoria, 35 (1969)

LOLLI G., *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino (2004).

LOLLI G., *La logica come fondamento dell'informatica*, Le Scienze Quaderni n. 60, Logica, giugno (1991).

LOLLI G., *Nuovi modelli del sistema dei numeri reali*, Le Scienze n. 48, agosto (1972).

LUCAS J.R., *Mind, Machines and Gödel*, in Philosophy, n. 36 (1961).

PALLADINO D, PALLADINO C., *Le Geometrie non euclidee*, Carocci, Roma (2008).

PENROSE R., *La nuova mente dell'imperatore*, Adelphi, Milano (1990).

PREVIALE F., *Matematica generale e Aritmetica*, Enciclopedia italiana delle Scienze, Matematica e Fisica Vol.1, Istituto Geografico de Agostini Novara (1974).

PRIEST G., *In Contradiction: a Study of the Transconsistent*, Martinus Nijhoff, Dordrecht (1987).

QUINE W.V., *Completeness of Quantification Theory: Löwenheim's Theorem*, Appendix to Methods of Logic, rev. ed. New York, p. 253-260 (1959).

QUINE W.V., *Ontological relativity*, in *Ontological Relativity and Other Essays*, p. 26-68, Columbia Press, New York and London (1969).

QUINE W.V., *Quiddities. An Intermittently Philosophical Dictionary*, Penguin Books, London (1990).

ROBINSON A., *Applicazioni della logica simbolica all'algebra*, Le Scienze Quaderni n. 60, Logica, giugno (1991).

ROBINSON A., *Non-standard Analysis*, Princeton University Press (1996).

ROGERS R., *Logica matematica e teorie formalizzate*, Feltrinelli, Milano (1978).

RUSSELL B., *I principi della Matematica*, ed. italiana Newton Compton (1989).

RUSSELL B., *Introduzione alla filosofia della Matematica*, ed. italiana Newton Compton (1989).

SPERANZA F., *Logica*, Enciclopedia italiana delle Scienze, Matematica e Fisica Vol.1, Istituto Geografico de Agostini Novara (1974).

TARSKI A., *Verità e dimostrazione*, Le Scienze n. 50, ottobre (1972).

TORRES FALCÓN Y., *Teoremas limitativos de la lógica clásica de primer orden*, Signos filosóficos, n. 7, enero-junio, p. 245-262 (2002).

VITALI G., *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, 1905, in: "G. Vitali, Opere sull'analisi reale e complessa – Carteggio", Unione Matematica Italiana, Bologna (1984).

WANG H., *A logical journey: from Gödel to philosophy*, MIT Press, Cambridge MA (1996).

WOODIN H., *The Continuum Hypothesis*, Notices of the AMS, Vol. 48, n. 6, p. 567-576 e n. 7, p. 681-690 (2001).

WEB-BIBLIOGRAFIA

ANDRETTA A., *Dispense del corso di Istituzioni di Logica Matematica A.A. 2006-2007*, http://www.dm.unito.it/personalpages/andretta/dispense/dispense.pdf

ANDRETTA A., *Corso di Teoria degli insiemi*, (2006), http://homes.dsi.unimi.it/~sel/scuola2006/insiemi.pdf

ANTONELLI A., *Il teorema di Gödel e la filosofia della mente*, (2000), http://philosophy.ucdavis.edu/antonelli/papers/siena.pdf

AUSIELLO G., D'AMORE F., GAMBOSI G., *Linguaggi, Modelli, Complessitá*, (2002), http://www.dis.uniroma1.it/~ausiello/InfoTeoRMvo/main.pdf

BARTOCCI U., *Una breve presentazione (critica) del Teorema d'incompletezza di Gödel*, versione del maggio 2007, http://www.cartesio-episteme.net/mat/teor-goed.pdf

BERARDUCCI A., *Corso di Teoria dei modelli*, (2006), http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/Appunti/modelli.pdf

BERARDUCCI A., *Istituzioni di Logica Matematica 2007-08. Parte sulle interpretazioni e teorie indecidibili,* http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/ILM08-09/interpretazioni.pdf

BERNAYS P., *On a Symposium on the Foundations of Mathematics*, (1971), http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/bernays28_2003-05-19.pdf

BORZACCHINI L., *Il computer e la metamatematica*, (2002), http://www.swif.uniba.it/lei/storiasc/diffusione/recensioni/borzacchini.pdf

BRUNI R., GALVAGNI M., *I fondamenti della matematica dopo i teoremi di incompletezza: K. Gödel, S. Feferman*, (2001), http://www.philos.unifi.it/upload/sub/Materiali/Documenti/bruni_galvagni_fondamenti_matematica.pdf

BURRIS S. N., *From Richard Dedekind to Gerhard Gentzen*, http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/LOGIC/logicians.html

CASARI E., *La filosofia della Matematica del '900*, Sansoni, p. 1-25, (1973),
http://www.math.unipd.it/~azanardo/ssis/Casari.pdf

DI SAVERIO G., *La crisi dei fondamenti della Matematica*, 1º capitolo, Tesi di Laurea *Dal paradiso di Hilbert all'inferno di Gödel*, Univ. di Perugia, (2003),
http://www.cartesio-episteme.net/mat/disav1.doc

DOVIER A., GIACOBAZZI R., *Dispense per il Corso di Fondamenti dell'Informatica: Linguaggi Formali, Calcolabilitá e Complessitá*, (2006),
http://users.dimi.uniud.it/~agostino.dovier/DID/dispensa.pdf

ENDERTON H. B., *Second-order and Higher-order Logic*, Standford Encyclopedia of Philosophy (2007), http://plato.stanford.edu/entries/logic-higher-order/

FEFERMAN S., *Mathematical Intuition vs. Mathematical Monsters*, (1998),
http://math.stanford.edu/~feferman/papers/intuition.pdf

FRIXIONE M., *Dispense di Teoria della ricorsivitá e calcolabilitá effettiva*, (1991),
http://www.dif.unige.it/epi/hp/frixione/appunti_computabilita.pdf

GERLA G., *Proprietà che si conservano*, appunti di Logica matematica,
http://www.dmi.unisa.it/people/gerla/www/didattica.html

HILBERT D., Comunicazione al II Congresso internazionale di Matematica di Parigi (1900). Traduzione consultata: *Los problemas futuros de la Matemática*, a cura di J. R. Ortíz,
http://personales.ya.com/casanchi/ref/pfuturos01.htm

HRACHOVEC H., *Ontological Relativity reconsidered: Quine on Löwenheim-Skolem, Davidson on Quine*, (2005),
http://sammelpunkt.philo.at:8080/1078/1/quine_skolem_orig.pdf

IVORRA CASTILLO C., *Lógica y Teoría de Conjuntos*, (2006),
http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Logica.pdf

KENNEDY J., *Completeness Theorems and the Separation of the First and Higher-Order Logic*, (2008),
http://igitur-archive.library.uu.nl/lg/2008-0317-201019/UUindex.html

LICATA I., *Oracoli di Turing e Sistemi Logicamente Aperti*, (2005), VBJ, n.62,
http://webonline.gruppoinfomedia.it/dac/articlezip.php?form_fileid=41&form_rivista=vbj&form_rivistanum=62&form_risoluzione=3

LOLLI G., *È possibile concepire gli infinitesimi?*, (2007),
http://homepage.sns.it/lolli/articoli/InfinitesimiRoma.pdf

MAKOWSKY J.A., *Encounters with A. Mostowski*, (2007),
http://www.cs.technion.ac.il/~admlogic/TR/2007/mostowski-2.pdf

MANCOSU P., ZACH R., BADESA C., *The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1900–1935*, da pubblicarsi presso ed. Leila Haaparanta, Oxford University Press, bozza finale (maggio 2004) all'indirizzo:
http://www.ucalgary.ca/~rzach/papers/history.html

MARTINI A., *Notazioni ordinali e progressioni transfinite di teorie*, Tesi di Laurea, Università di Pisa (2006), http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-11082006-161824/unrestricted/tesi.pdf

MONTAGNA F., *Teoria della Computabilitá*, (2002), http://docenti.lett.unisi.it/files/4/1/1/23/teocomputab.pdf

MORICONI E., *I teoremi di Gödel*, (2006), SWIF – Sito Web Italiano per la Filosofia, http://lgxserve.ciseca.uniba.it/lei/biblioteca/lr/public/moriconi-1.0.pdf

ODIFREDDI P., *Metamorfosi di un Teorema*, (1994), http://www.vialattea.net/odifreddi/godel.htm

ROSSBERG M., *First-Order Logic, Second-Order Logic, and Completeness*, Hendricks et al. (eds.) Logos Verlag Berlin (2004), http://www.st-andrews.ac.uk/~mr30/papers/RossbergCompleteness.pdf

SAMBIN G., *Per una dinamica nei fondamenti*, (2005), http://www.math.unipd.it/~sambin/txt/PUDbook2005-28maggio.pdf

SIDER T., *Math Logic. Notes for Boolos & Jeffrey, Computability and Logic*, (2004), http://tedsider.org/teaching/510/notes.pdf

SIMPSON S. G., *Mathematical Logic*, (2005), http://www.math.psu.edu/simpson/courses/math557/logic.pdf

VIGNA S., *Dispense per il corso di informatica teorica*, (2001), http://vigna.dsi.unimi.it/InformaticaTeorica.pdf

WRIGHT C., *On Quantifying into Predicate Position: Steps towards a New(tralist) Perspective*, (2007), http://philpapers.org/autosense.pl?searchStr=Crispin%20Wright.

ZANARDO A., *Teorie assiomatiche. I numeri naturali*, (2005), http://www.math.unipd.it/~azanardo/ssis/Teor_Ass.pdf