UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Diplomatura en
Óptica y Optometría
15 de julio de 2009

Examen de Final

Nombre .... Grupo........

1. Sea $ABCDE$ un pentágono regular. *(1)* Halle el ángulo ABC; *(2)* halle el ángulo BAC; *(3)* halle el cociente entre la longitud del segmento AC y la del segmento AB.

2. Resuelva en el campo de los números complejos la ecuación $x^5 + 1 = 0$; represente las soluciones gráficamente.

3. Estudie la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$ (dominio, corte con los ejes, intervalos en los que f es positiva o negativa, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, asíntotas); y represéntela gráficamente.

4. Calcule el área del triángulo determinado por los puntos $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$ y $(1, -1, 2)$.

5. Calcule $\displaystyle\int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$.

6. Estudie y discuta como es el siguiente sistema según el valor del parámetro a. Encuentre las soluciones en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

7. Considere la curva plana $r(t) = ti + (1 + t^2)j$. *(a)* Halle los puntos en los que $r(t)$ y $r'(t)$ son perpendiculares. *(b)* Halle los puntos en los que dichos vectores tienen la misma dirección.

8. Calcule las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^2 \tan \frac{y^2}{x^2+y^2}$; $(x, y) \neq (0, 0)$ y compruebe la igualdad siguiente:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2f(x, y).$$

9. Halle el volumen del sólido limitado superiormente por $z = x + y$ e inferiormente por el recinto comprendido entre las parábolas $y = -x^2 + 1$ y $y = x^2 - 1$.

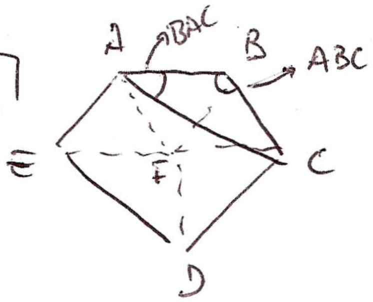
10. Los varones entre 20 y 60 años que contrajeron matrimonio durante el año 1961 en España presentan la siguiente distribución por edades:

Edad	[20,25]	(25,30]	(30, 35]	(35,40]	(40,50]	(50, 60]
Varones	41.000	123.000	44.000	13.000	7.000	3.000

Dibuje el gráfico de sectores y el polígono de frecuencias acumuladas absolutas. Calcule la media, la moda y la mediana. Calcule la desviación media y deduzca si los datos están cerca de la media.

RESPUESTAS DEL EXÁMEN FINAL DE JUNIO DE 2009

1



Si llamamos F al centro del pentágono, todos los triángulos ABF, BCF, ... son isósceles, iguales y los ángulos alrededor del punto F suman 360°. Si nos fijamos en el triángulo ABF, el ángulo F tiene $360:5=74°$; los ángulos A y B son iguales y $74° + B° + B° = 180°$, luego $B° = 53°$ y como el ángulo ABC es 2B se tiene $ABC° = 106°$

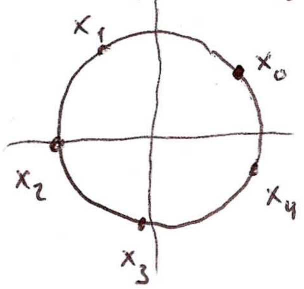
El triángulo BAC es isósceles donde el ángulo $B = 106$, $A = B$; luego $BAC = A = (180 - 106):2 = 37$

Observemos que $\dfrac{AC}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{AB}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\operatorname{sen} 106}{\operatorname{sen} 37} = \dfrac{0'961}{0'602} = 1'596$

2 $x^5+1=0 \Rightarrow$ "$x^5 = \sqrt{-1}$" $\Rightarrow$ $x =$ las cinco raíces quintas de $-1 = -1+0i$, que en forma polar es 1_{π}. De modo que, aplicando las fórmulas conocidas véase el resumen del tema 2:

$$x_0 = 1_{\frac{\pi+2\cdot 0\cdot \pi}{5}} = \frac{\pi}{5},\quad x_1 = 1_{\frac{\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{5}} = 1_{\frac{3\pi}{5}},\quad x_2 = 1_{\frac{5\pi}{5}} = 1_{\pi},$$

$$x_3 = 1_{\frac{7\pi}{5}},\quad x_4 = 1_{\frac{9\pi}{5}}$$



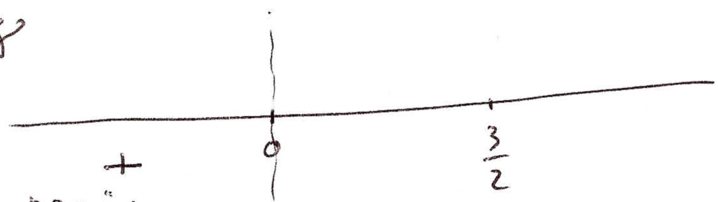
$\boxed{3}$ Dominio $\equiv \mathbb{R}$ pues $e^x \neq 0$ siempre y el numerador es un polinomio.

Corte Eje X : $\dfrac{2x^2-3x}{e^x}=0 \Rightarrow 2x^2-3x=0 \rightarrow x=0,\ x=\frac{3}{2}$.

$(0,0);\ (\frac{3}{2},0)$

Corte Eje Y $\Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$

Regiones: Como f es continua por ser cociente de un polinomio y e^x; entre dos ceros consecutivos ~~f~~ no cambia de signo, luego



$f(-1)=\dfrac{2+3}{e^{-1}}=\dfrac{5}{e^{-1}}>0 \Rightarrow$ ~~negativa~~ positiva en $(-\infty,0)$

$f(1)=\dfrac{2-3}{e}=-\dfrac{1}{e}<0 \Rightarrow$ negativa en $(0,\frac{3}{2})$

$f(2)=\dfrac{8-6}{e^2}>0 \Rightarrow$ positiva en $(\frac{3}{2},+\infty)$

Crecimiento y decrecimiento.

Si hacemos la primera derivada.

$f'(x)=-\dfrac{2x^2-7x+3}{e^x} \Rightarrow 2x^2-7x+3=0\ ;\ x=3,\ x=\frac{1}{2}$

Como esta derivada también es continua

$f'(0)=-3<0 \Rightarrow f$ decrece en $(-\infty,\frac{1}{2})$

$f'(1)=\frac{2}{e}>0 \Rightarrow f$ crece $(\frac{1}{2},3)$

$f'(4)=-\frac{7}{e^2}<0 \Rightarrow f$ decrece en $(3,+\infty)$

Luego en $\left(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})\right)=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \Rightarrow$ mínimo y

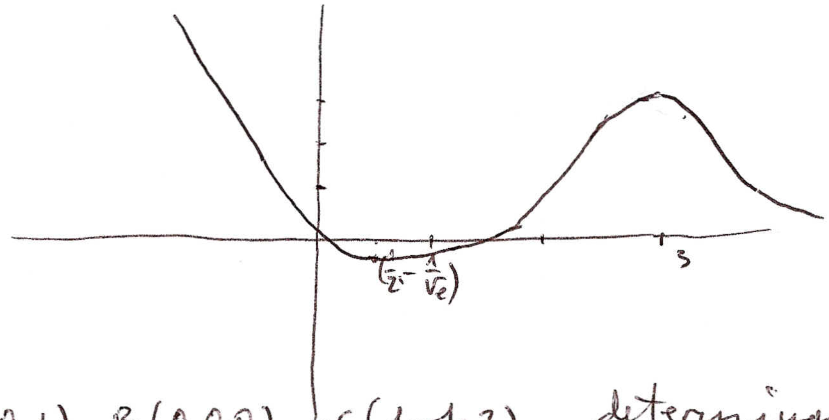
en $(3, f(3))=(3,\frac{9}{e}) \Rightarrow$ máx.

Asíntotas;

- No tiene verticales.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x}{e^x} = 0$; pues aunque numerador y denominador tienden a $+\infty$, se trata del cociente de un polinomio entre la exponencial $\Rightarrow$ asíntota hor. $y=0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-3x}{e^x} = +\infty$ pues $2x^2-3x$ tiende a $+\infty$ y $\frac{1}{e^x}$ también.

Oblicuas

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2-3x}{x e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-3}{e^x} = 0$ por la misma razón anterior luego no hay;



[4] Los puntos $A(1,0,1)$, $B(0,0,0)$ y $C(1,-1,2)$ determinan dos vectores $\vec{BA}=(1,0,1)$ y $\vec{BC}=(1,-1,2)$ el área del paralelogramo que determinan es $\|\vec{BA} \times \vec{BC}\|$, la del triángulo es la mitad

$$\frac{1}{2}\|\vec{BA} \times \vec{BC}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|(1,-1,-1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(5) Factorizamos el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

luego $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$. Descomponemos en fracciones simples $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$. Desarrollando e igualando los numeradores:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A+C=3 \\ A-B+C=5 \end{array}\right\}$$

Resolvemos y $A=\frac{1}{2}$; $B=-\frac{1}{2}$; $C=4$; luego

$$\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx+\int\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}\,dx+\int\frac{4}{(x-1)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-4\,\frac{1}{x-1}+C$$

(pues son inmediatas)

(6) Triangulamos aplicando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+az=a^2 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}(1^a\ fila)\cdot(-1)+2^a\ fila \\ (1^a\ fila)\cdot(-a)+3^a\ fila\end{array} \left\{\begin{array}{l} x+y+az=a^2 \\ (a-1)y+(1-a)z=a-a^2 \\ (1-a)y+(1-a^2)z=1-a^3 \end{array}\right.$$

$$2^a\ fila+3^a\ fila \left\{\begin{array}{l} x+y+az=a^2 \\ (a-1)y+(1-a)z=a-a^2 \\ \quad (-a^2-a+2)z=-a^3-a^2+a+1 \end{array}\right.$$

$$-a^2-a+2=0 \iff a=1,\ a=-2$$

(a) Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ el sistema es comp. determinado y despejamos:

$$z=\frac{-a^3-a^2+a+1}{-a^2-a+2}\ ;\ y=\left(a-a^2-\frac{-a^3-a^2+a+1}{-a^2-a+2}(1-a)\right)\cdot\frac{1}{a-1}$$

$$x=a^2-a\,\frac{-a^3-a^2+a+1}{-a^2-a+2}-\frac{1}{a-1}\left(a-a^2-\frac{-a^3-a^2+a+1}{-a^2-a+2}(1-a)\right)$$

Simplificar no es difícil.

(b) Si $a=1$; el sistema es $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}\rightarrow x+y+z=1$

comp. indet. si $z=\lambda; y=\mu \Rightarrow x=1-\lambda-\mu$.

(c) Si $a=-2 \Rightarrow$ la última ecuación es $0\cdot z=-13 \Rightarrow$ Incompatible

$\boxed{7}$ Podemos escribir la curva $r(t) = (t, 1+t^2)$

(a) $r(t)$ y $r'(t)$ son perpendiculares si su producto escalar es cero.

$$r'(t) = (1, 2t) \Rightarrow r(t) \cdot r'(t) = (t, 1+t^2)(1, 2t) = 2t^3+3t$$

entonces $2t^3+3t = 0 \iff t\,(2t^2+3) = 0 \Rightarrow t=0$

y $2t^2+3 = 0$ (no es posible)

luego el punto es $r(0) = (0,1)$.

(b) Tienen la misma dirección si son proporcionales, es decir, uno es múltiplo de otro.

$$r(t) = k\,r'(t) \iff (t, 1+t^2) = k(1, 2t)$$

es decir $\left.\begin{array}{l} t = k \\ 1+t^2 = 2kt \end{array}\right\} \Rightarrow 1+k^2 = 2k^2 \iff$

$$2k^2 - k^2 - 1 = 0 \iff k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

los puntos son

$$r(1) = (1, 2) \text{ y } r\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{4}\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right)$$

$\boxed{8}$ $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \tan\frac{y^2}{x^2+y^2} + x^2 \frac{1}{\cos^2\frac{y^2}{x^2+y^2}} \cdot \left(-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= 2x\tan\frac{y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2\cos^2\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \frac{1}{\cos^2\frac{y^2}{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y(x^2+y^2) - 2y\,y^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2\,(2yx^2 + \cancel{2y^3} - \cancel{2y^3})}{(x^2+y^2)^2\cos^2\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)\cos^2\frac{y^2}{x^2+y^2}}$$

$\longrightarrow$

Si hacemos las operaciones que se piden:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2\,tg\,\frac{y^2}{x^2+y^2}-\cancel{\frac{2x^4y^2}{(x^2+y^2)\cos^2\frac{y^2}{x^2+y^2}}}+\cancel{\frac{2y^2x^4}{(x^2+y^2)\cos^2\frac{y^2}{x^2+y^2}}}$$

[9] El recinto Ω está comprendido entre $y=-x^2+1$, $y=x^2-1$

$$-x^2+1=x^2-1 \iff 2x^2-2=0 \iff x=1,\ x=-1$$

Como ~~f(x)=~~ en $x=0$ $-x^2+1$ es mayor que x^2-1, la primera curva está por encima, luego el recinto es

$$\Omega=\{(x,y)\ :\ -1\leq x\leq 1,\ x^2-1\leq y\leq -x^2+1\}$$

y el volumen buscado es

$$V=\iint_\Omega (x+y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2-1}^{-x^2+1}(x+y)\,dy\right)dx=$$

$$\int_{-1}^{1}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{-x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}\left(x(-x^2+1)+\frac{(-x^2+1)^2}{2}-x(x^2-1)-\frac{(x^2-1)^2}{2}\right)dx$$

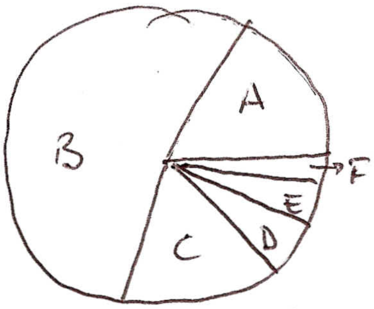
$$=\int_{-1}^{1}\left(-x^3+x+\cancel{\frac{x^4-2x^2+1}{2}}-x^3+x-\cancel{\frac{x^4-2x^2+1}{2}}\right)dx=$$

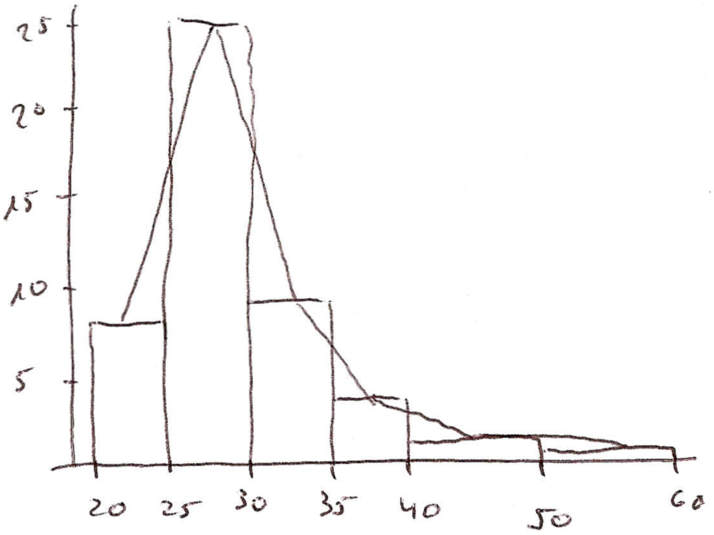
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^3+2x)\,dx=\left[-2\frac{x^4}{4}+2\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}=-\frac{2}{4}+\frac{2}{2}-$$

(10) El nº total de varones es 231.000; de modo que $360 : 231 = 1'56$ son los grados que corresponden a cada 1000 varones:

$A = [20, 25] \approx 64°$, $B = (25, 30] \approx 192°$, $C = (30, 35] \approx 68°$, $D = (35, 40] \approx 20°$

$E = (40, 50] \approx 11°$, $F = (50, 60] \approx 5°$





$$Mo = 25 + \frac{25-8}{2\cdot 25 - 8 - 8'9}(30-25) = 27'6$$

$$Me = 25 + \frac{106500 - 41.000}{123.000}(30-25) = 27'7$$

$$\bar{x} = \frac{22'5\cdot 44000 + 27'5\cdot 123000 + 32'5\cdot 44000 + 37'5\cdot 13000 + 45\cdot 7000 + 55\cdot 3000}{231.000} = 29'3$$

$$D\bar{x} = \frac{1}{231000}\Big(|22'5 - 29'3|\cdot 44000 + |27'5 - 29'3|\, 123.000 + |32'5 - 29'3|\, 44000 + |37'5 - 29'3|\, 13000 + |45 - 29'3|\cdot 7000 + |55 - 32'2|\, 3000\Big) = 4'1$$

Podríamos decir que los datos no están lejos de la media.