



Ecuaciones diferenciales.

Llamaremos **ecuación diferencial** a una ecuación del tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

que liga una variable independiente x y una función $y = y(x)$ junto con una o más de sus derivadas. A la función y se le llama función incógnita. Se llama **orden de la ecuación diferencial** al de la derivada de mayor orden que aparece en dicha ecuación. Se llama solución de la ecuación diferencial a una función $y = f(x)$ que verifica la ecuación.

Ecuaciones diferenciales de primer orden.-

Vamos, en esta sección, a estudiar la solución de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden. Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación en la que sólo aparecen derivadas de primer orden y es del tipo:

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

una condición inicial se puede expresar de la forma $y(x_0) = y_0$ y una función $y = f(x)$ es solución si se cumple $f'(x) = F(x, f(x))$.

Ecuación de variables separables.- Se trata de una ecuación del tipo:

$$\varphi(x) + \psi(y)y' = 0 \quad \text{o bien} \quad \varphi(x) + \psi(y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

o bien que se pueden reducir a un caso como este en el que podemos *agrupar* por separado las dos variables. Entonces podemos proceder como:

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0, \quad \text{luego} \quad \int \varphi(x)dx + \int \psi(y)dy = C$$

de donde se obtiene la solución.

Ecuaciones homogéneas.- Una función de dos variables $f(x, y)$ se llama homogénea de grado n si verifica, para todo número real λ que:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Una ecuación diferencial es homogénea si se puede escribir de la forma:

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

donde f y g son funciones homogéneas del mismo grado. Entonces haciendo el cambio de variable $y = xv$ donde v es una función de x $v = v(x)$ derivable; entonces $dy = vdx + xdv$ y la ecuación homogénea se reduce a una ecuación de variables separables.

Ecuaciones lineales de primer orden.- Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación diferencial que se puede escribir de la forma:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

donde p y q son dos funciones continuas.

Si $q(x) = 0$, la ecuación se llama lineal homogénea y tenemos una ecuación de variables separables que se puede resolver:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad \text{luego} \quad \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

e integrando obtenemos

$$\ln |y| + \int p(x)dx = \ln C, \quad \text{de donde} \quad \ln |y| - \ln C = - \int p(x)dx$$

$$\ln \frac{y}{C} = - \int p(x)dx \quad \text{y despejando} \quad y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Si $q(x) \neq 0$, resolvemos, como antes, el caso en que $q(x) = 0$ y entonces hacemos variar la constante c como una función $c = c(x)$ y ponemos

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}; \quad \text{de donde} \quad y' = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)e^{-\int p(x)dx}p(x)$$

si sustituimos en la ecuación diferencial inicial:

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

y simplificando

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad \text{luego} \quad c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + K$$

Algunas ecuaciones que no son de este tipo se pueden transformar en lineales; por ejemplo:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

que recibe el nombre de *ecuación diferencial de Bernoulli* y que, si $n = 0$ es lineal y si $n = 1$ es de variables separables. Si n no es ni 0 ni 1, podemos dividir ambos miembros por y^n y nos queda:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{y}{y^n} = q(x), \quad \text{de donde} \quad \frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

si hacemos el cambio $z = y^{1-n}$ tenemos que

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n} \quad \text{por tanto} \quad \frac{z'}{1-n} = \frac{y'}{y^n}$$

si sustituimos en la última de las expresiones anteriores obtenemos

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x) \quad \text{y por tanto} \quad z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

que sí es una ecuación lineal.

Ecuaciones lineales de orden n .- Una ecuación diferencial de orden n es una ecuación diferencial en la que aparecen derivadas hasta el orden n del tipo

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_n(x)y = q(x)$$

donde las funciones $p_i(x)$ con $i = 1, \dots, n$ y $q(x)$ son continuas en un intervalo adecuado. Si $q(x) = 0$ la ecuación se llama homogénea.

Hemos de tener en cuenta las propiedades siguientes:

1. Si y_1, \dots, y_n son n soluciones de una ecuación diferencial de orden n homogénea y c_1, \dots, c_n son constantes, entonces la función $y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$ es, también, solución de dicha ecuación.
2. Si y_1, \dots, y_n son soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n linealmente independientes, entonces la solución general es $y = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$, donde c_1, \dots, c_n son constantes adecuadas.

Ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes.-

Una ecuación lineal de orden n homogénea y de coeficientes constantes, es una ecuación del tipo:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_ny = 0$$

donde a_1, \dots, a_n son constantes.

A la ecuación

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

se le llama ecuación característica.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son las soluciones de esta ecuación, se pueden presentar los siguientes casos:

1. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son reales y distintas. Entonces las soluciones linealmente independientes son

$$e^{\lambda_1x}, \dots, e^{\lambda_nx}$$

con lo que la solución general viene dada por:

$$y = c_1e^{\lambda_1x} + \dots + c_ne^{\lambda_nx}$$

2. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son reales y algunas de ellas múltiples, por ejemplo λ_1 tiene multiplicidad r y λ_2 tiene multiplicidad s siendo las demás hasta λ_n raíces simples. Entonces la solución viene dada por

$$\begin{aligned} y = & c_1e^{\lambda_1x} + c_2xe^{\lambda_1x} + \dots + c_rx^{r-1}e^{\lambda_1x} + \\ & + c_{r+1}e^{\lambda_2x} + c_{r+2}xe^{\lambda_2x} + \dots + c_{r+s}x^{s-1}e^{\lambda_2x} + \\ & + c_{r+s+1}e^{\lambda_{r+s+1}x} + \dots + c_ne^{\lambda_nx} \end{aligned}$$

3. Algunas raíces son complejas, por ejemplo $\lambda_1 = a+bi$ y $\lambda_3 = c+di$, por tanto tendremos también las conjugadas $\lambda_2 = a-bi$ y $\lambda_4 = c-di$, (con $b, d \neq 0$). Entonces la solución viene dada por:

$$y = c_1e^{ax} \cos bx + c_2e^{ax} \operatorname{sen} bx + c_3e^{cx} \cos dx + c_4e^{cx} \operatorname{sen} dx + c_5e^{\lambda_5x} + \dots + c_ne^{\lambda_nx}$$

4. Algunas raíces son complejas y algunas de estas raíces son múltiples; por ejemplo si $\lambda_1 = a+bi$ tiene multiplicidad $k \leq \frac{n}{2}$, entonces $\lambda_2 = a-bi$ también tiene multiplicidad k y la solución viene dada por:

$$\begin{aligned} y = & c_1e^{ax} \cos bx + c_2e^{ax} \operatorname{sen} bx + c_3xe^{ax} \cos bx + c_4xe^{ax} \operatorname{sen} bx + \dots + \\ & + c_{2k-1}x^{k-1}e^{ax} \cos bx + c_{2k}x^{k-1}e^{ax} \operatorname{sen} bx + \dots \end{aligned}$$