UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales.

Una matriz A de orden $m \times n$ es una colección de $m \cdot n$ números reales ordenado en m filas y n columnas, de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

a_{ij} es el elemento que se encuentra en la fila i, columna j.
Una matriz fila es la que tiene una sola fila y una matriz columna, la que tiene una sola columna.
Dada una matriz A, de orden $m \times n$, se llama matriz traspuesta de A, a la matriz A^t de orden $n \times m$ que resulta de intercambiar entre sí las filas y las columnas de A.
La matriz O que tiene todos sus elementos nulos, se llama matriz nula.
Una matriz $n \times n$ (que tiene el mismo número de filas que de columnas), se llama matriz cuadrada.
Si una matriz es cuadrada ($n \times n$):

- Se llama diagonal principal a los elementos $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.
- Una matriz es diagonal si tiene todos sus elementos nulos, excepto los de la diagonal principal.
- Una matriz es triangular si tiene nulos todos los elementos por debajo de la diagonal principal.
- Una matriz es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.
- Sa llama matriz identidad de orden n, a la matriz I_n, diagonal y que todos los elementos de la diagonal principal son el 1.

SUMA DE MATRICES

Dadas dos matrices del mismo orden $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, se defina la matriz suma de ambas $A + B$ del siguiente modo:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} +_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades: Si A, B, C son matrices del mismo orden, se cumplen:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativa).
2. $A + B = B + A$ (conmutativa).
3. $A + O = O + A$ (elemento neutro).
4. Existe una matriz $-A$ opuesta de A, formada por los opuestos de los elementos de A. Entonces $A + (-A) = A - A = O$.

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Dadas una matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y un número real λ, se define la matriz producto de λ por A como la matriz λA, definida como

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Propiedades: Si A y B son dos matrices del mismo orden y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se cumplen:

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
4. $1A = A$.

PRODUCTO DE MATRICES

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ y $B = (b_{ij})$, de orden $n \times k$, se define la matriz producto de ambas AB, como la matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times k$, tal que cada elemento c_{ij} se obtiene del siguiente modo:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Observemos que para que dos matrices se puedan multiplicar es necesario que el número de columnas de la primera matriz, coincida con el número de filas de la segunda. Por tanto, el producto de matrices no es, en general, conmutativo.
Propiedades: Si A, B y C son matrices que, en cada uno de los casos siguientes, se pueden sumar y/o multiplicar, se cumplen:

1. $A(BC) = (AB)C$ (asociativa).
2. $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$
3. Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $AI_n = I_nA = A$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si A es una matriz cuadrada de orden 2, se define el determinante de A como:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Si A es de orden 3, entonces:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Se comprueba fácilmente que el resultado no depende de la fila o columna elegida para el cálculo. Si el orden es mayor que 3, el proceso es recurrente.

Propiedades:

1. $|A| = |A^t|$. Como consecuencia cualquier propiedad de los determinantes se sigue cumpliendo cuando se sustituye la palabra fila por columna, y recíprocamente. Por tanto, usaremos la palabra línea para designar fila o columna, indistintamente.

2. Si se multiplican todos los elementos de una línea por un mismo número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

3. Si se intercambian entre sí, dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo, pero su valor absoluto es el mismo.

4. Si todos los elementos de una línea son nulos, el determinante es cero.

5. Si dos líneas paralelas son proporcionales, el determinante es cero.

6. Si una línea es combinación lineal de otras paralelas, el determinante es cero.

7. Si a una línea se le suma una combinación lineal de otras líneas paralelas, el determinante no varía.

8. Si dos determinantes tienen iguales, respectivamente, todas sus filas (o columnas) salvo una de ellas, su suma es otro determinante que tiene las mismas filas (o columnas) iguales, con excepción de la fila (o columna) desigual, que tiene por elementos la suma de los elementos de las filas (o columnas) desiguales.

9. Si A es una matriz de orden n, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

10. En general $|A + B| \neq |A| + |B|$.

11. $|AB| = |A||B|$.

Si A es una matriz cuadrada de orden n, se llama matriz inversa de A, si existe, a la matriz A^{-1} que verifica $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Una matriz tiene inversa si, y solo si, su determinante es distinto de cero.
Sea A una matriz cuadrada de orden n, se llama menor complementario del elemento a_{ij} al determinante, α_{ij} de la matriz de orden $n-1$, que se obtiene al suprimir en A la fila i y la columna j. Se llama adjunto del elemento a_{ij} al valor: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$; se llama matriz adjunta de A a la matriz A_n cuyos elementos son, respectivamente, los adjuntos de los elementos de A. Si $det(A) \neq 0$, la inversa de A es la matriz $A^{-1} = A_n^t/det(A)$.

Propiedades de la matriz inversa:

1. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}, \quad \text{si} \quad \lambda \neq 0.$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$

RANGO DE UNA MATRIZ

Dada una matriz A de orden $m \times n$, se llama *menor de orden* k de la matriz A, a cualquier determinante formado por los elementos correspondientes a la intersección de k filas y k columnas de A. El *rango* de la matriz A es el orden del mayor *menor* distinto de cero.

Propiedad.- *Un conjunto de m vectores es linealmente independiente si, y sólo si, el rango de la matriz formada por tales vectores colocados por filas (o por columnas), es precisamente m.*

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas es un conjunto de ecuaciones lineales tales como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} ,$$

donde los a_{ij} son números reales y se llaman coeficientes de la incógnitas x_j y los b_i, también son reales y se llaman términos independientes.

Una solución del sistema es el conjunto $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de números reales que verifica cada una de las igualdades del sistema cuando se hace la sustitución $x_i = \alpha_i$ para cada $i = 1, \ldots n$.

Un sistema es compatible determinado si tiene una única solución, es compatible indeterminado si la solución no es única e incompatible si no tiene solución.

Se llama matriz del sistema a la matriz A de los coeficientes; y matriz ampliada a la matriz B que resulta de añadir a A la columna de los términos independientes.

> **Teorema de Rouche-Frobenius.-** Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible si, y solo si, el rango de la matriz A del sistema coincide con el rango de la matriz B ampliada. Además:

a) Si el rango de A es n y coincide con el rango de la matriz ampliada, el sistema es compatible determinado.

b) Si el rango de A coincide con el rango de la matriz ampliada y es menor que n, el sistema es compatible indeterminado.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Las siguientes transformaciones de un sistema se llaman *transformaciones equivalentes* porque al hacerlas en un sistema, dan como resultado otro sistema equivalente.

1. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
2. Cambiar el orden de las ecuaciones.
3. Sumar a una ecuación una combinación lineal de otras.
4. Si una ecuación es combinación lineal de otras, se puede suprimir.

MÉTODO DE GAUSS

Un sistema es triangular, si todos los coeficientes $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$. El método de Gauss para estudiar y resolver sistemas lineales consiste en llevar un sistema a otro triangular equivalente mediante transformaciones equivalentes. Una vez que el sistema es triangular, se despeja una incógnita en la última ecuación, dicha incógnita se sustituye en la penúltima ecuación y se despeja otra incógnita; las dos incógnitas despejadas se sustituyen en la antepenúltima ecuación y así sucesivamente hasta llegar a la primera ecuación.

Se puede estudiar cómo es un sistema mediante un sistema triangular. Si una vez llegado a un sistema triangular:

1. Se obtiene alguna ecuación de la forma $0 = c$, con $c \neq 0$, el sistema es incompatible.
2. Si no ocurre el caso anterior, el sistema es compatible. En este caso , si llamamos r al número de ecuaciones que no son de la forma $0 = 0$, tenemos:

   a) Si $r = n$, el sistema es compatible determinado.

   b) Si $r < n$ el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones dependen de $n - r$ parámetros.

REGLA DE CRAMER

Si un sistema es compatible determinado, entonces el número de ecuaciones n coincide con el de incógnitas. Entonces, si A es la matriz del sistema, tenemos que $det(A) \neq 0$ y la solución se puede obtener de la siguiente forma.

Sean $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ las incógnitas. Cada incógnita x_i se obtiene dividiendo por $det(A)$ el determinante de la matriz que resulta de sustituir en la matriz A, del sistema, la columna i, correspondiente a los coeficientes de la incógnita x_i, por la columna de los términos independientes.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Dos matrices A y B son semejantes, si existe una matriz P invertible, tal que $B = P^{-1}AP$.
Una matriz A es diagonalizable si existe una matriz D, diagonal, semejante a A.
Dada una matriz A, se dice que un escalar λ es un valor propio o autovalor de A si existe un vector v tal que $Av = \lambda v$. A cualquier vector v que verifique tal relación se le llama vector propio o autovector de A asociado a λ.
Dada una matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama matriz característica de A a la matriz siguiente (I_n es la matriz identidad y t es un parámetro),

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Al determinante de la matriz característica de A se le llama polinomio característico de A.
Teorema.- *Si A es una matriz cuadrada de orden n, son equivalentes:*

1. *λ es valor propio de A.*
2. *La matriz característica de A es singular.*
3. *λ es raíz del polinomio característico de A.*

Teorema.- *Si A es una matriz cuadrada de orden n, son equivalentes:*

1. *A es diagonalizable.*
2. *A tiene n vectores propios linealmente independientes.*

Además, en tal caso, los elementos de la diagonal principal de la matriz diagonal D, son los valores propios de A; y las columnas de la matriz P, tal que $D = P^{-1}AP$, son los vectores propios de A.