

Transformaciones en el plano y el espacio

AMD – Grado en Ingeniería Informática

Transformaciones geométricas en \mathbb{R}^2

Las principales transformaciones del plano son:

- Proyecciones ortogonales sobre una recta r (que pasa por el origen).
- Simetrías respecto de una recta r (que pasa por el origen).
- Giros alrededor del origen de coordenadas.

Para cada una de ellas veremos cómo se construye su matriz asociada.

Proyección ortogonal sobre una Recta

- La proyección sobre una recta consiste en llevar cada punto al punto de la recta más próximo.
- Eso se hace calculando la recta perpendicular y moviéndonos en esa dirección.
- Por ejemplo, si la recta fuese el eje x , para proyectar sobre dicho eje cualquier punto del plano, lo único que tenemos que hacer es poner la coordenada y a cero y dejar la coordenada x tal cual está.
- La forma de resolver el problema en general, será tomar una base en la que la recta esté en el eje x y proyectemos perpendicularmente.
- Luego se hace el cambio de base y se obtiene la representación en base canónica.
- Lo más sencillo es verlo con un ejemplo.

Ejemplo

Calcula la matriz de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^2 sobre el espacio generado por el vector $(1, 2)$, expresada en base canónica.

Llamemos v_1 al vector que genera la recta: $v_1 = (1, 2)$.

El vector v_2 tiene que ser perpendicular a v_1 y para encontrarlo no tenemos más que intercambiar las coordenadas de v_1 cambiando una de las dos de signo, es decir basta tomar

$$v_2 = (-2, 1)$$

La base \mathcal{B} que hemos encontrado para expresar la proyección de forma sencilla es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $p_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal. Si proyectamos v_1 sobre la recta r , como ya está en ella, se queda igual, por lo tanto $p_r(v_1) = v_1$, cuyas coordenadas en B son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Al proyectar el vector v_2 , al ser perpendicular a r , va al vector $\mathbf{0}$, cuyas coordenadas son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matriz de p_r en base B es pues

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A través de la composición:

$$\mathbb{R}^2_{(I_c)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^2_{(B)} \xrightarrow{P_r} \mathbb{R}^2_{(B)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^2_{(I_c)}$$

Vemos que la matriz de p_r respecto de la base canónica es:

$$BPB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Simetría ortogonal respecto de una Recta

- Las simetrías son muy similares a las proyecciones.
- Pero en lugar de llevar los puntos a la recta, lo que hacemos es seguir adelante y llevarlos a la posición contraria en el plano.
- Si hiciésemos la simetría sobre el eje x , lo que habría que hacer es cambiar la coordenada de y de signo.
- En todo lo demás el proceso va a ser similar a las proyecciones.
- Elegiremos la base en que la simetría se exprese con un cambio de signo en la segunda coordenada y luego haremos los cambios de base para despejar la matriz.

Ejemplo

Calcula la matriz de la simetría ortogonal de \mathbb{R}^2 respecto al espacio generado por el vector $(2, 3)$, expresada en base canónica.

Llamemos v_1 al vector que genera la recta: $v_1 = (2, 3)$.

El vector v_2 tiene que ser perpendicular a v_1 y para encontrarlo no tenemos más que intercambiar las coordenadas de v_1 cambiando una de las dos de signo, es decir basta tomar

$$v_2 = (-3, 2)$$

La base \mathcal{B} que hemos encontrado para expresar la simetría de forma sencilla es

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea $s_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la simetría ortogonal. Si hacemos el simétrico de v_1 sobre la recta r , como ya está en ella, permanece fijo puesto que la recta es el eje de simetría, por lo tanto $s_r(v_1) = v_1$, cuyas coordenadas en \mathcal{B} son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. El vector v_2 es perpendicular a r , por lo tanto va a su opuesto $-v_2$, cuyas coordenadas son $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La matriz de s_r en base \mathcal{B}

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A través de la composición:

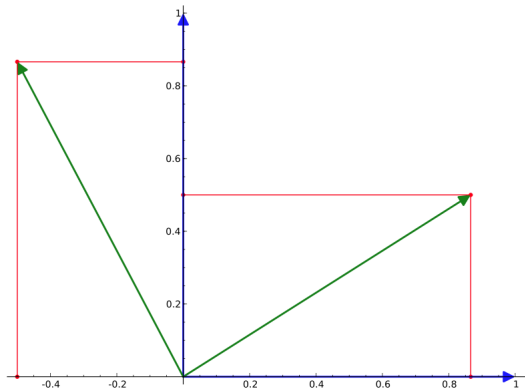
$$\mathbb{R}^2_{(I_c)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^2_{(B)} \xrightarrow{s_r} \mathbb{R}^2_{(B)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^2_{(I_c)}$$

Vemos que la matriz de s_r respecto de la base canónica es:

$$BSB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Giro alrededor del origen

- Un giro alrededor del origen consiste en mover todos los puntos del plano un ángulo α en sentido positivo.
- Llamaremos sentido positivo del plano al contrario a las agujas del reloj.
- Vamos a hacer la representación en canónicas, si lo necesitásemos en otra base, haríamos el cambio.
- Tenemos que ver cual es la imagen de los vectores de la base canónica tras el giro.



Giro alrededor del origen

Los vectores van respectivamente a $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) \end{pmatrix}$ y a $\begin{pmatrix} -\text{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz del giro de ángulo α es

$$G = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Transformaciones geométricas en \mathbb{R}^3

Algunas transformaciones en el espacio son:

- Proyecciones ortogonales sobre un plano π y una recta r .
- Simetrías respecto de un plano π y respecto de una recta r .
- Giros en el espacio.

Para cada una de ellas veremos cómo se construye su matriz asociada respecto de una base apropiada.

Producto Vectorial

Hemos visto que el método de Gram-Schmidt nos permite calcular bases ortogonales y ortonormales.

Vamos a introducir una segunda técnica, que es el producto vectorial.

El producto vectorial tiene múltiples aplicaciones, aunque aquí apenas vamos a utilizarlas. Únicamente vamos a usarlo para calcular vectores perpendiculares en \mathbb{R}^3 .

Sean $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ dos vectores de \mathbb{R}^3 . Llamaremos **producto vectorial** $u \times v$ al vector

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Producto Vectorial

Este vector se suele recordar fácilmente introduciendo tres símbolos, i , j , k y haciendo el determinante

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

Si en lugar de introducir los símbolos i , j , k , introducimos los valores x , y , z , la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

nos representa los vectores (x, y, z) que son linealmente dependientes con u y v , es decir, precisamente el plano generado por ellos.

El producto vectorial es una forma de conseguir un vector perpendicular a u y a v .

Proyección Ortogonal sobre un Plano

- Para definir una proyección, necesitamos conocer el plano sobre el que proyectamos.
- Todos los puntos del espacio irán a ese plano siguiendo una dirección constante, nosotros tomaremos la dirección perpendicular.
- Por ejemplo, en una habitación, proyectar sobre el suelo significa calcular donde irían todos los puntos de la habitación si se calleran al suelo.
- La proyección se puede hacer en cualquier plano, es como si hiciéramos una fotografía del espacio.

Proyección Ortogonal sobre un Plano

- Volvamos al ejemplo del suelo, imaginemos que el plano sobre el que proyectamos es nuestro suelo, que tenemos en coordenadas x e y .
- La altura nos viene dada por la coordenada z .
- Si quisiéramos proyectar en esta situación ideal, lo único que tenemos que hacer es llevar la coordenada z a 0 y quedarnos con las coordenadas x e y .
- Expresado en forma matricial, esta proyección tiene como matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proyección Ortogonal sobre un Plano

- Si no estamos en esa situación ideal y nuestro plano es otro, no tenemos más que hacer un cambio de base.
- Elegiremos los dos primeros vectores de la base en el plano, para que queden fijos y el tercero perpendicular, de forma que vaya al 0.
- Luego haremos un cambio de base, y despejaremos el valor de la proyección.
- Vamos a verlo con un ejemplo.

Ejemplo

Calcula la matriz de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre el espacio generado por $(-3, -1, 0)$, $(0, 0, -1)$ expresada en base canónica.

Siempre conviene poner los nombres a los vectores de forma que podamos recordar fácilmente qué es cada vector:

$$v_1 = (-3, -1, 0), \quad v_2 = (0, 0, -1)$$

El vector v_3 tiene que ser perpendicular a v_1 y v_2 para encontrarlo podemos calcular el producto vectorial de ambos

$$v_3 = v_1 \times v_2 = (1, -3, 0)$$

La base \mathcal{B} que hemos encontrado para expresar la proyección sencilla es

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En esta base, la matriz de la proyección es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $p_\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a la aplicación que estamos buscando, sabemos que en base \mathcal{B} tiene como matriz P . A través de la composición

$$\mathbb{R}^3_{(I_c)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(\mathcal{B})} \xrightarrow{p_\pi} \mathbb{R}^3_{(\mathcal{B})} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(I_c)}$$

la matriz de p_π respecto de la canónica será

$$\begin{aligned} BPB^{-1} &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-3}{10} & \frac{-1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{10} & \frac{-3}{10} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proyección Ortogonal sobre una Recta

- Al igual que la proyección ortogonal sobre un plano, se trata de buscar una base \mathcal{B} donde la matriz de dicha proyección sea muy sencilla.
- Elegimos el primer vector de la base en la recta para que quede fijo y los otros dos vectores perpendiculares a dicho vector (base del espacio ortogonal de dicha recta), de forma que vayan al 0.
- Expresado en forma matricial, esta proyección tiene como matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Seguidamente hacemos un cambio de base, y despejamos el valor de la proyección

Ejemplo

Calcula la matriz de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre la recta r generada por $(1, 0, -1)$ expresada en base canónica.

Tomamos como $v_1 = (1, 0, -1)$.

El espacio ortogonal de r es $x - z = 0$, cuya base es $(1, 0, 1), (0, 1, 0)$. Tomamos

$$v_2 = (1, 0, 1) \quad v_3 = (0, 1, 0)$$

Respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matriz de la proyección p_r es P .

Por la composición

$$\mathbb{R}_{(I_C)}^3 \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}_{(B)}^3 \xrightarrow{P_r} \mathbb{R}_{(B)}^3 \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}_{(I_C)}^3$$

la matriz de p_r respecto de la canónica será

$$\begin{aligned} BPB^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetría Ortogonal respecto de un Plano

- Una simetría es casi lo mismo que una proyección, lo que pasa es que en lugar de llevar los puntos al plano, cada punto lo llevamos a su opuesto en relación al plano.
- Con el mismo ejemplo del suelo, es como si los puntos que están sobre el suelo los llevásemos a su misma posición pero en la dirección del piso de abajo, y los de abajo los llevásemos arriba, dejando fijos los puntos del plano.
- Dicho de otra forma, cambiamos el signo de la coordenada z .
- Expresado en forma matricial,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Simetría Ortogonal respecto de un Plano

- Si nos dan un plano general, lo que tenemos que hacer como en el otro caso es un cambio de base.
- Dos vectores sobre el plano, que quedan fijos y un tercero perpendicular que cambia de signo.
- Los pasos son casi idénticos que en el caso de la proyección.

Ejemplo

Calcula la matriz de la simetría ortogonal de \mathbb{R}^3 respecto al espacio generado por $(2, 0, -1)$, $(-3, -1, 0)$ expresada en base canónica.

Ponemos nombres a los vectores

$$v_1 = (2, 0, -1), \quad v_2 = (-3, -1, 0)$$

El vector v_3 tiene que ser perpendicular a v_1 y v_2 para encontrarlo podemos calcular el producto vectorial de ambos

$$v_3 = v_1 \times v_2 = (-1, 3, -2)$$

La base \mathcal{B} que hemos encontrado para expresar la proyección sencilla es

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En esta base, la matriz de la simetría es

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos $s_\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a la aplicación que estamos buscando, sabemos que en base \mathcal{B} tiene como matriz S . A través de la composición

$$\mathbb{R}^3_{(I_c)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(\mathcal{B})} \xrightarrow{s_\pi} \mathbb{R}^3_{(\mathcal{B})} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(I_c)}$$

la matriz de s_π respecto de la canónica será

$$\begin{aligned} BSB^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-3}{14} & \frac{-5}{14} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetría Ortogonal respecto de una Recta

- Al igual que la simetría ortogonal respecto de un plano, se trata de buscar una base \mathcal{B} donde la matriz de dicha simetría sea muy sencilla.
- Elegimos el primer vector de la base en la recta para que quede fijo y los otros dos vectores perpendiculares a dicho vector (base del espacio ortogonal de dicha recta), de forma que cambien de signo.
- Expresado en forma matricial, esta proyección tiene como matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Seguidamente hacemos un cambio de base, y despejamos el valor de la simetría.

Ejemplo

Calcula la matriz de la simetría ortogonal de \mathbb{R}^3 sobre la recta r generada por $(1, 0, -1)$ expresada en base canónica.

Tomamos como $v_1 = (1, 0, -1)$.

El espacio ortogonal de r es $x - z = 0$, cuya base es $(1, 0, 1), (0, 1, 0)$. Tomamos

$$v_2 = (1, 0, 1) \quad v_3 = (0, 1, 0)$$

Respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matriz de la proyección s_r es S .

Por la composición

$$\mathbb{R}_{(I_C)}^3 \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}_{(B)}^3 \xrightarrow{s_r} \mathbb{R}_{(B)}^3 \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}_{(I_C)}^3$$

la matriz de s_r respecto de la canónica será

$$\begin{aligned} BSB^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Giros en el Espacio

- Para definir un giro en el espacio tridimensional, necesitamos determinar el eje de giro.
- O lo que es lo mismo, el plano en el que estamos girando.
- Cuando un punto, que nos está en el eje de giro, da una vuelta completa, describe una circunferencia en el espacio, esta circunferencia está contenida en un plano.
- Ese plano es precisamente el plano perpendicular al eje.
- Del mismo modo, si nos dan el plano, podemos calcular fácilmente el eje de giro, puesto que es la recta perpendicular al plano, es decir, su ortogonal.

- Ya sabemos cómo es el giro de los vectores del plano \mathbb{R}^2 .
- Para hacer un giro en el espacio, lo que tenemos que hacer es descomponer el problema en dos partes, una en la dirección del eje de giro y otra en la dirección del plano perpendicular.
- En la dirección del eje de giro los vectores quedan fijos.
- En la dirección marcada por el plano perpendicular, los vectores se comportan exactamente igual que en \mathbb{R}^2 .

Matriz de Giro 3D

Si \mathcal{B} es una base ortonormal del espacio que tiene los dos primeros vectores en el plano de giro y el tercer vector en el eje, con respecto a esa base, la matriz del giro es:

$$G = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo α el ángulo que giramos.

El problema consiste en encontrar la base adecuada, y hacer el cambio de base para expresar la matriz en la base canónica, utilizando la composición:

$$\mathbb{R}^3_{(I_c)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(B)} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3_{(B)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(I_c)}$$

Por lo tanto el giro g tendrá como matriz BGB^{-1} donde B y G son las que hemos definido.

Ejemplo I

Calcula la matriz del giro de ángulo α de los vectores de \mathbb{R}^3 dentro del plano generado por $(1, -6, -2)$, $(-2, -1, 0)$ expresada en base canónica.

Pondemos nombres a los vectores

$$v_1 = (1, -6, -2), \quad v_2 = (-2, -1, 0)$$

Van a ser los vectores del plano en el que se produce el giro.

El vector v_3 tiene que ser perpendicular a v_1 y v_2 para encontrarlo podemos calcular el producto vectorial de ambos

$$v_3 = v_1 \times v_2 = (-1, 3, -2)$$

- Los vectores del plano v_1 y v_2 tienen que ser perpendiculares a v_3 , lo cual hemos conseguido ya, pero también tienen que ser perpendiculares entre ellos.
- Podríamos haber obtenido una base ortonormal del plano y luego haber calculado el vector v_3 , es una forma estándar de hacerlo, pero el producto vectorial de \mathbb{R}^3 nos puede simplificar mucho el problema.
- Podemos cambiar v_2 por un vector que sea perpendicular a v_3 y a v_1 , que estará en el plano por ser perpendicular a v_3 y linealmente independiente con v_1 por ser perpendicular a v_1 .
- Ese vector puede ser $v_3 \times v_1$, y nos ahorramos un cálculo de Gram-Schmidt.
- Una vez que tenemos los vectores, tenemos que hacerlos de módulo 1.

Para hacerlos de módulo 1, los dividimos por su norma:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{v_3 \times v_1}{\|v_3 \times v_1\|} = \frac{1}{3\sqrt{861}} \begin{pmatrix} -86 \\ -17 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{21}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

La base que hemos encontrado es:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{41}\sqrt{41} & -\frac{6}{41}\sqrt{41} & -\frac{2}{41}\sqrt{41} \\ -\frac{861}{2583}\sqrt{861} & -\frac{17}{2583}\sqrt{861} & \frac{8}{2583}\sqrt{861} \\ -\frac{2}{63}\sqrt{21} & \frac{4}{63}\sqrt{861} & -\frac{13}{63}\sqrt{21} \end{pmatrix}.$$

y en esa base, el giro tiene matriz

$$G = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Planteamos la composición del cambio de base

$$\mathbb{R}^3_{(I_c)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(B)} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3_{(B)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(I_c)}$$

y despejamos

$$BGB^{-1} = BGB^T = B \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^T$$

- Hay un pequeño detalle que hemos pasado por alto, y es la orientación del espacio.
- Al elegir la base, tenemos una base en el plano y un tercer vector perpendicular.
- Pero ese vector podría ir en cualquiera de los dos sentidos.
- Qué pasaría si cambiamos el vector del eje por su opuesto?.
- Pues todo sería exactamente igual, salvo que el giro lo haríamos en sentido contrario.
- Es decir, haríamos un giro de ángulo $-\alpha$.

- Pero parece que entonces no queda totalmente definido hacia donde hay que girar, depende de cómo estemos situados sobre el plano, los de abajo verían el problema en el sentido contrario.
- Eso es lo que se llama orientación del espacio tridimensional.
- Con las bases ortonormales, los cambios de base tienen determinante 1 o $\hat{=}$ 1, si tienen determinante 1 entonces decimos que se respeta la orientación del espacio, si no, diremos que se cambia. Por ejemplo, si uno de los vectores cambia de sentido, cambia la orientación.
- En el ejercicio, si se comprueba, hemos mantenido la orientación del espacio, el determinante de B es 1.
- Eso es porque para calcular el nuevo segundo vector hemos hecho $v_3 \times v_1$. Si hubiéramos hecho $v_1 \times v_3$ hubiéramos obtenido el vector en sentido contrario, que el que nos cambia la orientación del espacio.

Ejemplo II

Hallar el giro de ángulo α sobre la recta generada por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Tomamos el vector de la recta $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Escogemos otro vector ortogonal a

él, por ejemplo $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. El tercer vector v_3 tiene que ser perpendicular a los

dos anteriores, hacemos el producto vectorial:

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalizamos los vectores y obtenemos la base ortonormal $B = \{w_1, w_2, w_3\}$:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz del giro es

$$B^{-1}g_{\alpha,r}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Para obtener el giro respecto de la base canónica, resolvemos el diagrama:

$$\mathbb{R}^3_{(I_c)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(B)} \xrightarrow{g_{\alpha,r}} \mathbb{R}^3_{(B)} \xrightarrow{I_d} \mathbb{R}^3_{(I_c)}$$

lo que nos da el producto de matrices,

$$BGB^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(en donde usamos que $B^{-1} = B^T$)

Aproximación por Mínimos Cuadrados

- Nosotros solemos trabajar con ecuaciones del tipo

$$4x - 3y + z = 2.$$

- Esto no es lo normal en ciencias experimentales.
- Lo normal es tener ecuaciones del tipo:

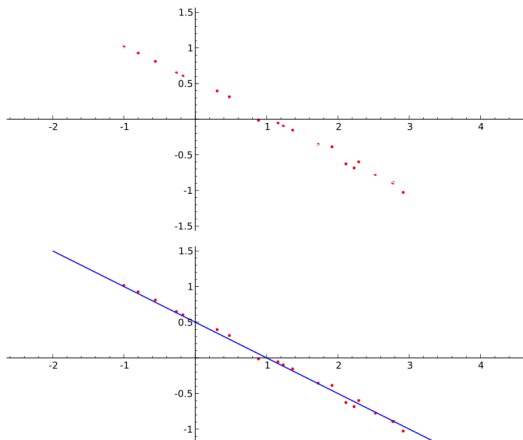
$$0.1082046019x + 0.07255193737y + 0.11278805943z = -0.7803480490$$

- Y no solo eso, sino que habitualmente tenemos muchas, muchísimas, tantas como experimentos hemos hecho.

- Puesto que tenemos muchas más ecuaciones que incógnitas, el sistema tiene muchas probabilidades de ser incompatible.
- De hecho, lo normal es que pequeñas perturbaciones a la hora de obtener los datos, nos den errores que hagan las ecuaciones teóricamente incompatibles.
- Pero nosotros sabemos que el sistema tiene una solución, y que el problema es que hay un error en los datos.
- Lo que hacemos para resolverlo es buscar un sistema que sí tenga solución (compatible) y que sea muy cercano al sistema original, de hecho vamos a calcular el sistema compatible que mejor se aproxima a nuestro sistema.

- El método consiste en lo siguiente, si tenemos un sistema de ecuaciones en forma matricial $AX = B$.
- Multiplicamos los dos miembros de la igualdad por la transpuesta de la matriz de los coeficientes, y obtenemos el sistema de ecuaciones $A^T AX = A^T B$.
- La solución de este sistema es la que buscamos, puesto que este sistema es el que mejor se aproxima a nuestro sistema original.

- Un ejemplo muy conocido de aplicación de este sistema son las **rectas de regresión**.
- Tenemos una nube de puntos, que deberían estar en una recta, pero que no lo están.
- Lo que tenemos que hacer es ajustar la nube de puntos por su recta de regresión.



- La forma de hacerlo es la siguiente. Buscamos una recta del tipo $y = ax + b$, y cada punto de la nube de puntos nos plantea una ecuación $y_i = ax_i + b$, donde las incógnitas son a y b .
- Todos los puntos plantean un sistema incompatible (si no están perfectamente alineados). Lo que haremos es calcular el sistema que mejor se aproxima al nuestro mediante la fórmula anterior.

Las ecuaciones de los puntos nos proporcionan el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Tenemos que multiplicar por la transpuesta de la matriz de los coeficientes, que es

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Que nos deja el sistema:

$$\begin{pmatrix} \|x\|^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, y \rangle \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Dados los puntos $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 8)$, $(5, 9)$, calcular la mejor curva de la forma $y = ax^2 + bx$ que se aproxime a los puntos dados.

Se trata de encontrar la mejor solución al sistema

$$\begin{aligned}a + b &= 1 \\4a + 2b &= 3 \\9a + 3b &= 5 \\16a + 4b &= 8 \\25a + 5b &= 9\end{aligned}$$

La mejor aproximación es la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ 16 & 4 \\ 25 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Una vez realizadas las operaciones,

$$\begin{pmatrix} 979 & 225 \\ 225 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 411 \\ 99 \end{pmatrix}$$

Cuya solución es: $a = \frac{33}{322}$, $b = \frac{2223}{1610}$.