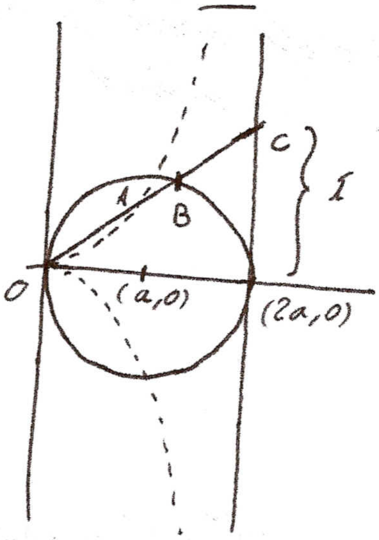
CISOIDE DE DIOCLES (1.1.5) EJERCICIO 1



Queremos buscar la curva generada para A, B, C por:

$$\vec{OC} - \vec{OB}$$

Si consideramos como parámetro t la distancia entre $(2a,0)$ y C tendríamos que $C=(2a,t)$ y podríamos calcular el punto B como la intersección de la recta que pasa por O y C y la circunferencia de radio a y centro $(a,0)$.

Ecuación de la recta que pasa por O, C:

Sabemos que una recta tiene por ecuación $y=mx+n$. Como sabemos que $(0,0)$ y $(2a,t)$ son dos puntos de dicha recta podemos calcular m y n fácilmente con el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0 = m\cdot 0 + n & \Rightarrow n=0 \\ t = m\cdot 2a & \Rightarrow m = t/2a \end{cases}$$

por lo que la recta buscada tiene por ecuación:

$$y = \frac{t}{2a}x$$

Ecuación de la circunferencia:

Sabemos que $(x-a)^2+y^2=a^2$ define a la circunferencia de centro $(a,0)$ y radio a.

Intersección:

Si fijamos t la intersección de la circunferencia y la recta viene dada por (x_t, y_t) con (x_t, y_t) cumpliendo

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y_t = \dfrac{t}{2a} x_t \\ (2) & (x_t - a)^2 + y_t^2 = a^2 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo (1) en (2) se tiene que:

$$a^2 = (x_t - a)^2 + y_t^2 = x_t^2 + a^2 - 2a x_t + \frac{t^2}{4a^2} x_t^2 = \left(1 + \frac{t^2}{4a^2}\right) x_t^2 - 2a x_t + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4a^2 + t^2}{4a^2} x_t - 2a\right) x_t = 0$$

Las soluciones son $O = (0,0)$ y el punto $B = \left(\dfrac{8a^3}{4a^2 + t^2}, \dfrac{4a^2 t}{4a^2 + t^2}\right)$

Por tanto conocemos B y C y estamos en disposición de definir la curva.

Recordemos que $\vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OB}$ por tanto:

$$\alpha(t) = \left(2a - \frac{8a^3}{4a^2 + t^2}, t - \frac{4a^2 t}{4a^2 + t^2}\right)$$

que es derivable en $t \in \mathbb{R}$ y en $t = 0$ se tiene que

$\alpha(0) = (0,0)$. (Recordemos que $a \neq 0$)

Obsérvese que como $\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = (2a, \infty)$ se tiene que la función tiene una asíntota vertical en $x = 2a$ como ya se pudo intuir gráficamente.

Jose Iván Galván Fernández