UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Óptica y Optometría
Relación de Problemas n^{o}1
Curso 2008-2009

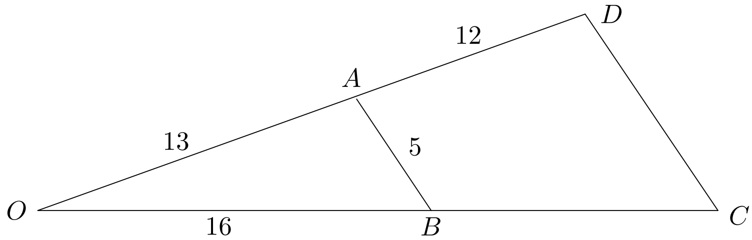
Trigonometría plana

(Recordando la infancia y la adolescencia (I))

1. Los lados de un triángulo miden 10, 7 y 6 cm. Calcule los lados y el área de un triángulo semejante a él si la razón de semejanza es 3.

2. Los lados de un triángulo miden 5, 8 y 7 cm. El perímetro de un triángulo semejante mide 40 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza y cuánto miden los lados y el área del nuevo triángulo?

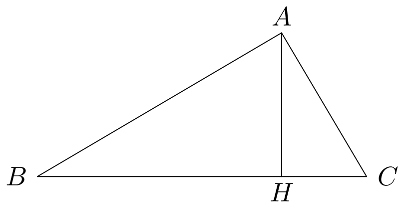
3. Un patio tiene forma de cuadrilátero, $ABCD$, con dos lados paralelos. Después de hacer algunas medidas tenemos que $AB = 5$ m y $AD = 1200$ cm. Además sabemos que $OA = 13$ m y $OB = 16$m. ¿Cuánto miden BC y DC? Calcule el área del patio.



4. Una secuolla gigante proyecta una sombra de 17,22 m a una determinada hora del día. A esa misma hora un pequeño ciprés cercano que mide 1,60 m de altura proyecta una sombra de 67 cm. ¿Cuál es la altura de la secuolla?

5. Dibuje un triángulo cualquiera y marque el punto medio de cada una de los lados. Trace el triángulo que une esos puntos medios ¿es semejante al inicial? ¿cuál es la relación que existe entre las áreas y los perímetros de los dos triángulos?

6. Si $\hat{A}$ es un ángulo recto y los triángulos BAC, BHA y AHC son semejantes, demuestre:



   a) (***Teorema de la altura***) Demuestre que $\frac{BH}{HA} = \frac{HA}{HC}$; es decir que $HA^2 = BH \cdot HC$.
   b) (***Teorema del cateto***) Deduzca que $BA^2 = BC \cdot BH$.
   c) Deduzca que $AC^2 = HC \cdot BC$.
   d) Si sumas las dos igualdades anteriores te encontrarás con un conocido teorema.

7. Demuestre:

   a) Las razones trigonométricas de un ángulo agudo no dependen del triángulo rectángulo elegido para calcularlas.
   b) Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera no dependen del radio de la circunferencia elegida.

8. Exprese los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360^o o 2π radianes según corresponda: 720^o; -3000^o; 900^o; 10π rad.; $-\frac{13\pi}{4}$ rad.; 60π rad.

9. Dados los ángulos $\alpha = 30^o56'50''$ y $\beta = 60^o58'55''$, calcule en grados y después en radianes: $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$; 3α y $\frac{\alpha}{3}$.

10. Calcule, en cada caso las restantes razones trigonométricas usando los datos facilitados:

$$\begin{array}{ll} \cos\alpha = \frac{4}{5},\quad 270^o \leq \alpha \leq 360^o & \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5},\quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \\ \tan\alpha = \frac{3}{4},\quad \pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} & \cot\alpha = -2,\quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \\ \sec\alpha = 1,\quad \frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi & \csc\alpha = -2,\quad \pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

11. Simplifique las expresiones siguientes:

$$\text{(a) } \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x \quad \text{(b) } \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) \quad \text{(c) } \cos(x+y) - \cos(x-y)$$

12. Compruebe que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + \alpha) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha$ se verifica para todo ángulo α.

13. Compruebe que se verifica:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} \pm \theta\right) = \frac{1 \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\theta} = \frac{\cos\theta \pm \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta \mp \operatorname{sen}\theta}.$$

14. Demuestre las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x & \text{(b) } \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x \\ \text{(c) } 2\operatorname{sen}^4 x = \frac{3}{4} - \cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x & \text{(d) } 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \end{array}$$

15. Dado un ángulo α y llamando $t = \tan\frac{\alpha}{2}$ compruebe que:

$$\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

16. Demuestre el teorema de *Neper* o de *las tangentes*: En todo triángulo se verifica:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

17. Resuelva las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 3x & \text{(b) } \cos x + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 \\ \text{(c) } \cos x - \operatorname{sen} 2x = 0 & \text{(d) } \cos 2x + 6\cos^2 x = 1, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2\pi \end{array}$$

18. Resuelva los siguientes sistemas:

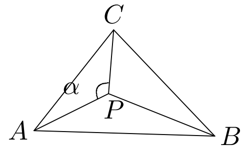
$$(a) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ 2(x+y) = \pi \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad (d) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = \frac{1}{2} \\ \csc x + \sec y = -1 \end{cases}$$

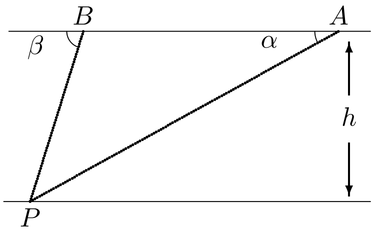
19. Calcule el área de un decágono regular de 8 cm. de lado.

20. La distancia entre dos puntos A y B no se puede medir directamente pues entre ellos hay obstáculos. Se recurre a un punto C para formar un triángulo ABC. Se mide la distancia entre A y C: 48 m.; y la de B a C: 67 m.; así como al ángulo correspondiente al vértice C que es 80^o. Calcule la distancia entre A y B y los restantes ángulos del triángulo.

21. Considere el triángulo ABC de la figura y un punto P interior a dicho triángulo con los datos siguientes: $\overline{PA} = 23$ m. , $\overline{PC} = 19$ m. $\alpha = 118^o$. Calcule $\overline{AC}$,

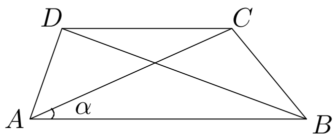


22. Una avioneta en vuelo horizontal con velocidad de 150 km/h, sobrevuela el Campus de Espinardo. Si el ángulo α es $\frac{\pi}{6}$ radianes y el β es $\frac{\pi}{3}$ y entre el instante A y el B han transcurrido 6 segundos, calcule la altura a la que vuela la avioneta.



23. Una goma elástica está sujeta, sin estirarla, a dos puntos A y B situados a la misma altura en dos postes verticales. La deformación de la goma es proporcional al peso que soporta. Del centro C de la goma se cuelga un peso con lo que se forma un triángulo en el que el ángulo que corresponde al vértice B es $\alpha = 19^o$ y la distancia entre A y B es de 1'5 m. Se duplica el peso y se forma un nuevo triángulo. Calcule el nuevo ángulo de B.

24. Del trapecio de la figura se conocen $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 3'5$ y $\overline{BD} = 5'5$. Calcule α, $\overline{DC}$ y $\overline{AD}$.



25. Necesitamos medir la altura de una torre cuya base no es accesible y está situada en un terreno horizontal. Desde un punto A, la torre parece levantar un ángulo de 37^o sobre el horizonte. Separándose 12 m. más que A, se llega a un punto B desde el que la torre parece levantar 28^o sobre el horizonte. Calcule la altura de la torre.