1.3. Teoría local de curvas planas

1.3.1. Diedro de Frenet. Curvatura

Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva diferenciable parametrizada por la longitud del arco, el vector tangente $\alpha'(s)$ es unitario. A dicho vector tangente, a partir de ahora, lo representaremos como $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$.

Observación 1.3.1. -

- La aplicación $\mathbf{t} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable con $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$.
- Existen únicamente dos vectores unitarios perpendiculares a $\mathbf{t}(s)$ Uno de ellos se corresponde

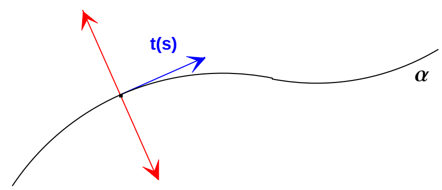

Figura 1.11: Hay dos vectores unitarios perpendiculares a $\mathbf{t}(s)$.

con el giro (de 90^o) en el sentido de las agujas del reloj y el otro en el sentido contrario. Ambos vienen dados por una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.3.2 (Vector normal unitario). *Llamaremos vector normal unitario a la curva α en s (o en el punto $\alpha(s)$), al vector $\mathbf{n}(s) = J\,\mathbf{t}(s)$, donde $J : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es el giro de 90^o en sentido contrario a las agujas del reloj.*

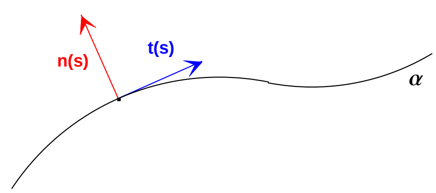

Figura 1.12: Vector normal unitario

Observación 1.3.3. -

- *Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, entonces $\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s))$; y por tanto, $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$.*
- *La recta normal a la curva α en el punto $\alpha(s)$ es la que pasa por dicho punto y tiene como vector director a $\mathbf{n}(s)$.*

Propiedades.- Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{n} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación diferenciable.

2. $\mathbf{n}(s)$ es un vector unitario.
3. $\langle t(s), n(s)\rangle = 0$.
4. $\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)) = \begin{vmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{vmatrix} = 1$.
5. Los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, para cada $s \in I$.

Definición 1.3.4 (**Diedro de Frenet**). *La base* $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ *se llama diedro (orientado) de Frenet.*

El estudio del comportamiento local de una curva lleva consigo conocer como se va "curvando" o "doblando" dicha curva en cada punto. Utilizaremos el diedro de Frenet, observando cómo cambia, para obtener una idea clara sobre este aspecto.

Proposición 1.3.5. *Sea* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una curva diferenciable parametrizada por la longitud del arco regular. Para cada* $s \in I$, *el vector* $\mathbf{t}'(s)$ *está en la dirección de* $\mathbf{n}(s)$, *es decir*

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s), \quad \textit{para cada} \quad s \in I.$$

Además:

(a) $k(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s)\rangle$.

(b) $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como en el apartado anterior, es una función diferenciable.*

(c) $\mathbf{n}'(s) = -k(s)\,\mathbf{t}(s)$.

Demostración. Para cada $s \in I$, se verifica $\|\,\mathbf{t}(s)\|^2 = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 1$; si derivamos,

$$\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s)\rangle = 0,$$

lo que significa que $\mathbf{t}'(s)$ es ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ y por tanto proporcional a $\mathbf{n}(s)$. Por tanto, para cada $s \in I$ existe, un número real $k(s)$ de manera que se cumple $\mathbf{t}'(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s)$.

Para obtener el apartado (a), tengamos en cuenta que $\|\,\mathbf{n}(s)\|^2 = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle = 1$; si hacemos el producto escalar de $\mathbf{t}'(s)$ y $\mathbf{n}(s)$; entonces

$$\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = \langle k(s)\,\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle = k(s)$$

Por otro lado, como $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ son ortogonales, $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\rangle = 0$. Si ahora derivamos esta expresión, obtenemos que

$$\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s)\rangle = 0$$

lo que significa que

$$k(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s)\rangle. \tag{1.3}$$

La afirmación de (b), está clara a teniendo en cuenta el apartado (a).

Por último, obtengamos la igualdad (c). $\mathbf{n}(s)$ es unitario, luego, $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s)\rangle = 1$ y derivando, obtenemos $\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = 0$, lo que significa que $\mathbf{n}'(s)$ es perpendicular a $\mathbf{n}(s)$ y por tanto, proporcional a $\mathbf{t}(s)$, es decir $\mathbf{n}'(s) = h(s)\,\mathbf{t}(s)$, con $h(s)$ número real para cada $s \in I$. Sustituyendo en la igualdad (1.3).

$$k(s) = -\langle \mathbf{t}(s), h(s)\,\mathbf{t}(s)\rangle = -h(s)$$

lo que implica que $\mathbf{n}'(s) = -k(s)\,\mathbf{t}(s)$ $\square$

Definición 1.3.6 (Curvatura). *A la función $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se le llama curvatura de la curva plana α. Observemos que la curvatura también se puede expresar como*

$$k(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle.$$

Si $k(s) \neq 0$, se llama radio de curvatura de la curva α a $1/k(s)$.

Definición 1.3.7 (Fórmulas de Frenet). *A las igualdades*

$$\mathbf{t}'(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s) \quad y \quad \mathbf{n}'(s) = -k(s)\,\mathbf{t}(s)$$

se les llama fórmulas de Frenet o ecuaciones de Frenet.

Siguiendo con la denominación heredada de la Física, llamamos vector aceleración al vector $\alpha''(s) = \mathbf{t}'(s)$, . Observemos que, en esta terminología, como la velocidad es constante $\|\alpha'(s)\| = \|\,\mathbf{t}(s)\| = 1$, no hay aceleración tangencial, únicamente hay aceleración centrípeta o normal; por otro lado, según las fórmulas de Frenet,

$$\alpha''(s) = \mathbf{t}'(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s), \quad \text{es decir,} \quad \|\alpha''(s)\| = |k(s)|.$$

Esto significa que $|k(s)|$ determina el valor de la aceleración centrípeta y, por tanto, determina el cambio de dirección de la curva. Esto justifica, de alguna manera, que $k(s)$ reciba el nombre de curvatura. Así, dado que $\mathbf{n}(s)$ era el resultado de un giro de 90^o del vector $\mathbf{t}(s)$ en sentido contrario a las agujas del reloj, si $k(s) > 0$ la curva gira en esta última dirección, y si $k(s) < 0$, lo hace en sentido contrario; según el sentido en que "recorremos" la curva.

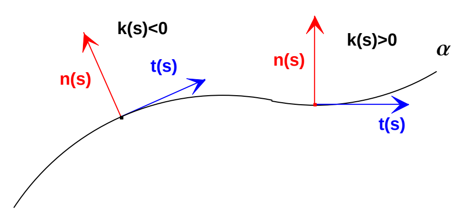

Figura 1.13: Curvatura

Observación 1.3.8. *Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, entonces, $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ y $\mathbf{t}'(s) = (x''(s), y''(s))$; entonces*

$$k(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x''(s) & y''(s) \end{vmatrix} = \det(\mathbf{n}(s), \mathbf{t}'(s))$$

Ejercicios 1.3.9. -

14. Calcule las curvaturas de una una recta y de una circunferencia, parametrizadas por la longitud del arco.

15. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana regular parametrizada por la longitud de arco s, y sea $Mx = Ax + b$, $M : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, un movimiento rígido. Si representamos por β la curva $M \circ \alpha$, demuestre que β también está parametrizada por la longitud de arco y que su curvatura $k_\beta(s) = \pm k_\alpha(s) = (\det A)k_\alpha(s)$, para todo $s \in I$.

16. Sean $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dos curvas planas, regulares, parametrizadas por la longitud de arco s, tales que $k_\alpha(s) = -k_\beta(s)$ para todo $s \in I$. Demuestre que existe un movimiento rígido inverso $M : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.

17. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular parametrizada por la longitud de arco s. Pruebe que α es un segmento de recta o un arco de circunferencia si, y sólo si, su curvatura k es constante.

18. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por la longitud del arco. Supongamos que existe una función $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, de forma que el ángulo que forma la recta tangente a α para cada $s \in I$, con una dirección fija v, es precisamente $\theta(s)$. Demuestre que, entonces, $\theta'(s) = \pm k(s)$.

Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva plana, que no está parametrizada por la longitud del arco, sabemos que se puede reparametrizar por el arco, de tal manera que existe $g : J \longrightarrow I$ difeomorfismo tal que la curva $\beta = \alpha \circ g$ tiene la misma traza que α y, además, está parametrizada por la longitud del arco.

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & I \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Figura 1.14: Curva reparametrizada por el arco

Definición 1.3.10. *Definimos la curvatura de una curva α, no necesariamente parametrizada por la longitud del arco, como $k_\alpha(t) = k_\beta(g(s))$, donde β es la reparametrización de α por la longitud del arco, k_β es su curvatura y g es el cambio de parámetro correspondiente. Así, la curvatura no depende de la parametrización y, por tanto es una propiedad de la traza (geométrica).*

Proposición 1.3.11. *Si $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva parametrizada diferenciable regular (no necesariamente por la longitud del arco). Entonces*

$$k_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Demostración. Sea $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la reparametrización de α por la longitud del arco y $g : J \longrightarrow I$ el cambio de parámetro. Por la proposición 1.3.5, tenemos que $k_\beta(s) = \langle \mathbf{t}'_\beta(s), \mathbf{n}_\beta(s) \rangle$. Por otro lado tenemos

$$\mathbf{t}_\beta(s) = \beta'(s) = \alpha'(g(s))g'(s);$$

y por tanto,

$$\mathbf{t}'_\beta(s) = \alpha''(g(s))(g'(s))^2 + \alpha'(g(s))g''(s) = \alpha''(t)(g'(s))^2 + \alpha'(t))g''(s).$$

Además $\mathbf{n}_\beta = Jt_\beta(s) = J\alpha'(g(s)g'(s) = J\alpha'(t)g'(s)$. Entonces volviendo a la fórmula del principio,

$$k_\beta(s) = \langle \alpha''(t)(g'(s))^2 + \alpha'(t))g''(s), J\alpha'(t)g'(s) \rangle =$$
$$\langle \alpha''(t)(g'(s))^2, J\alpha'(t)g'(s) \rangle + \langle \alpha'(t))g''(s), J\alpha'(t)g'(s) \rangle =$$
$$(g'(s))^3 \langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle$$

puesto que $\langle \alpha'(t)), J\alpha'(t) \rangle = 0$. Para terminar sólo hay que tener en cuenta que

$$g'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(g(s))\|} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}.$$

$\square$

Ejercicios 1.3.12. -

19. Halle la curvatura de la cicloide en el punto de mayor ordenada de un arco.
20. Halle el punto de mayor curvatura de la curva $\alpha(t) = (t, \ln t)$.

El siguiente teorema muestra cómo la curvatura caracteriza la traza de una curva plana.

Teorema 1.3.13 (Fundamental de la teoría local de curvas planas). *Sea $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable , con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Entonces, existe una curva plana $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por la longitud del arco , de manera que la curvatura de α, es, precisamente $k_\alpha(s) = k(s)$, para cada $s \in I$. Además, la curva α es única, salvo movimientos rígidos.*

Demostración. Vamos a apoyarnos en el ejercicio 18 de la página 13. Para ello definimos una función que haga el papel del ángulo señalado en dicho ejercicio: $\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se define como

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)du, \quad \text{con} \quad s_0 \in I, \text{ arbitrario .}$$

Está claro que θ es una función diferenciable que verifica $\theta'(s) = k(s)$. Entonces $\theta(s)$ debe ser el ángulo que forma la curva α que buscamos, con una dirección fija; lo que significa que debe ocurrir que $\alpha'(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$. Por tanto definimos la curva α como

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_1}^{s} \cos\theta(u)du, \int_{s_1}^{s} \operatorname{sen}\theta(u)du \right)$$

con $s_1 \in I$ cualquiera. Esta aplicación es claramente diferenciable y cumple $\|\alpha'(t)\| = 1$, por tanto se trata de una curva parametrizada por la longitud del arco. Veamos que su curvatura $k_\alpha(s)$, coincide con $k(s)$.

Su diedro de Frenet es

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s)) \quad \text{y} \quad \mathbf{n}(s) = J\alpha'(s) = (-\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s))$$

y por tanto

$$\mathbf{t}'(s) = (-\theta'(s)\operatorname{sen}\theta(s), \theta(s)\cos\theta(s)) = \theta'(s)(\operatorname{sen}\theta(s), \cos\theta(s))$$

Por fin, calculemos la curvatura

$$k_\alpha(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \theta'(s) = k(s),$$

con lo que hemos encontrado la curva buscada.

Veamos ahora que dicha curva es única, salvo movimientos rígidos. Supongamos, entonces que existe otra curva $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por la longitud del arco tal que, su curvatura es $k_\beta(s) = k(s)$, y veamos que hay un movimiento rígido $Mx = Ax + b$ tal que $\beta = M\alpha$.

Tomemos $s_0 \in I$ fijo. Los diedros de Frenet, de α y β en s_0 son

$$\{\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0)\}\}) \quad \text{y} \quad \{\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0)\}\}),$$

que constituyen, dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^2$, positivamente orientadas, existe una única transformación ortogonal, a saber, una rotación, $A \in SO(2)$, que lleva una base a otra

$$A\,\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0) \quad \text{y} \quad A\,\mathbf{n}_\alpha(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0)$$

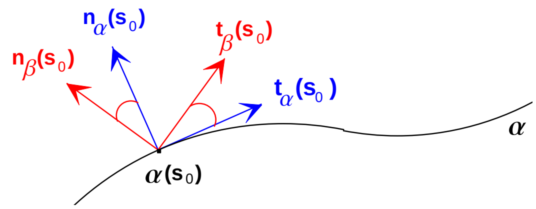

Figura 1.15: Un giro transforma una base en otra.

A partir de A vamos a encontrar el movimiento M; para ello tomamos el giro anterior A y $b = \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$; y definimos $Mx = Ax + b$. Vamos a ver que la curva $\gamma = M\alpha$ coincide con β.

En primer lugar tenemos que

$$\gamma(s_0) = A\alpha(s_0) + b = A\alpha(s_0) + \beta(s_0) - A\alpha(s_0) = \beta(s_0)$$

Los diedros de Frenet en s_0, también coinciden

$$\mathbf{t}_\gamma(s_0) = (M\alpha)'(s_0) = (A\alpha)'(s_0) = A\alpha'(s_0) = A\,\mathbf{t}_\alpha(s_0) = \mathbf{t}_\beta(s_0)$$

y de la misma forma

$$\mathbf{n}_\gamma(s_0) = \mathbf{n}_\beta(s_0)$$

Además

$$k_\gamma(s) = \langle \mathbf{t}'_\gamma(s), \mathbf{n}_\gamma(s)\rangle = \langle \gamma''(s), J\gamma'(s)\rangle = \langle A\alpha''(s), J(A\alpha')(s)\rangle =$$
$$\langle A\alpha''(s), A(J\alpha')(s)\rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s)\rangle = k_\alpha(s) = k(s)$$

Definimos ahora la función

$$f(s) = \frac{1}{2}\|\,\mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\|^2$$

y veamos que es idénticamente nula. Observemos que $f(s_0) = 0$. Además la función la podemos expresar como producto escalar

$$f(s) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\rangle$$

y si derivamos

$$f'(s) = \langle \mathbf{t}'_\beta(s) - \mathbf{t}'_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\rangle$$

que mediante las expresiones obtenidas en la proposición 1.3.5, es

$$f'(s) = \langle k_\beta(s)\,\mathbf{n}_\beta(s) - k_\gamma(s)\,\mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\rangle$$

operando, llegamos a que

$$f'(s) = -k(s)\left(\langle \mathbf{n}_\beta(s), \mathbf{t}_\gamma(s)\rangle + \langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s)\rangle\right)$$

Por otro lado observemos que

$$\langle \mathbf{n}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s)\rangle = \langle J\,\mathbf{t}_\gamma(s), \mathbf{t}_\beta(s)\rangle = -\langle \mathbf{t}_\gamma(s), J\,\mathbf{t}_\beta(s)\rangle = -\langle \mathbf{t}_\gamma(s), \mathbf{n}_\beta(s)\rangle$$

con lo que sustituyendo en la expresión anterior de $f'(s)$, obtenemos que $f'(s) \equiv 0$. por tanto $f(s)$ es una función constante, pero como $f(s_0) = 0$ concluimos que la función f es idénticamente nula.

Esto significa que $\mathbf{t}_\beta(s) = \mathbf{t}_\gamma(s)$, es decir $\beta'(s) = \gamma'(s)$, para todo $s \in I$; y entonces $0 = \beta'(s) - \gamma'(s) = (\beta(s) - \gamma(s))'$. Esto último implica que $\beta(s) - \gamma(s)$ es constante; pero sabemos que $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$, lo que permite concluir que las β y γ coinciden. $\square$

Ejercicios 1.3.14. -

21. Determine la curva cuya curvatura es $k(s) = \dfrac{1}{as+b}$, con $s > 0$, $a > 0$.

22. Calcule los vectores tangente, normal y la curvatura de una cicloide, en los puntos en los que sea posible.

23. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Demuestre que la curva $\alpha(t) = (t, f(t))$ tiene en $t = t_0$ curvatura cero si, y sólo si, f tiene en t_0 un punto de inflexión.

24. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular parametrizada por la longitud de arco.

    a) Demuestre que α es un segmento de recta si, y sólo si, todas sus rectas tangentes son paralelas.

    b) Demuestre que α es un arco de circunferencia si, y sólo si, todas sus rectas normales pasan por un punto común.

25. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular parametrizada por la longitud de arco s. Supongamos que existe $s_0 \in I$ tal que $\|\alpha(s)\| \leq \|\alpha(s_0)\|$ para todo $s \in I$. Demuestre que $\|\alpha(s_0)\| > 0$ y que $|k(s_0)| \geq 1/\|\alpha(s_0)\|$.

26. Viajamos por el plano partiendo del origen (0,0). Y lo hacemos siguiendo la traza de la curva $\alpha : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (parametrizada por la longitud del arco), que cumple:

    $$\alpha(0) = (0,0); \quad \alpha'(0) = (1,0); \text{la curvatura es} \quad k(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \text{para cada} \quad s \in [0,1).$$

    Tras recorrer una unidad de longitud ($s = 1$) (por ejemplo metros), abandonamos la curva para seguir la dirección de la tangente a la curva en el punto de escape. Recorremos así otros 3 metros. ¿A qué distancia (en metros) del punto original $(0,0)$ nos encontraremos?

    (¡Atención!, la curva sólo está definida para $0 \leq s < 1$, así que el "punto" $\alpha(1)$ y el "vector tangente" $\alpha'(1)$ hay que entenderlos en el sentido del límite $s \longrightarrow 1^-$.)

27. Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por el arco. Pruebe que todas las rectas normales a α equidistan de un punto si, y sólo si, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

    $$k(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{as+b}} \quad \text{para todo} \quad s \in I.$$

28. (**Evoluta**). Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por la longitud del arco y $s_0 \in I$, con $k(s_0) > 0$. Consideremos $a_\lambda = \alpha(s_0) + \lambda\,\mathbf{n}(s_0)$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, un punto sobre la recta normal a α en s_0. Definimos la función $f_\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como

    $$f_\lambda(s) = \|\alpha(s) - a_\lambda\|^2$$

    que mide la distancia al cuadrado, de los puntos de la curva al punto a_λ. Demuestre:

    a) $f_\lambda(s_0) = \lambda^2$, $f'_\lambda(s_0) = 0$ y $f''_\lambda(s_0) = 2(1 - \lambda k(s_0))$.

    b) Si $\lambda < \frac{1}{k(s_0)}$, existe un entorno U de s_0 en I, tal que $\alpha(U)$ está fuera de la circunferencia de centro a_λ y radio $|\lambda|$.

    c) Si $\lambda > \frac{1}{k(s_0)}$, existe un entorno U de s_0 en I, tal que $\alpha(U)$ está dentro de la circunferencia de centro a_λ y radio $|\lambda|$.

Observemos que la circunferencia de centro $a_{\frac{1}{k(s_0)}} = \alpha(s_0) + \dfrac{1}{k(s_0)}\,\mathbf{n}(s_0)$ y radio $\dfrac{1}{k(s_0)}$, es la que mejor aproxima a la curva en un entorno de s_0. A dicha circunferencia se le llama *circunferencia osculatriz* de α, a su radio, *radio de curvatura* y a su centro, *centro de curvatura*. A la curva formada por todos los centros de curvatura de α,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}\,\mathbf{n}(s), \quad \text{suponiendo} \quad k(s) > 0,$$

se llama *evoluta* de α. Por último, si β es la evoluta de una curva plana regular α, se dice que α es la involuta de β.

a) Demuestre que la evoluta de α es la única curva de la forma

$$\beta(t) = \alpha(t) + f(t)\,\mathbf{n}(t)$$

donde $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, tal que la recta normal a α coincide con la recta tangente a β, para cada $t \in I$.

b) Si la curvatura de α es positiva no decreciente y $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es su evoluta. Demuestre que

$$L_a^s(\beta) = \frac{1}{k(a)} - \frac{1}{k(s)},$$

para $a \in I$ arbitrario y $s \in I$, $s \geq a$.

c) Demuestre que la evoluta de una curva regular es regular si, y sólo si, $k'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.