Tema 7

Sistemas de Inventarios

7.1. Modelo EOQ básico

El modelo EOQ básico (Economic Order Quantity) es el más simple y fundamental de todos los modelos de inventarios.

7.1.1. Hipótesis del modelo

1. Todos los parámetros se conocen con certeza (modelo determinista)
2. La unidad de tiempo es el año, aunque el análisis es válido para cualquier otra unidad
3. El inventario es de un sólo producto
4. La demanda es continua y contante en el tiempo.
5. El nivel de inventarios se revisa de forma continua y en cualquier momento es posible realizar un pedido

6. No hay descuentos en el precio por el volumen de compra
7. El tiempo de entrega (tiempo que transcurre desde la solicitud del pedido hasta que se recibe) es nulo; el pedido se recibe en el momento en el que se solicita
8. No se permite desabastecimiento (escasez)
9. El tamaño de cada pedido es constante
10. Todos los costes son constantes en el horizonte de planificación
11. Se considera un horizonte de planificación ilimitado y continuo

En principio se supone que la unidad de tiempo es el año, aunque el análisis es valido para cualquier otra unidad. Consideraremos la siguiente notación:

- D es la demanda anual
- q es la cantidad de pedido
- K es el coste fijo de hacer un pedido de cualquier tamaño
- p es el coste unitario de compra
- h es el coste de mantener una unidad del artículo en inventario durante un año.

7.1.2. Planteamiento y formulación del modelo

El objetivo de este modelo es determinar la cantidad óptima de pedido q^* y el instante en qué debe hacerse, es decir, cuánto pedir y cuándo pedir. Puesto que, según la hipótesis 7, el reabastecimiento del inventario es instantáneo, se deduce que el pedido debe realizarse en cuanto el inventario se agote. Por consiguiente, el objetivo se reduce a determinar la cantidad económica de pedido q^*. Esta es la razón por la que a este modelo se le denomina *modelo de la cantidad económica de pedido*.

Los costes que intervienen en la gestión del inventario son:

- El coste anual de hacer pedidos. Es igual al coste fijo de pedido por el número de pedidos al año, o sea,
$$K\frac{D}{q}$$
- El coste anual de compra
$$pD$$
- El coste anual de mantenimiento. Para calcular este coste es necesario examinar el comportamiento del nivel de inventario, $I(t)$, a lo largo del tiempo. En este modelo, el comportamiento del nivel de inventario se pude representar mediante la siguiente gráfica:

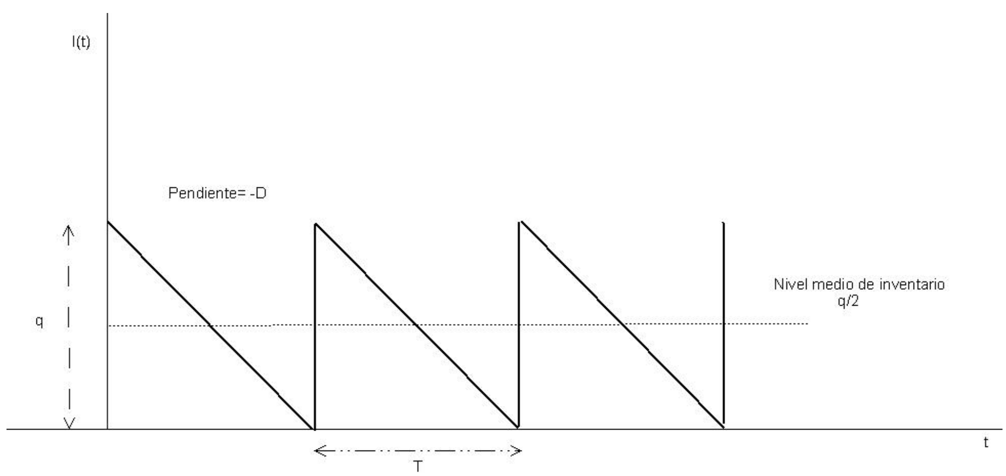

Figura 7.1: Modelo EOQ

Se denomina ciclo de inventario al intervalo de tiempo que comienza con la llegada de un pedido y termina en el instante anterior al recibir el siguiente pedido. Su longitud es igual a $\frac{q}{D}$ años, y se representa por T. El coste de mantenimiento de cada ciclo de inventario se obtiene multiplicando el coste unitario anual de mantenimiento por el nivel medio de inventario en el ciclo $(\frac{q}{2})$, por la longitud de ciclo. Finalmente, el coste anual de mantenimiento será el coste de cada ciclo de inventario por el número de ciclos a lo largo del año. De esta forma, dicho coste viene dado por:

$$\left(h\frac{q}{2}\frac{q}{D}\right)\frac{D}{q} = h\frac{q}{2}$$

El objetivo del modelo es minimizar la función de coste anual que viene dada por la suma del coste anual de hacer pedidos más el coste anual de mantenimiento más el coste anual de compra de los artículos. En definitiva, la función objetivo es:

$$C(q) = K\frac{D}{q} + h\frac{q}{2} + pD.$$

Puesto que el coste anual de compra de artículos es independiente del tamaño de los pedidos, minimizar la función anterior equivale a minimizar los llamados costes de almacén, dador por

$$C_a(q) = K\frac{D}{q} + h\frac{q}{2}.$$

Solución del modelo

Derivando la función $C(q)$ y resolviendo la ecuación $C'(q) = 0$, se obtiene que

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

y puesto que $C''(q) = \frac{KD}{q^3} < 0$, para todo $q > 0$, se sigue que $C(q)$ es una función convexa en $(0, +\infty)$ y por lo tanto, q^* es, efectivamente, el mínimo global de la función.

Observaciones

Para la cantidad óptima de pedido q^*,

- El coste anual de pedido vale:

$$K\frac{D}{q^*} = \frac{\sqrt{2KDh}}{2}$$

- El coste anual de mantenimiento es:

$$h\frac{q^*}{2} = \frac{\sqrt{2KDh}}{2}$$

- El coste anual de pedido y el coste anual de mantenimiento coinciden.

- El número óptimo de pedidos es:

$$N^* = \frac{D}{q^*} = \sqrt{\frac{Dh}{2K}}$$

- La longitud de ciclo óptimo de inventario es:

$$T^* = \frac{1}{N^*}\sqrt{\frac{2K}{Dh}}$$

- El coste óptimo de almacén vale:

$$C_a(q^*) = \sqrt{2Kdh} = hq^*$$

- El coste total óptimo vale:

$$C(q^*) = \sqrt{\text{”}KDh} + pD = hq^* + pD$$

Punto de reabastecimiento

Entre las hipótesis del modelo EOQ básico se ha supuesto que el tiempo de entrega es nulo. Si se relaja esta hipótesis, no se ven modificados el coste anual de mantenimiento ni el de hacer pedidos, por lo que la cantidad económica de pedido no varía. Sin embargo, la cuestión que se plantea ahora es cuándo debe hacerse el pedido para evitar que se presente escasez en el inventario. Esta claro que se debe ordenar el pedido en el instante preciso para que éste llegue justo cuando se agote el inventario. Una forma de determinar este instante es calcular el nivel de inventario adecuado para satisfacer la demanda durante el tiempo que tarde en llegar el pedido. A este nivel de existencias se le denomina **punto de reabastecimiento** y se denota por R^*.

Para calcular el punto de reabastecimiento distinguiremos tres casos, dependiendo del tiempo L que tarda en llegar el pedido y la longitud de ciclo de inventario óptima T^*.

- Si $L < T^*$, el punto de reabastecimiento es $R^* = LD$.
- Si $L > T^*$, la demanda durante el tiempo de entrega es mayor que q^*, lo que implica que el pedido debe hacerse en algún periodo anterior a aquel en cuya finalización esperamos recibir el pedido. En concreto, si m es la parte entera de $\frac{L}{T^*}$, entonces $L' = L - mT^*$ es menor que T^* y el punto de reabastecimiento es

$$R^* = L'D = (L - mT^*)D = LD - mq^*.$$

- Si $L = T^*$, entonces debemos realizar el pedido cada vez que el inventario se agota, aunque éste llegará al final del ciclo que se inicia.

Artículos indivisibles

En este apartado abordamos el caso, bastante frecuente en la realidad, en el que producto al que hace referencia el modelo debe presentarse en unidades enteras. En consecuencia, tanto D como q deben ser cantidades enteras, y la hipótesis de demanda constante en el tiempo debe entenderse ahora de modo que las unidades del artículo son demandadas de una en una y que el tiempo entre dos demandas consecutivas es constante y conocido. El resto de de hipótesis se siguen manteniendo.

En este modelo cabe hacer una consideración adicional: puesto que la demanda es discreta, podemos hacer coincidir la entrega de cada pedido con justo el instante en el que se demande un artículo, lo cual nos permitirá un ahorro adicional en los costes de mantenimiento sin perjudicar los restantes costes. Es decir, si hacemos llegar un pedido de q unidades cuando el inventario se ha agotado y justo cuando se demanda una unidad del mismo, podríamos servir esa unidad del nuevo pedido y por tanto, el nivel medio de inventario sería $\frac{q-1}{2}$.

De este modo, la función de coste asociada al modelo sería:

$$C(q) = K\frac{D}{q} + h\frac{q-1}{2} + PD$$

El objetivo sería encontrar la cantidad entera positiva q_e^* que minimiza tal función.

Puesto que $C(q)$ es una función estrictamente convexa, si $q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$ es la solución óptima real de $C(q)$ se tiene que:

- Si $[q^*] = 0$, entonces $q_e^* = 1$ y, por lo tanto, no hay gastos de almacenamiento.
- Si $C([q^*]) < C([q^*]+1)$, entonces la cantidad óptima de pedido es $q_e^* = [q^*]$.
- Si $C([q^*]) > C([q^*]+1)$, entonces la cantidad óptima de pedido es $q_e^* = [q^* + 1]$.

- Si $C([q^*]) = C([q^*]+1)$, entonces tanto $[q^*]$. como $[q^*]+1$ son cantidades óptimas de pedido.

7.2. Modelos EOQ con escasez

Los modelos que permiten escasez o agotamiento de inventario son aquellos en los que durante un periodo de tiempo la demanda no puede cubrirse por tener el almacén agotadas sus existencias. La escasez siempre lleva un coste de penalización asociado debido a la pérdida de clientes, de prestigio y a la pérdida potencia de beneficios debido a la pérdida de ventas.

Estudiaremos dos tipos de modelos: de demanda pendiente y de pérdida de ventas. En el primero la demanda insatisfecha puede satisfacerse en una fecha posterior y consecuentemente, el coste de escasez dependerá de la cantidad faltante y el retraso dde tiempo. En los segundo, la demanda no satisfecha se pierde completamente y por lo tanto el coste de escasez sólo depende de la cantidad faltante.

La razón por la cual a un comerciante le puede interesar adoptar una política de pedidos retroactivos, aunque ello lleve consigo una penalización, es que al demorar pedidos para satisfacer demanda atrasada se requiere un menor número de pedidos y se mantienen niveles inferiores de inventario, puesto que parte de cada uno de los pedidos de reabastecimiento se asigna de inmediato a la demanda pendiente.

- b: demanda no satisfecha en cada periodo
- M: nivel máximo de inventario
- s: coste anual y unitario de escasez

- t_1: tiempo del ciclo durante el cual el inventario es no negativo, es decir, el tiempo del ciclo durante el cual se satisface la demanda

- t_2: tiempo del ciclo durante el cual el inventario es negativo, es decir, el tiempo del ciclo durante el cual no se satisface la demanda

7.2.1. Modelo EOQ con demanda pendiente

En este modelo tenemos que determinar el tamaño óptimo de pedido, q^*, y el nivel que podemos permitirnos de escasez, b^*, es decir, cuánto pedir y cuándo pedir.

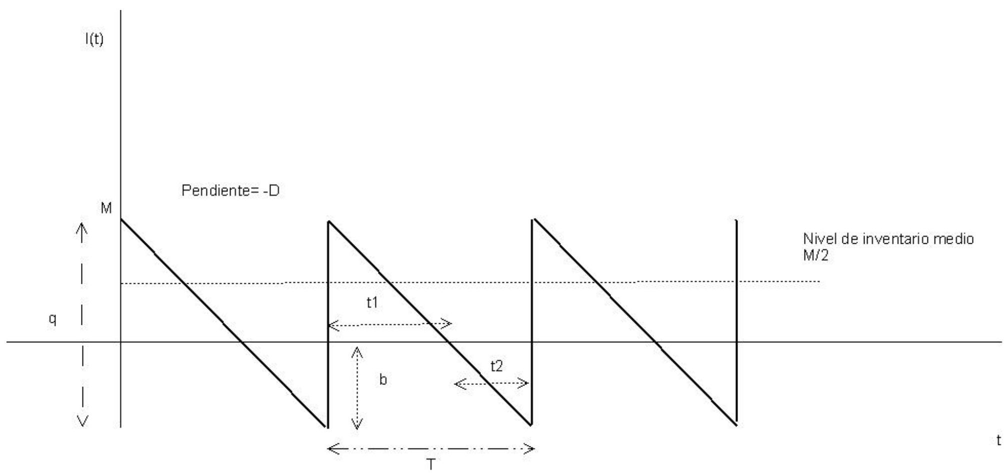

Figura 7.2: Modelo EOQ con demanda pendiente

Notar que $M = q - b$, $t_1 = \frac{q-b}{D}$, $t_2 = \frac{b}{D}$, $T = t_1 + t_2$.

Los costes que intervienen en la gestión del inventario son los siguientes:

- Coste anual de hacer pedidos

$$K\frac{D}{q}$$

- Coste anual de mantenimiento

$$h\frac{M}{2}t_1\frac{D}{q} = h\frac{q-b}{2}\frac{q-b}{D}\frac{D}{q} = h\frac{(q-b)^2}{2q}$$

- Coste anual de escasez

$$s\frac{b}{2}t_2\frac{D}{q} = s\frac{b}{2}bDDq = s\frac{b^2}{2q}$$

- Coste anual de compra

$$pD$$

Por lo tanto, la función de coste anual es:

$$C(q,b) = K\frac{D}{q} + \frac{(q-b)^2}{2q} + s\frac{b^2}{2q} + pD$$

La función $C(q,b)$ es una función convexa en dos variables lo que permite obtener q^* y b^* de un modo sencillo

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}\left(\frac{h+s}{s}\right)}, \qquad b^* = \sqrt{\frac{2KD}{s}\left(\frac{h}{h+s}\right)}$$

Observaciones

- Como por hipótesis el tiempo de entrega de los pedidos es nulo, el momento de pedir es cuando se alcance la escasez b^*, es decir, cuando el nivel de inventario sea $-b^*$. En el caso de que el tiempo de entrega sea positivo, $L > 0$, los valores óptimos q^* y b^* no se ven alterados. Con un análisis análogo al del modelo EOQ básico, se obtiene que el punto de reabastecimiento es $R^* = L'D - b^*$, donde $L' = L - \left[\frac{L}{T^*}\right]T^*$. Si $R^* < 0$ significa que realizamos el pedido en periodo de escasez, de modo que $-R^*$ representará la escasez acumulada hasta ese instante.

- Si $s \to \infty$, los resultados conducen a los del modelo EOQ

- En el punto óptimo (q^*, b^*) se alcanza el equilibrio entre los costes de ordenar y la suma de los costes de mantenimiento y escasez

7.2.2. Modelo EOQ con pérdida de ventas

En el modelo EOQ con pérdida de ventas las demandas que llegan cuando el inventario está agotado se pierden para siempre. Difícilmente se justifica esta política dada la agresividad de la misma, aunque ello no ha impedido que el modelo matemático haya sido estudiado en la literatura clásica de gestión de stocks.

En este modelo necesitamos incluir una consideración que no era necesaria en los anteriores. Cuando se sirve toda la demanda los ingresos por ventas dependen exclusivamente de la demanda, y por lo tanto pueden considerarse como una constante (pD) que no afecta a la optimización de la función de costes. Sin embargo, cuando el gestor decide no cumplir una parte de la demanda, los ingresos quedan afectados por esta parte no satisfecha.

Para recoger esta circunstancia en el modelo, supondremos que toda la demanda satisfecha se vende a un precio unitario v y que las unidades no satisfechas inducen un coste unitario s (que se supone que incluye el coste de pérdida de beneficio $v - p$ y un coste adicional por pérdida de confianza del cliente).

Suponiendo que en cada periodo se ha un pedido de tamaño $q > 0$ y que se dejan sin servir $b \geq 0$ unidades, los costes asociados al modelo son:

- Coste anual de hacer pedidos
$$K \frac{D}{q+b}$$
- Coste anual de mantenimiento
$$h \frac{q}{2} t_1 \frac{D}{q+b} = h \frac{q}{2} \frac{q}{D} \frac{D}{q+b} = h \frac{q^2}{2(q+b)}$$
- Coste anual de escasez
$$sb \frac{D}{q+b}$$

- Coste anual de compra incluyendo los beneficios de la venta

$$(p-v)q\frac{D}{q+b}$$

Por lo tanto, la función de coste global anual viene dada por:

$$C(q,b) = K\frac{D}{q+b} + h\frac{q^2}{2(q+b)} + sb\frac{D}{q+b} + (p-v)q\frac{D}{q+b}$$

Los resultados que se obtienen son los siguientes:

- Si $\sqrt{2KDh} + (p-v)D < sD$, entonces el mínimo se alcanza en

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}, \qquad b^*0 \text{ con } C(q^*,b^*) = \sqrt{2KDh} + (p-v)D.$$

  En este caso no hay pérdida de ventas,

- Si $\sqrt{2KDh}+(p-v)D > sD$, entonces el mínimo se alcanza cuando no se realizan pedidos $q^* = 0$ y $b = \infty$ con $C(q^*,b^*) = sD$. En este caso no se hacen pedidos y todo son ventas perdidas.

- Si $\sqrt{2KDh} + (p-v)D = sD$, entonces el mínimo se alcanza en

$$q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

  para cualquier b^* y también en $(q^* = 0, b^* = \infty)$. En cualquier caso el coste óptimo es $C(q^*,b^*) = \sqrt{2KDh} + (p-v)D = sD$.

Puesto que en la función de coste de este modelo se incluyen los beneficios derivados de la venta del artículo, si $C(q,b) > 0$ y no se consideran otros aspectos, lo razonable sería no comercializar el artículo.