UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Óptica y Optometría
Resúmenes
Curso 2008-2009

Cálculo Integral

Primitiva de una función.

Se dice que una función $F(x)$ es primitiva de otra función $f(x)$ si verifica que $F'(x) = f(x)$. Es evidente que una función no tiene una única primitiva, ya que si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, también lo es la función $G(x) = F(x) + C$, para cualquier constante $C \in \mathbb{R}$, puesto que $f(x) = F'(x) = G'(x)$. Es fácil comprobar que dos primitivas de una misma función se diferencian en una constante.
Se denomina integral de una función $f(x)$, a cualquiera de sus primitivas, y se denota

$$\int f(x)dx$$

Propiedades.

1. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

2. $\displaystyle\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, para cualquier número real λ.

3. $\displaystyle\int 0dx = C.$

Fórmulas básicas de integración

$$\int kdx = kx + C \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C \qquad \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{cotan} x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C \qquad \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotan} x| + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotan} x + C \qquad \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|x|}{a} + C \qquad \int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C \qquad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

Algunos métodos de integración.

Cambio de variable.- Este método se basa en la “regla de la cadena”de derivación de funciones compuestas: si f y g son dos funciones y F es una primitiva de f y se trata de calcular la integral

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

haciendo el cambio $g(x) = t$, se tiene que $g'(x)dx = dt$ y entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C.$$

Integración por partes.- Si tenemos el producto de dos funciones uv y derivamos:

$$d(uv) = udv + vdu, \quad \text{de donde} \quad udv = d(uv) - vdu$$

e integrando, obtenemos la "fórmula"de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Se trata pues, de descomponer el integrando $f(x)dx$ como producto de una función u y otra dv que es derivada de una función v a determinar. Entonces se aplica la fórmula. Quizás conviene tener en cuenta:

1. Debemos saber integrar dv.
2. La integral $\int vdu$ debe ser "más sencilla"que la original.

Integrales de funciones racionales.- Se trata de integrar funciones del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios. Podemos suponer que el grado de P es menor que el grado de Q, en caso contrario efectuamos la división de ambos polinomios con lo que obtendremos una expresión del tipo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

siendo $R(x)$ el resto de tal división (y por tanto su grado es menor que el de Q). La integral de $C(x)$ es sencilla por tratarse de un polinomio y sólo resta integrar la otra función.
Toda función racional de este tipo se puede descomponer en fracciones simples de la siguiente forma.
En primer lugar se factoriza el denominador $Q(x)$; por cada factor binómico $(x-a)^n$ de multiplicidad n, aparecen las n fracciones siguientes:

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n};$$

y por cada factor cuadrático $(x^2 + cx + d)^m$ de multiplicidad m aparecen las m fracciones siguientes:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + cx + d} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + cx + d)^2} + \cdots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + cx + d)^m}$$

Se trata entonces de establecer la igualdad entre $P(x)/Q(x)$ y la suma de todas las fracciones que aparecen, operar para obtener los numeradores de las fracciones simples.

Reducción de integrales trigonométricas a racionales.-Se hace el cambio de variable siguiente

$$\tan\frac{x}{2} = t, \;\; \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}; \;\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \;\; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \;\; x = 2\arctan t.$$

Integrales de potencias de senos y cosenos.- Se trata de integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx, \quad \text{con} \quad m, n > 1,$$

procedemos de la siguiente forma:

- Si n es impar hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t$ y utilizamos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

- Si, por el contrario m es impar hacemos $\cos x = t$ y utilizamos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.
- Si ambos son pares podemos hacer utilizamos: $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$, $\operatorname{sen}^x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ y $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \cos 2x$.

Cambios de variable trigonométricos.-

- Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$ se hace $x = a \operatorname{sen} t$.
- Para integrales que contienen $\sqrt{a^2 + x^2}$ se hace $x = a \tan t$.
- Para integrales que contienen $\sqrt{x^2 - a^2}$ se hace $x = a \sec t$.

La integral definida. Aplicaciones.

Una partición P de un intervalo $[a, b]$, es una colección de $n + 1$ puntos $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$, de tal forma que $[a, b]$ queda subdividido en n subintervalos $[a = t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n = b]$. Se llama diámetro o norma de la partición P a

$$d(P) = \|P\| = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, 2, \cdots, n\}$$

Una partición P es más fina que otra P' si $d(P) < d(P')$.
Sea f una función real definida en $[a, b]$, suponiendo que existan, sean $m_i = \min\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ y $M_i = \max\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$, se llaman suma inferior y suma superior de f asociadas a la partición P, respectivamente a las sumas

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \quad \text{y} \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

No es difícil comprobar que se verifican:

1. Si $d(P) < d(P')$, entonces $s(f, P) \geq s(f, P')$.
2. Si $d(P) < d(P')$, entonces $S(f, P) \leq S(f, P')$.
3. Para cualesquiera particiones P y P', se verifica $s(f, P) \leq S(f, P')$.

Si existen y coinciden $\lim_{d(P)\to 0} s(f, P) = \lim_{d(P)\to 0} S(f, P)$, se dice que f es integrable en $[a, b]$, y a dicho límite se le llama integral definida de f en el intervalo $[a, b]$. Se denota como

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Si $f \leq 0$ la integral definida es, precisamente el área comprendida entre la cura $y = f(x)$ y el eje X en el intervalo $[a, b]$.
La integral definida verifica las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, si $a \leq c \leq b$.
4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
5. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, para $k \in \mathbb{R}$.

6. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$ si $f(x) \geq 0$.

7. Si $f(x) \leq g(x)$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

8. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Teorema (fundamental del cálculo).-Sea f una función real continua definida en $[a,b]$; entonces la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

Teorema (Regla de Barrow).- Si f es integrable en $[a,b]$ y F es una primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Cálculo de áreas planas. Ya hemos señalado que si $f(x) \geq 0$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es, precisamente el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y el eje X en el intervalo $[a,b]$. Si $f(x) \leq 0$ entonces dicha área es $-\int_a^b f(x)dx = |\int_a^b f(x)dx|$.
Si, $f(x)$ corta al eje X en $x_1, x_2, ..., x_k \in [a,b]$, el área delimitada por la curva y ele eje X es

$$A = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{x_k}^b f(x)dx\right|.$$

Para calcular el área comprendida entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ basta aplicar todo lo anterior a la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Cálculo de volúmenes dee sólidos de revolución. Si consideramos una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ y la hacemos girar alrededor del eje X, obtenemos un sólido que se llama de revolución. Para cada $x \in [a,b]$ el plano perpendicular a dicho eje que corta al sólido, es un círculo de radio, precisamente $f(x)$ y cuya área es precisamente $A(x) = \pi[f(x)]^2$. Si integramos esta nueva función, obtenemos el volumen del solido de revolución (es como si sumáramos las infinitas secciones en $[a,b]$:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

Este mismo método se puede aplicar al calculo de volúmenes de solidos tales que el área de cada sección, en un intervalo depende de x. Si tal área es $A(x)$, entonces el volumen es

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Cálculo de la longitud de una curva. La longitud de una curva $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ viene dada por

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Cálculo del área de una superficie de revolución. El área de una superficie de revolución obtenida al girar una curva $f(x)$ alrededor del eje X en un intervalo $[a,b]$ se obtiene como

$$A = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$