Ana Belén Hernández García

GEOMETRÍA DIFERENCIAL.

5º) Curva de Gergome.

Intersección de $\begin{cases} x^2+(z-1)^2=1 \\ y^2+z^2=1 \end{cases}$. Demuestre que

$\alpha(t)=(\sqrt{2\cos t-\cos^2 t}, \operatorname{sen} t, \cos t)$ es una parametrización parcial de la curva de Gergome. Encuentre otra parametrización que contenga al $(0,1,0)$.

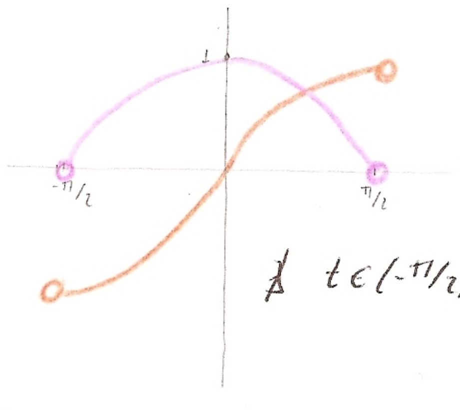
- Para ver que α es una parametrización de la intersección de los dos cilindros simplemente tomamos un punto genérico de α y comprobamos que verifica las ecuaciones de los dos cilindros:

$\cdot\ 2\cos t-\cos^2 t+(\cos t-1)^2=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos t-\cos^2 t+\cos^2 t+1-2\cos t=1$ ok

$\cdot\ \operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t=1$ ok.

- Pero es una parametrización parcial. Para ello, observemos que el punto $(0,1,0)$ está en la intersección de los dos cilindros pero no existe $t\in(-\pi/2,\pi/2)$ tal que $\alpha(t)=(0,1,0)$. Estudiando la gráfica de seno y coseno entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ comprobamos que en ninguno de esos puntos se cumple que $\operatorname{sen} t=1$ y $\cos t=0$.



Por tanto, α no es una parametrización total de la curva de Gergome.

$\nexists\ t\in(-\pi/2,\pi/2)\ /\ \alpha(t)=(0,1,0)$.

• Veamos que la traza de α sí contiene al punto $(1,0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} t = 0 \\ \cos t = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 0 \qquad \sqrt{2\cos 0 - \cos^2 0} = 1 \qquad \underline{OK}$$

• Otra parametrización:

$x^2 + (z-1)^2 = 1$

$y^2 + z^2 = 1 \leftarrow$ Están en la relación del seno y coseno

Hago $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen} t$

Entonces

$x^2 = 1 - (z-1)^2 \Rightarrow x^2 = 1 - z^2 - 1 + 2z$

$x = \sqrt{2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t}$

$t \in (-\pi/2, \pi/2)$

Entonces $\beta(t) = (\sqrt{2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t}, \cos t, \operatorname{sen} t)$ es otra parametrización parcial de la curva de Gergonne que contiene al punto $(0,-1,0)$.