

# Teoría de colas

- Las colas (líneas de espera) son parte de la vida diaria
    - Supermercado      - Servicios de reparaciones      - Telecom.
    - Banco              - Comedor universitario      - Producción
  - El tiempo que la población pierde al esperar en las colas es un factor importante tanto en la calidad de vida como en la eficiencia de su economía
    - En la URSS los ciudadanos tenían que hacer grandes colas para comprar artículos básicos
    - En EEUU se estima que las personas pasan 37000000000 horas al año en colas (20 mill. personas-año de trabajo útil)
- 
-

# Teoría de Colas

- La teoría de colas es el estudio de los sistemas de líneas de espera en sus distintas modalidades.
  - El estudio de estos modelos sirve para determinar la forma más efectiva de gestionar un sistema de colas
    - Demasiada capacidad de servicio => Excesivos gastos
    - Poca capacidad de servicio => Mal servicio
  - Objetivo: encontrar un balance adecuado entre el coste del servicio y los tiempos de espera.
- 
-

# Teoría de colas

- Los modelos de sistemas de colas se pueden usar para responder preguntas como:
    - ¿qué fracción de tiempo esta libre cada servidor?
    - ¿cuál es el número esperado de clientes en cola?
    - ¿cuál es el número esperado de clientes en el sistema?
    - ¿cuál es el tiempo medio que pasa un cliente en la cola?
    - ¿cuál es el tiempo medio que pasa un cliente en el sistema?
- 
-

# *Estructura básica de un modelo de colas*

- **Fuente de entrada:** (población de clientes potenciales). Se dice que es limitada o ilimitada según si su tamaño es finito o infinito. Usualmente se asume que es ilimitada (el caso finito es más difícil analíticamente)
  - **clientes:** entran al sistema cada cierto tiempo y se unen a una cola. Se debe especificar el patrón estadístico mediante el cual los clientes entran al sistema.
- 
-

# *Estructura básica de un modelo de colas*

- **Proceso de llegada:** La suposición habitual es que los clientes acceden al sistema según un proceso de Poisson, lo que significa que los clientes que llegan en un intervalo determinado de tiempo siguen una distribución Poisson, con tasa media fija y sin importar cuántos clientes ya están en el sistema. Una suposición equivalente es que los tiempos entre dos llegadas consecutivas (**tiempo entre llegadas**) es exponencial.
- 
-

# *Estructura básica de un modelo de colas*

- **Cola:** cuando los clientes entran al sistema se unen a una cola. La cola es donde los clientes esperan a ser servidos. Una cola se caracteriza por el número máximo permisible de clientes que puede admitir. La suposición de una cola infinita es más fácil de manejar analíticamente que la de una cola finita. También pueden considerarse otras suposiciones acerca del comportamiento de los clientes cuando llegan al sistema, como por ejemplo que un cliente rehuse acceder al servicio porque la cola es demasiado larga.
- 
-

# *Estructura básica de un modelo de colas*

- **Disciplina de la cola:** En un determinado momento se selecciona un miembro de la cola, mediante alguna regla conocida como disciplina de servicio. La disciplina de servicio se refiere al orden en el que se seleccionan los clientes de la cola para recibir el servicio.
    - FIFO (más común)
    - Aleatorio
    - LIFO
    - Sistema de prioridades
- 
-

# *Estructura básica de un modelo de colas*

- **Mecanismo de servicio:** cuando un cliente es tomado de la cola, accede al mecanismo de servicio, que consiste en una secuencia de instalaciones de servicio en serie que el cliente debe pasar para completar el servicio. Cada instalación de servicio estará formada por varios canales de servicio paralelos, llamados **servidores**. Se debe especificar el número de instalaciones de servicio en serie y el número de servidores paralelos en cada una de ellas. Los modelos más comunes suponen una única instalación con uno o varios servidores disponibles.
- 
-

# *Estructura básica de un modelo de colas*

- **Proceso de servicio:** En cada instalación, el tiempo que transcurre desde el inicio del servicio hasta su fin en dicha instalación se llama **tiempo de servicio**. El modelo de colas debe especificar la distribución de probabilidad del tiempo de servicio de cada servidor, y quizás de cada tipo de cliente, aunque lo común es que todos los servidores sigan la misma distribución. La suposición más habitual es que este tiempo de servicio es exponencial. Otras distribuciones de servicio importantes son la degenerada y la Erlang.
- 
-

# Notación de Kendall-Lee 1/2/3/4/5/6

- 1: Distribución del tiempo entre llegadas
    - M: tiempos exponenciales iid
    - D: iid + deterministas
    - E\_k: tiempos de llegadas Erlang (k) iid
    - G: tiempos iid según alguna distribución arbitraria
  - 2: Distribución de tiempo de servicio
  - 3: Número de servidores en paralelo
  - 4: Disciplina de la cola
  - 5: Número máximo de clientes en el sistema
  - 6: Tamaño de la fuente de entrada
- 
-

# Terminología estándar

- Estado del sistema: número de clientes en el sistema
- Longitud de la cola:  $n^{\circ}$  de clientes en cola = Estado del sistema – número de clientes en servicio
- $N(t)$ : número de clientes en el sistema en el instante  $t$
- $P_n(t)$ : probabilidad de que haya exactamente  $n$  clientes en el sistema en el instante  $t$

Cuando un sistema de colas inicia su operación, los distintos factores del sistema se encuentran bastante influenciados por las condiciones iniciales; se dice que el sistema se encuentra en condición transitoria. Una vez que ha pasado suficiente tiempo, usualmente, los factores del sistema se vuelven independientes de las condiciones iniciales y del tiempo transcurrido, y se dice que el sistema se encuentra en estado estable. A lo largo de este tema, dedicaremos nuestro análisis al estado estacionario.

---

---

# Formulas de Little

$\lambda_n$ : tasa media de llegadas cuando hay  $n$  clientes en el sistema

$\mu_n$ : tasa media de servicio cuando hay  $n$  clientes en el sistema

- $L$ : número esperado de clientes en el sistema
- $L_q$ : número esperado de cliente en cola
- $W$ : tiempo medio de estancia del cliente en el sistema
- $W_q$ : tiempo medio de espera del cliente en cola

En estado estacionario y con  $\lambda_n=\lambda$ ,  $\mu_n=\mu$  se tiene que

$$L=\lambda W$$

$$L_q=\lambda W_q$$

$$W=W_q + (1/\mu)$$