UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Óptica y Optometría
Relación de Problemas n^{o}8
Curso 2008-2009

Funciones vectoriales y de varias variables.

164. Si $x = as\cos t$, $y = bs\,\text{sen}\,t$ y $z = s$, compruebe que está en el cono $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

165. Calcule las derivadas de las funciones siguientes:

    a) $F(t) = (\cos t, \text{sen}^2 t, \text{sen}\, 2t, \tan t)$.

    b) $F(t) = \ln(1 + t^2)e_1 + \arctan t e_2 + \dfrac{1}{1+t^2}e_3$.

    c) $F(x) = (xe^x, \ln 3x, 0)$ y $x(t) = \ln t$.

    d) $F(x) = \left(\cos\sqrt{x}, \arctan x, \dfrac{-1}{1+\sqrt{x}}\right)$ y $x(t) = t^2 + 2t + 1$.

166. Sea la función vectorial siguiente: $F(t) = (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1)$; demuestre que el ángulo formado por $F(t)$ y $F'(t)$ es constante, es decir, no depende de t.

167. Calcule las siguientes integrales de funciones vectoriales:

    $$(a) \int_0^1 (t, \sqrt{t}, e^t)dt; \quad (b) \int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t}e_1 + \frac{1}{1+e^t}e_2\right)dt.$$

168. Considere las funciones $F(t) = (2t^2, 3, 0)$, $G(t) = (1, t, t^2)$ y $u(t) = \frac{1}{3}t^3$. Calcule: F', G', u', $(F+G)'$, $(uF)'$, $(F \cdot G)'$, $(F \times G)'$, $(G \times F)'$ y $(F \circ u)'$.

169. Demuestre que si $f(t) = \cos ti + \text{sen}\, tj$, entonces $f(t) \cdot f'(t) = 0$.

170. Demuestre que si $g(t) = e^{kt}i + e^{-kt}j$, con $k \in \mathbb{R}$, entonces $g(t)$ y $g''(t)$ tienen la misma dirección.

171. Considere la circunferencia $c(t) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)$ con $\rho \in \mathbb{R}$ fijo y $\theta \in [0, 2\pi]$. Demuestre que el vector tangente es perpendicular al vector radio.

172. Considere la curva cúbica alabeada $r(t) = ti + t^2j + t^3k$. Halle el vector tangente a la curva en el punto $P(2,4,8)$ y la recta tangente en dicho punto.

173. Halle el punto P de la curva $r(t) = ((1-2t), t^2, 2e^{2(t-1)})$ en el que el vector tangente $r'(t)$ es paralelo a $r(t)$.

174. Demuestre que las circunferencias $c_1(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, 0)$ y $c_2(s) = (0, \cos s, \text{sen}\, s)$ se cortan en los puntos $P(0,1,0)$ y $Q(0,-1,0)$ formando ángulos rectos.

175. Considere la curva plana $r(t) = ti + (1+t^2)j$.

    a) Halle los puntos en los que $r(t)$ y $r'(t)$ son perpendiculares.

    b) Los puntos en los que dichos vectores tienen la misma dirección.

    c) Los puntos en los que, teniendo la misma dirección, tienen sentidos opuestos.

176. Considere la hélice circular descrita por la ecuación vectorial $H(t) = (a\cos bt, a\,\text{sen}\, bt, cbt)$ con a, b, c constantes reales positivas:

    a) Demuestre que la hélice circular está *enrrollada* alrededor del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$, z no sujeta a restricción.

    b) Demuestre que la recta tangente en cada punto, forma un ángulo constante con el eje Z y que el coseno de ese ángulo es $\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

    c) Demuestre también que los vectores velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ tienen longitud constante y que cumplen:

    $$\frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3} = \frac{a}{a^2+c^2}.$$

177. Halle la longitud de las curvas siguientes:

   a) $F(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t^2)$ entre $t = 0$ y $t = 1$.
   b) $F(t) = (1, t, t^2)$ desde el punto $(1, 0, 0)$ al punto $(1, 1, 1)$.
   c) $F(t) = (t, t, 4 - t^2)$ desde el punto $(0, 0, 4)$ al punto $(1, 1, 3)$.

178. En cada uno de los casos siguientes calcule el vector tangente unitario.

$$(a)F(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t); \qquad (b)F(t) = \left(\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right);$$

$$(c)F(t) = (6\operatorname{sen} 2t, 6\cos 2t, 5t) \text{ en } t = \pi; \quad (d)F(t) = (e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t) \text{ en } t = 0.$$

179. Halle la curvatura y la torsión en $t = 0$ de las siguientes curvas:

$$(a)F(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t); \quad (b)F(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right).$$

180. Una hélice está descrita por la función de posición $r(t) = (a\cos bt, a\operatorname{sen} bt, cbt)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ constantes. Demuestre que tiene curvatura constante $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$.

181. Considere una curva plana dada por la ecuación $r(t) = (x(t), y(t))$. Demuestre que la curvatura de r viene dada por la fórmula:

$$\kappa(t) = \frac{\|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)\|}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}.$$

182. Calcule la curvatura de las curvas siguientes en los puntos que se indican:

   a) $r(t) = ti + \frac{t^2}{2}j$ en el punto $P(-1, \frac{1}{2})$.
   b) $r(t) = (a\cos^3 t, a\operatorname{sen}^3 t)$, para $t = \frac{\pi}{4}$.

183. Represente cada uno de los siguientes subconjuntos del plano $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3\}; \quad B = \{(x, y); 1 < x^2 + y^2 \leq 4\};$$

$$C = \{(x, y) : 1 < x^2 \leq 4\}; \quad D = \{(x, y) : (x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 16, x \leq y\};$$

$$E = \{(x, y) : |xy| > 1\} \cup \{(0, 0)\}; \quad F = \{(x, y) : y^2 \geq 2\}.$$

184. Calcule el dominio de las funciones siguientes:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}; \qquad g(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}, \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\right);$$

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y^2}}; \quad r(x, y) = \cos(x^2 + y^2)^{-1};$$

185. Calcule las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

$$(a)f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2; \qquad (b)f(x, y) = \ln(x^2 + y^2);$$

$$(c)f(x, y) = \frac{1}{y}\cos x^2, (y \neq 0); \qquad (d)f(x, y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right), (y \neq 0);$$

$$(e)f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x}), (x \neq 0); \quad (f)f(x, y) = \arctan\frac{x + y}{1 - xy}, (xy \neq 1);$$

Estudie qué pasa con las derivadas parciales mixtas de segundo orden.

186. Calcule las derivadas parciales de la función $f(x, y)x^2\tan\frac{y^2}{x^2+y^2}$; $(x, y) \neq (0, 0)$ y compruebe la igualdad siguiente:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2f(x, y).$$

187. Calcule las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x\cos(3y) - y^2 \operatorname{sen} x$. Calcule su derivada respecto de un vector $v = (v_1, v_2)$ en el punto $(1, 2)$. Calcule su diferencial en dicho punto.

188. Halle el vector gradiente, en cada punto en el que exista, para las funciones siguientes:

$$(a) f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy); \quad (b) f(x, y) = e^x \cos y;$$
$$(c) f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4; \quad (d) f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2;$$

189. Calcule las derivadas direccionales en los puntos y direcciones indicadas:

    a) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, en $(1, 1, 0)$, dirección $i - j + 2k$.

    b) $f(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, en $(1, 1, 1)$, dirección $2i + j - k$.

190. Calcule la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ en el punto $(1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

191. Halle el punto (o puntos) de las superficies siguientes en que el plano tangente es horizontal:

$$(a) xy + \frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} - z = 0; \quad (b) z = xy; \quad (c) x + y + z + xy - x^2 - y^2 = 0$$

192. Calcule los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$(a) f(x, y) = ye^x - e^y; \quad (b) f(x, y) = (x + y)(xy + 1);$$
$$(c) f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2; \quad (d) f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{a}{y}.$$

193. Estudie los extremos de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

    b) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$, $0 < x < 2\pi$; $0 < y < 2\pi$.

    c) $f(x, y, z) = (y + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$

194. Calcule los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ condicionada por las ecuaciones $x + y = 4$ e $y + z = 6$.

195. Calcule los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y + z$ que se encuentran simultáneamente sobre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ y sobre el plano de ecuación $y + z = 1$.

196. Calcule la distancia mínima del punto $(0, 2)$ a la parábola de ecuación $x^2 = 4y$.

197. El material para elaborar la tapa y la base de una caja rectangular cuesta 3 euros por dm^2 y el material de los laterales 2 euros por dm^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más barata que tenga 1 dm^3 de volumen?

198. Halle los puntos más próximos al origen de la curva intersección de las dos superficies $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

199. En cierta montaña la elevación z, por encima de un punto (x, y) en un plano horizontal al nivel del mar es $z = 2000 - 2x^2 - 4y^2$ metros. El eje X positivo apunta hacia el este y el eje Y positivo al norte. Un alpinista está en el punto $(-20, 5, 1100)$: (a) Si el alpinista avanza en dirección oeste ¿ascenderá o descenderá? ¿con qué rapidez? (b) Idem hacia el noroeste; (c) ¿en qué dirección debe avanzar para no subir ni bajar?

200. La presión soportada en cada punto (x, y) del cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$ del plano viene dada por la función $P(x, y) = x + 2y$. (a) Represente gráficamente las curvas de nivel de la superficie delimitada por $z = P(x, y)$; (b) determine la dirección en que el aumento de la presión es máximo en el punto $A(1, 1)$ y en el $B(2, \frac{1}{2})$; (c) halle el valor máximo que alcanza la presión en los puntos de la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.