UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Óptica y Optometría
Resúmenes
Curso 2008-2009

Trigonometría plana

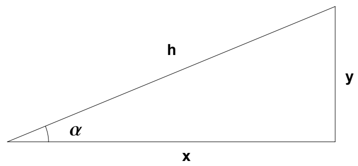
Semejanza

Dos polígonos $A_1A_2\dots A_n$ y $A'_1A'_2\dots A'_n$ son semejantes si los ángulos son iguales y los lados que determinan dichos ángulos son proporcionales; es decir

$$A_1 = A'_1,\ A_2 = A'_2, \dots, A_n = A'_n \quad \text{y} \quad \frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{A'_{n-1}A'_n}$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Si sobre un ángulo agudo α, construimos un triángulo rectángulo de catetos x e y, e hipotenusa h como muestra la figura



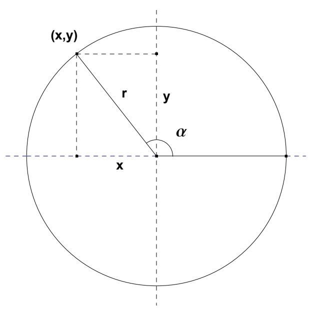
Se definen las siguientes razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{h};\quad \cos\alpha = \frac{x}{h};\quad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x},\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{x}{y},\quad \csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{h}{y},\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{h}{x}$$

Las razones trigonométricas no dependen del triángulo rectángulo elegido (véase el ejercicio correspondiente).

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Observemos que sobre una circunferencia se pueden trazar todos los ángulos posibles. Si trazamos una circunferencia de radio r y centro el origen de coordenadas; y tomamos como origen de ángulos el semieje de abscisas positivas, para cada punto de la circunferencia de coordenadas (x, y) tenemos un ángulo α, como muestra la figura



Entonces se definen las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r};\quad \cos\alpha = \frac{x}{r};\quad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x},\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{x}{y},\quad \csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{r}{y},\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{r}{x}$$

Las razones trigonométricas no dependen del radio de la circunferencia (véase el ejercicio correspondiente).

Relaciones entre razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\quad \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \sec^2\alpha - 1,\quad \cot^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1 = \csc^2\alpha - 1$$

Razones de ángulos suplementarios:

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha,\ \ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\ \ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

Razones de ángulos que difieren en π:

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha,\ \ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\ \ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

Razones de ángulos opuestos:

$$\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha,\ \ \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \ \tan(-\alpha)=\tan\alpha$$

Razones de ángulos complementarios:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha,\ \ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

Suma y diferencia de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\operatorname{sen}\beta\cos\alpha,\ \ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

Ángulo doble:

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha,\ \ \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha,\ \ \tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

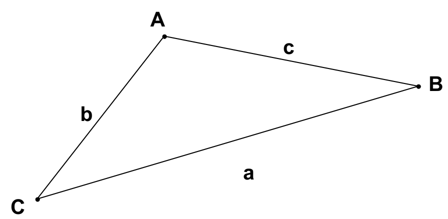
Ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\ \ \tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Transformaciones de sumas en productos:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \ \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \ \cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta}=\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Dado un triángulo cualquiera, con la notación de la figura:



Teorema del coseno.- Se verifican las igualdades siguientes:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ \ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,\ \ c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$$

Teorema de los senos.- En todo triángulo cada lado es proporcional al seno de su ángulo opuesto, es decir, se cumple:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$