UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Números y funciones.

LOS NÚMEROS REALES.
Los números reales se pueden ordenar de la siguiente forma: se dice que a es menor que b si $b-a$ es un número positivo, y lo escribimos:

$$a < b \quad \text{si} \quad b-a \quad \text{es positivo.}$$

Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$ (propiedad transitiva).
2. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.
3. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
4. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
5. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Propiedades similares se tienen para las desigualdades $>$, $\leq$ o $\geq$.

INTERVALOS:
Abierto $(a,b) = \{x : a < x < b\}$; cerrado $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$; semiabierto o semicerrado $[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$, $(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$.
Intervalos no acotados (semirrectas) $(-\infty,b) = \{x : x < b\}$; $(-\infty,b] = \{x : x \leq b\}$; $(a,\infty) = \{x : x > a\}$; $[a,\infty) = \{x : x \geq a\}$ y $(infty,\infty) = \mathbb{R}$.

VALOR ABSOLUTO
Se define el valor absoluto de un número real x como: $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.

Se verifican las propiedades siguientes:

1. $|x| \geq 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
4. $|xy| = |x||y|$
5. $-|x| \leq x \leq |x|$.
6. $|x| \leq r$ si, y sólo si $-r \leq x \leq r$.
7. $|x| \geq r$ si, y sólo si $r \leq x$ o $x \leq r$.

FUNCIONES

Una función es una correspondencia que asocia a cada elemento x de un conjunto A, denominado dominio, exactamente otro elemento $f(x)$ en un conjunto B. El elemento $f(x)$ se dice que es el valor de la función f en x o la imagen de x mediante f. El conjunto formado por todas las imágenes $f(x)$ es denominado conjunto imagen.

En las definiciones de límites nos quedaremos, prácticamente, en una idea intuitiva:

Decimos que la función $f(x)$ tiene como límite el número real L por la izquierda (respec. L' por la derecha), cuando x tiende hacia a siendo $x < a$ (respec. $x > a$), si $f(x)$ se aproxima a L (recpec. L') tanto como se desee, con la condición de que x esté lo suficientemente cerca de a. Se escribe

$$\lim_{x \to a_{x<a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ (respec. } \lim_{x \to a_{x>a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L').$$

Si existen los dos límites laterales y coinciden, se dice que $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende hacia a y escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

CONTINUIDAD

Una función $f(x)$ es continua en un punto a si verifica:

1. Existe $f(a)$.
2. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y vale, precisamente $f(a)$.

Si existe $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ decimos que f es continua en a por la izquierda; y si existe $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ que lo es por la derecha.

La suma de dos funciones continuas, el producto de un escalar por una función continua, el producto de dos funciones continuas y el cociente de dos funciones continuas (siempre que el denominador no se anule), son funciones continuas.

Teorema del valor intermedio.- Si f es una función continua en $[a, b]$ y k es cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe, al menos, un número real $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = k$.

Teorema de Bolzano.- Si f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

LÍMITES INFINITOS

Si f es una función tal que dado cualquier número real $M > 0$ (respec. $N < 0$), existe un valor de x suficientemente próximo a un punto a tal que $f(x) > M$ (respec. $f(x) < N$), decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es ∞ (respec. $-\infty$); y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \text{(respec. } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{).}$$

Igual que antes, se puede hablar de límites por la izquierda y por la derecha y escribimos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Cuando alguno de estos límites existe, se dice que $f(x)$ tiene una asíntota vertical, siendo $x = a$ la recta asíntota.

LÍMITES EN EL INFINITO

Si $f(x)$ es una función tal que existe un número real L tal que, cuanto más grande (respec. más pequeño) es x $f(x)$ más se aproxima a L, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ (respec. $-\infty$), es L, y es cribimos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \quad (\text{respec.} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L\ ).$$

Cuando alguno de estos límites existe, se dice que $f(x)$ tiene una asíntota horizontal, siendo $y = L$ la recta asíntota.

DERIVADAS

Si $f(x)$ es una función tal que existe el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

decimos que f es derivable en a y su derivada vale $f'(a)$.
La derivada de una función se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a una función en un punto; así la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ e el punto $(a, f(a))$ es $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.
A continuación, tenemos la reglas elementales de derivación de funciones, así como las derivadas de operaciones con funciones derivables.

$f(x) = k = cte.$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^a$	$f'(x) = ax^{a-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x)\frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$h(x) = f(x) + g(x)$	$h'(x) = f'(x) + g'(x)$
$h(x) = \lambda f(x)\ (\lambda \in \mathbb{R})$	$h'(x) = \lambda f'(x)$
$h(x) = f(x)g(x)$	$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x) \neq 0)$	$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$	$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Una función f es creciente (respec. decreciente) en un punto a si existe un intervalo abierto I que contiene a a y tal que $f(x) \leq f(a)$ (respec. $f(x) \geq f(a)$) si $x \in I$ con $x < a$ y $f(a) \leq f(x)$ (respec. $f(a) \geq f(x)$) si $x \in I$ con $x > a$.

Teorema.- Si f es derivable en a, se verifican:

a) Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en a.

b) Si $f'(a) < 0$, entonces f es decreciente en a.

Una función $f(x)$ tiene en a un máximo relativo (respec. mínimo) si existe un intervalo abierto I que contiene a a y que verifica que $f(x) \leq f(a)$ (respec. $f(x) \geq f(a)$), para todo $x \in I$. A estos puntos se les llama extremos.

Teorema.-Si f tiene un extremo en a y es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.

Teorema.-Si f es derivable dos veces en a y $f'(a) = 0$, se verifican:

a) Si $f''(a) > 0$, entonces, $f(a)$ es un mínimo relativo.

b) Si $f''(a) < 0$, entonces, $f(a)$ es un máximo relativo.

Teorema de Rolle.- Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio.-Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$