



Funciones vectoriales.

En este resumen, escribiremos todo en el espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 .

Una función vectorial es una función que transforma un número real en un vector:

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{definida como } F(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones reales de variable real.

Así, se dice que F es continua, derivable o integrable, si lo son $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$; y además su derivada y su integral se calculan del siguiente modo:

$$F'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad \text{y} \quad \int_a^b F(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right).$$

Algunas reglas de derivación de estas funciones relacionadas con las operaciones entre vectores son las siguientes (suponemos que F y G son dos funciones vectoriales, u es una función real de variable real y $\lambda \in \mathbb{R}$):

1. $(F(t) + G(t))' = F'(t) + G'(t)$.
2. $(\lambda F(t))' = \lambda F'(t)$.
3. $(u(t)F(t))' = u'(t)F(t) + u(t)F'(t)$.
4. $(F(t)\dot{G}(t))' = F'(t)\dot{G}(t) + F(t)\dot{G}'(t)$.
5. $(F(t) \times G(t))' = F'(t) \times G(t) + F(t) \times G'(t)$.
6. $(F \circ u)'(t) = (F(u(t)))' = F'(u(t))u'(t)$.

Se ve fácilmente, que todas son “heredadas” de las reglas de derivación de las funciones reales de variable real. Lo mismo ocurre con las integrales:

1. $\int_a^b (F(t) + G(t)) dt = \int_a^b F(t) dt + \int_a^b G(t) dt$.
2. $\int_a^b \lambda F(t) dt = \lambda \int_a^b F(t) dt$

Curvas parametrizadas.

Cuando una función vectorial definida en un intervalo abierto de \mathbb{R} es derivable indefinidamente y su primera derivada no se anula, decimos que se trata de una curva regular. Al vector $F(t)$ se le llama vector de posición de la curva y a los vectores $F'(t)$ y $F''(t)$ se les llama, respectivamente, vectores velocidad y aceleración. De modo que la velocidad en un instante t es $\|F'(t)\|$ y la aceleración es $\|F''(t)\|$. Al vector $F'(t)$ también se le llama vector tangente a la curva $F(t)$ en t , y el vector

$$T(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|},$$

recibe el nombre de vector tangente unitario.

Longitud de un arco de curva.

La longitud de un arco (“trozo”) de curva entre dos puntos $F(a)$ y $F(b)$ viene dada por la fórmula

$$L(F, a, b) = \int_a^b \|F'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Curvatura.

Dada una curva regular $F(t)$ se puede reparametrizar (una especie de cambio de variable), de manera que la longitud de la curva entre dos puntos a y b coincida con la longitud del intervalo con origen en a y extremo en b ; en este caso se dice que la curva está parametrizada por la longitud del arco, que llamamos s . En este caso el vector tangente siempre es unitario. Se define la curvatura como “la variación del vector tangente con respecto a la longitud del arco”

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\|.$$

La curvatura viene a medir como se “tuerce” la curva respecto de su longitud. Esta definición es bastante intuitiva, pero no es fácil de calcular. Para curvas, no necesariamente parametrizadas por el arco, se puede calcular como

$$\kappa = \left\| \frac{T'(t)}{F'(t)} \right\|;$$

o bien

$$\kappa = \frac{\|F'(t) \times F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3}$$

Si la curva está en el espacio, también se “retuerce” y para medir esto se define la torsión τ como

$$\tau = \frac{\det(F'(t), F''(t), F'''(t))}{\|F'(t) \times F''(t)\|}$$

Funciones de varias variables.

Una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de varias variables, asigna a un punto de \mathbb{R}^n otro punto de \mathbb{R}^m :

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

donde (f_1, \dots, f_m) son funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reales de variable vectorial.

Fundamentalmente nos referiremos a funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reales de variable vectorial.

Derivada según un vector. Derivadas parciales.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, se llama derivada de f en el punto $a \in \mathbb{R}^n$, según el vector $v \in \mathbb{R}^n$ al siguiente límite, si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = D_v f(a).$$

Si $\|v\| = 1$, se le llama derivada direccional.

Cuando se trata de los vectores i, j, k de la base canónica, le llamamos derivadas parciales

$$D_i f(a) = D_x f(a) = \frac{\partial}{\partial x} f(a), \quad D_j f(a) = D_y f(a) = \frac{\partial}{\partial y} f(a), \quad ; \quad ; \quad D_k f(a) = D_z f(a) = \frac{\partial}{\partial z} f(a)$$

Calcular derivadas parciales es muy sencillo y solo consiste en derivar con respecto a la variable en cuestión, suponiendo que el resto de variables son constantes.

Se llama vector gradiente de f en un punto a al vector

$$\nabla f(a) = (D_x f(a), D_y f(a), D_z f(a))$$

Si $\|v\| = 1$ y f tiene derivadas parciales continuas en a , entonces la derivada direccional es

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v$$

Calculo de extremos

Una función f tiene en a un punto de máximo relativo (resp. mínimo) si existe un entorno U de a tal que para todo $x \in U, x \neq a, f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Un punto a es un punto crítico (o estacionario) para una función f si $D_1 f(a) = 0, \dots, D_n f(a) = 0$.

1. Si a es un punto de extremo para f , entonces a es un punto crítico para f .
2. Si $n = 2$, consideremos

$$\Delta f(a) = \begin{vmatrix} D_{11}f(a) & D_{12}f(a) \\ D_{21}f(a) & D_{22}f(a) \end{vmatrix}$$

Entonces:

- a) Si $\Delta f(a) > 0$
 - 1) Si $D_{11}f(a) > 0$, entonces a es un punto de mínimo.
 - 2) Si $D_{11}f(a) < 0$, entonces a es un punto de máximo.
 - b) Si $\Delta f(a) < 0$ no hay extremo en a (punto de ensilladura).
 - c) Si $\Delta f(a) = 0$ no se puede asegurar nada.
3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1 : A \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones que admiten derivadas parciales de primer orden continuas en A . Supongamos que el rango de matriz

$$\begin{pmatrix} D_1 g_1(x) & \dots & D_m g_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 g_m(x) & \dots & D_m g_m(x) \end{pmatrix}$$

es máximo, es decir m , en todo punto x verificando $g_i(x) = 0$, con $i = 1, \dots, m$. Entonces si x_0 es un punto extremo de f , existen m números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que x_0 es un punto crítico de la función

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)$$